T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONU İLE DONATILMIŞ KENMOTSU MANİFOLDLARIN BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

İLKNUR PALA TEPECİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

EDİRNE-2022

İLKNUR PALA TEPECİK'in hazırladığı "**SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONU İLE DONATILMIŞ KENMOTSU MANİFOLDLARIN BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ**" başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından **MATEMATİK** Anabilim Dalında bir **Yüksek lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri : İmza

BAŞKAN : Dr. Öğr. Üyesi Gülhan AYAR

Dr. Öğr. Üyesi Tuna BAYRAKDAR

Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Tez Savunma Tarihi: 29/06/2022

Bu tezin Yüksek Lisans olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN İmza

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Hüseyin Rıza Ferhat KARABULUT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

29/06/2022

İlknur Pala TEPECİK

Yüksek Lisans Tezi

Schouten-Van Kampen Konneksiyonu İle Donatılmış Kenmotsu Manifoldların Bazı Eğrilik Özellikleri

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasında geometri ve fiziğin ilgi çeken konularından değme manifoldların özel bir sınıfı olan Kenmotsu manifoldları üzerine inceleme yapılmıştır. Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldunun concircular eğrilik tensörünün, projektif eğrilik tensörünün ve Weyl konformal eğrilik tensörünün eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Yıl : 2022

Sayfa Sayısı : 49

Anahtar Kelimeler : Kenmotsu Manifoldları, Schouten-van Kampen konneksiyonu, Concircular eğrilik tensörü, Projektif eğrilik tensörü, Weyl konformal eğrilik tensörü.

Master of Science Thesis

Some Curvature Propertıes Of Kenmotsu Manıfolds Equıpped Wıth Schouten-Van Kampen Connectıon

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In this thesis, Kenmotsu manifolds, which is a special class of contact manifolds, which is one of the interesting topics of geometry and physics, has been examined. t

The curvature properties of the concircular curvature tensor, the projective curvature tensor and the Weyl conformal curvature tensor of a Kenmotsu manifold with Schouten-van Kampen connection are investigated.

Year : 2022

Number of Pages : 49

Keywords : Kenmotsu Manifolds, Schouten-van Kampen connection, Concircular curvature tensor, Projectively curvature tensor, Weyl conformal curvature tensor.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında her türlü desteğini yakından gördüğüm kıymetli danışmanım Sayın Dr. Pelin POŞPOŞ TEKİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bir yürekten teşekkürü de yaşamım boyunca bana daima ilham kaynağı olan ve hayallerimin peşinden koşmamı her zaman destekleyen babam Kenan PALA'ya, annem Türkay PALA'ya , kardeşim Melisa PALA'ya ve eşim Suat TEPECİK'e borç bilirim.

Ayrıca, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen, bana moral veren değerli dostum Serap ÖNER'e ve sayamadığım tüm dostlarıma çok teşekkür ederim.

İlknur PALA TEPECİK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

g	: Metrik Tensörü
ξ	: Karakteristik vektör alanı
ϕ	: Tensör alanı
η	: 1-form
M	: Manifold
$[\,,]$	: Lie parantez operatörü
$\otimes$	: Tensör çarpımı
Φ	: Temel iki form
D	: Değme dağılımı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
∇^*	: Schouten-van Kampen konneksiyonu
R	: Riemann eğrilik tensörü
N	: Nijenhuis tensör alanı
C	: Concircular eğrilik tensörü
P	: Projektif eğrilik tensörü
K	: Kesitsel eğrilik
C	: Weyl eğrilik tensör alanı
$\bar{C}$	: Concircular eğrilik tensörü
$\chi(M)$	: M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Geometri, matematiksel yapıların dönüşümler altında invaryant kalan özelliklerini inceleyen bir bilim dalıdır. Tek bir noktadan, büyük yüzeylere kadar dayanan matematiksel yorumdur. Geometrinin bir alt dalı ise diferansiyel geometridir ve diferansiyel hesap yardımıyla geometrik kavramları tanımlamamıza yardımcı olur. Diferansiyel geometride en çok incelenen ve birçok açık problemi barındıran konusu ise manifold kavramıdır. Bu kavram, Carl Friedrich Gauss'un yüzeylerin içsel geometrisinin incelenmesinin üzerine ortaya çıkmıştır. İçsel geometri; Gauss'un bulduğu Gauss dönüşümü kavramından çıkmıştır ve yüzeyi yüzey üzerindeki eğriler yardımıyla incelemiştir.

Katlı yüzeyler olarak anılan manifoldlar, local olarak R^n Öklid uzayına benzer nokta kümeleridir. Sonlu sayıda koordinat komşuluklarından (haritalardan) meydana gelir ve her komşuluğu R^n uzayının açık bir kümesine homeomorftur. Gauss'un öğrencisi Riemann, manifold kavramını tanıtmıştır. Özellikle tanjant uzayı kavramı geometri problemlerinde lineer cebir tekniklerinin kullanımını doğurmuştur. Daha sonra en çok dikkat çeken manifold kullanımı ise Einstein'ın genel görelilik kuramının çatısının oluşturulmasında manifoldları kullanmasıdır. Diğer taraftan da yine 19. yüzyılda geçerlilik kazanmaya çalışan Öklid dışı geometriler de manifold fikri ile kavramsal bir başarıya ulaşmıştır. Bu gelişmeler, uzaklık kavramının genelleştirilmesi ve bir manifold üzerinde daha genel metrik yapının elde edilmesiyle oluşmuştur. Bu da bugün Riemann geometrisi olarak bilinmektedir. Manifoldlar, geometriyi genelleştirmenin yeni bir yolunu açmıştır (Şahin,2012).

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş bölümüdür ve Manifold kavramının tarihsel gelişimi hakkında kısa bir bilgi vermektedir. İkinci bölümde ise manifold kavramının daha detaylı olarak temel kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca bu bölümde Riemann manifoldları, hemen hemen (almost) değme manifoldlar ve hemen hemen değme metrik Riemann manifoldlarının özel bir sınıfı olan Kenmotsu manifoldları, Einstein Kenmotsu manifoldları, η- Einstein Kenmotsu manifoldları ile ilgili temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar'ın 2019 yılında yapmış oldukları makaleden oldukça faydalanılmıştır ve bu makaleden yola çıkarak Kenmotsu manifoldları üzerinde concircular eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve weyl konformal eğrilik tensörlerinin Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ilişkili bazı eğrilik şartları incelenmiştir.

Son bölüm de ise çalışmamızda orijinal bir kısım elde edilememiş olmasına rağmen tezin hazırlanma sürecinde karşımıza çıkan bir takım açık problemlere yer verilmiştir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Diferansiyel geometri çalışmaları önce eğriler ardından da yüzeyler teorisi ile ilerler ve de manifold kavramına doğru evrilir. Bilindiği üzere bir yüzey her daim Öklid uzayının içinde yer alır. Bu nedenle yüzeyin geometrisi incelenirken Öklid uzayının iç çarpımı ve vektörel çarpımı kullanılır. Burada ise yerel olarak olarak R^n Öklid uzayına benzeyen nokta kümeleri denilen, yüzeyin genelleştirilmişi olan ve Öklid uzayının içinde olmak zorunda olmayan ayrıca yüzeylerin içsel geometrisini keyfi bir uzaya taşımayı mümkün kılan manifold kavramı ele alınacaktır.

Bu bölümde ilk olarak topoloji ve diferansiyel geometri derslerinden bilinen kavramlar olan topoloji, homeomorfizm, topolojik manifold gibi temel kavramlara değinilecektir. Ardından bu kavrama ait bir takım tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. X bir küme ve τ, X'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu τ ailesi aşağıdaki 3 koşulu sağlarsa τ, X üzerinde topolojidir. (X, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir.

T1) $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$

T2) $\forall\, G_1, G_2 \in \tau$ için $G_1 \cap G_2 \in \tau$

T3) $\forall\, G_i \in \tau, i \in \tau$ için $\bigcup_{i \in \tau} G_i \in \tau$

X kümesinin her elemanına topolojik uzayın bir noktası ve X kümesinin τ ailesine ait olan alt kümelerine topolojik uzayın açıkları denir. $x \in X$ noktasını içeren bir U açık alt kümesinin her N üst kümesine x noktasının komşuluğu denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Metrik uzayda her zaman bir topoloji tanımlanabilir. Bu durum da öncelikle metrik uzayı tanımlayalım.

Tanım 2.1.2. $\forall\, \alpha, \beta, \theta \in X$ için $X \neq \emptyset$ olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ ise bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa d fonksiyonu X üzerine bir **metrik uzaydır**.

i) $\alpha \neq$ için $d(m, n) > 0$ (pozitif .tanımlılık).

ii) $d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

iii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ (simetri özelliği).

iv) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \theta) + d(\theta, \beta)$ (üçgen eşitsizliği).

d metriği X kümesi üzerinde bir tek topoloji üretir. E^n Öklid uzayındaki metrik ile E^n de bir topoloji tanımlanmış olur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.3. U, R^n in bir açık alt kümesi olmak üzere, $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü $k.$ mertebeden kısmi türevleri varsa ve sürekliyse f dönüşümüne $k.$ mertebeden **diferansiyellenebilir** denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.4. X bir topolojik uzay ve A ve B gibi X'in iki farklı iki noktası için X'de sırası ile A ve B noktalarını içinde bulunduran G_A ve G_B açık alt kümeleri $G_A \cap G_B \neq \emptyset$ olacak şekilde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına **Housdorff uzayı** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Yani X topolojik uzayında farklı her nokta için bu noktaların ayrık birer komşuluğu varsa bu topolojik uzay Housdorff uzayıdır. E^n Öklid uzayı da bir Housdorff uzayıdır.

Tanım 2.1.5. (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay,

$$\begin{aligned} f:\quad X &\to \quad Y \\ x_0 &\to \quad f(x_0) \end{aligned}$$

Bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0) \in Y$ noktasının her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasının bir N komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında **sürekli** denir.

Yani, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall\, x_0 \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonu süreklidir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.6. X ve Y topolojik uzay olsun.$f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f, X den Y ye **homeomorfizma (topolojik dönüşüm)** denir. f bir homeomorfizma ise X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denk uzaylardır yani homeomorfiktirler (Şahin, 2012).

Bu tanımlarla beraber esas tanımımızı yani topolojik manifoldu tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.7. M bir Housdorff uzayı olsun. M, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa n-boyutlu **topolojik manifold** ya da topolojik m −manifold adı verilir.

i) M topolojik uzayının her bir açık alt cümlesi E^m' e homeomorf veya E^m' nin açık alt cümlesine homeomorftur.
ii) M topolojik uzayı sayılabilir çoklukta açık cümleler ile örtülebilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Yani, M Housdorff uzayı, her $p \in M$ için $\mathbb{R}^m$ 'deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir U açık komşuluğu varsa M Housdorff uzayına bir topolojik manifolddur denir. Böylece $boy(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan, manifoldun boyutu m olarak tanımlanır (Şahin, 2012).

Bu homeomorfizma $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ise (U, φ) ikilisine de harita denir. M manifoldunun bütün noktalarının en az bir harita da yer alması için bu açık kümelerin arakesitleri boştan farklı olmalıdır. φ bir homeomorfizma olduğundan, $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayı bir manifolddur. Bu manifold tek bir $(\mathbb{R}^m, I)$ atlası ile tanımlanır, burada *I* birim dönüşümü göstermektedir.

Tanım 2.1.8. E^n Öklid uzayında A kümesi bir açık alt küme olsun. $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü k. mertebeden kısmi türevleri var olup sürekli oluyorsa, g dönüşümüne C^k sınıfından **diferansiyellenebilir dönüşüm** denir. Özel olarak C^0 sınıfından olması için g sadece sürekli olmalıdır.

$C^k(\text{A}, \mathbb{R}) = \{g | g: A \rightarrow \mathbb{R}\ ve\ g\ \ dönüşümü\ C^k\ sınıfından\}$
$C^\infty(\text{A}, \mathbb{R}) = \{g | g \in C^k(A, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}$

gösterimleri kullanılır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.9. E^n de iki açık alt cümlesi U ve V ve bir $\varphi: U \to V$ dönüşümü için

i) $\varphi \in C^k(\mathrm{U}, \mathrm{V})$.

ii) $\varphi^{-1}: V \to U\ var\ ve\ \varphi^{-1} \in C^k(V, U)$.

koşulları sağlanır ise φ ye bir C^k **diffeomorfizm,** U ile V ye de C^k sınıfından bir diffeomorfiktirler denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.10. M bir topolojik n-manifold ise ve M üzerinde C^k sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa M ye C^k sınıfından **diferansiyellenebilir manifold** denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Manifoldlar teorisinin en önemli kavramlarından bir tanesi tanjant vektör kavramıdır. Bir manifoldun esasında bir topolojik uzay olduğunu biliyoruz, manifold üzerinde nasıl ki bir diferansiyel yapı tanımlayarak diferansiyel teknikler kullanılıyorsa, Tanjant vektör de manifold üzerinde vektör uzayı yapısına sahip olduğun için cebirsel teknikleri kullanmayı mümkün kılar.

Tanım 2.1.11. M diferansiyellenebilir bir manifold ve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ diferansiyellenebilir eğri olsun. Kabul edelim ki $\alpha(0) = p$ ve $\mathcal{D}$ de p noktasında diferansiyellenebilen fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{D}$ üzerinde tanımlanan

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, f \in \mathcal{D} \tag{2.1.1}$$

ile tanımlı $\alpha'(0)$ fonksiyonuna $t = 0$ da α eğrisine **teğet vektör** adı verilir.
Manifoldun bir p noktasındaki tanjant vektör, $\alpha(0) = p$ olmak üzere $t = 0$ da α eğrisine teğet olan vektördür (Şahin, 2012).

Manifoldun bir p noktasındaki tanjant vektörü yöne göre türevin özelliklerini dikkate alınarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1.12. M manifold ve bu manifold üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ diyelim. Böylece $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

i) $V_p(\alpha f + \beta g) = \alpha V_p f + \beta V_p g$,

ii) $V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p g$.

şartlarını sağlayan $V_p: C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki **tanjant vektörü** denir. Bu şekilde tanımlanan tanjant vektörlerin uzayı bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir. Bunun nedeni esas olarak manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı ile Öklidyen uzay izomorfiktir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.13. M manifoldu alalım. V 'ye, M manifoldunda bir komşuluk diyelim. Bir $D \in V$ noktasındaki $T_V(D)$ tanjant uzay ise V 'nin tüm D noktaları üzerindeki tanjant uzaylarının birleşimi $\bigcup_{D \in V} T_V(D)$ ile gösterilsin.

Bir $\Omega: \bigcup_{D \epsilon V} T_V(D) \rightarrow V$ dönüşümü $\forall t_D \in T_V(D)$ tanjant vektörü için $\Omega(t_D) = D$ şeklinde tanımlayalım. V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanı operatörü

$$X: V \rightarrow \bigcup_{D \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir dönüşümdür, öyle ki

$$\Omega o X = I: V \rightarrow V$$

dönüşümü bir **özdeşlik dönüşüm**üdür (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.14. $T_{E^n}(p)$ tanjant uzayının cebirsel duali $T^*_{E^n}(P)$ ile gösterilir ve E^n in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı adını alır. $T^*_{E^n}(P)$ nin her bir elemanına, $P \in E^n$ noktasındaki **kotanjant vektör** adı verilir. Şu halde

$$T^*_{E^n}(P) = \left\{ \alpha^* | \alpha^*: T_{E^n}(P) \xrightarrow{lineer} \mathbb{R} \right\}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.15. E^n'in $P \in E^n$ noktasındaki kotanjant vektör uzayı $T^*_{E^n}(P)$ alalım. Buna göre, bir

$$w: E^n \rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P)$$

dönüşümü için, $\Pi o w: E^n \xrightarrow{özdeşlik} E^n$ olacak şekilde bir

$$\Pi: \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P) \rightarrow E^n$$

dönüşümü mevcut ise w'ye E^n üzerinde **1-formdur** deriz. (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.16. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde, r −adet vektör uzayı $V_1, V_2, \dots, V_r$ alalım.

$f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall u_i, v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq r$, ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
& f(v_1, \ldots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) \\
& \qquad = a.f(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_{i,} v_{i+1}, \ldots, v_r) + b.f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı ise f ye $\boldsymbol{r}$ **lineer fonksiyon** denir. Buna göre, f r lineer ise herbir V_i 'ye göre lineerdir. $r = 2$ ise özel olarak f ye bir bilineer $(2 - \text{lineer})$ fonksiyon denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.17. $f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r \to \mathbb{R}$ şeklindeki tüm r lineer fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}(V_{1,} V_2, \ldots, V_r ; \mathbb{R})$ şeklinde gösterelim. $\mathcal{L}$ de sırasıyla toplama ve skaler ile çarpma işlemleri; $\forall (u_1, u_2, \ldots, u_r) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_r$ ve $\forall\, h_1, h_2 \in \mathcal{L}(V_{1,} V_2, \ldots, V_r ; \mathbb{R})$ için

$$(h + h_2)(u_1, u_2, \ldots, u_r) = h_1(u_1, u_2, \ldots, u_r) + h_2(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \ldots, V_r ; \mathbb{R})$ için $(\lambda h)(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \lambda h(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ şeklinde tanımlanırsa, bu cümle toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre, $\mathbb{R}$ üstünde bir **vektör uzayı**, bu vektör uzayına da $V_1^*, V_2^*, \ldots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının **tensör çarpımıdır** denir,

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \ldots, V_r ; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \ldots \otimes V_r^*$$

biçiminde ifade edilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \ldots \otimes V_k^*$ tensör uzayının elemanlarının her biri $k.$ mertebeden tensördür denir. O halde, $k.$ mertebeden tensör, bir r lineer dönüşümdür. Ayrıca $V_1 = V_2 = \ldots = V_r$ ise $V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ uzayına bir **kovaryant tensör uzayı** denir. Bu uzayın elemanlarının her birine de $r.$ mertebeden bir **kovaryant tensör** veya kovaryant r tensör şeklinde isimlendirilir. $V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*$ uzayı, $T^r(V)$ veya $\otimes^r\, V^*$ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.18. V vektör uzayının dualine V^*diyelim. V^* de l lineer dönüşümlerin vektör uzayı **kontravaryant tensör** uzayı adı verilir.

$$\mathcal{L}(V^*, V^*, \ldots, V^*; \mathbb{R}) = \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{l-tane} = \otimes^r\, V = T_l(V^*)$$

şeklinde gösterebiliriz. Kovaryant tensör uzayının elemanlarına $s.$ mertebeden kontravaryant tensörlerdir denir. (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.19. V, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı n boyutlu bir vektör uzayı ve V^* da bu vektör uzayının duali olsun.

$$\mathcal{L}(V^r, V^{*l}; \mathbb{R}) = \left\{ g \middle| g: V^k \times V^{*l} \xrightarrow{(k+l)-line} \mathbb{R} \right\}$$

kümesi yukarıdaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına $k.$ mertebeden kovaryant tensör ve $l.$ mertebeden kontravaryant tensör uzayı başka bir ifadeyle de (k, l) tipinde **karışık tensör uzayı** adı verilir. Bu uzayın elemanları da (k, l) tipinde tensör (**karışık tensör**) ismi verilir. Bu uzay,

$$T^k(V) \otimes T_l(V^*) = \otimes^k (V^*) \otimes^l (V)$$

yada

$$T_l^k(V)$$

şeklinde ifade edilir.

Literatürde bazen $T_l^k(V)$ yerine V_l^k de kullanılır. Uzayın elemanlarına (k_l) - tipinde tensörler (karışık tensörler) de denilebilir.

$T_0^k(V) = V_0^k$ ı yerine $T^k(V) = V^k$, $T_l^0(V) = V_l^0$ ın yerine $T_l(V) = V_l$ de şeklinde de yazılır. Buna göre

$V = T^1(V) = V^1$ ve $V^* = T_1(V) = V_1$

de alabiliriz.

Özellikle $T_0^0(V) = V_0^0 = \mathbb{R}$ alınır. Böylece skalerler de birer tensördür, sıfırıncı mertebeden tensörlerdir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.20. Bir F cismi üzerinde V vektör uzayı olsun. $[,]: V \times V \rightarrow V$ dönüşümü;

i) 2-lineer

ii) Alterne ($\forall\, A_1, A_2 \in V$ $için$ $[A_1, A_2] = -[A_2, A_1]$)

iii) $\forall A_1, A_2, A_3 \in V$ için $\left[A_1, [A_2, A_3]\right] + \left[A_2, [A_3, A_1]\right] + \left[A_3, [A_1, A_2]\right] = 0$,(Jacobi özdeşliği)

özellikleri veriliyor ise V üzerinde bir **Lie operatörüdür** denir. Bu takdirde V vektör uzayına da **Lie Cebiri** adı verilir. (Hacısalihoğlu, 1998).

2.2. Riemann Manifoldları

Bu alt bölümde ilk olarak Riemann metriğini tanımlanıp ve buradan da Riemann manifoldu tanımı verilecektir. Bu tanımlardan yola çıkarak görülür ki Riemann manifoldu, manifoldun her noktasındaki tanjant uzayın bir iç çarpım uzayına dönüşmesini sağlayacaktır.

Tanım 2.2.1. M bir C^{∞} manifold ve M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlı ise ve bu dönüşüm $\forall\, X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için

i) $$\begin{aligned} g(a\,X_1 + bX_2, X_3) &= ag(\,X_1, X_2) + bg(X_2, X_3) \\ g(\,X_1, aX_2 + bX_3) &= ag(\,X_1, X_2) + bg(\,X_1, X_3) \end{aligned} \quad \text{(bilineer)}$$

ii) $g(\,X_1, X_2) = g(X_2, X_1)$ (Simetrik)

iii) $g(\,X_1, X_1) \geq 0$ ve $g(\,X_1, X_1) = 0 \Leftrightarrow V = 0 \in \chi(M)$ (Pozitif tanımlılık)

özelliklerini sağlıyor ise g dönüşümüne M üzerinde bir metrik tensördür, iç çarpımdır, diferansiyellenebilir metriktir veya **Riemann metriğidir** denir , (M, g) ikilisine de bir **Riemann manifoldudur**. (O'Neill 1983).

Bir Riemann manifolduna M diyelim, $\chi(M)$' de tanımlı g dönüşümü, M'nin herbir tanjant vektör uzayına bir iç çarpım indirgenir. Yani bir Riemann manifoldu, manifoldun her noktasındaki tanjant uzayın bir iç çarpım uzayına dönüşmesini sağlar (Şahin, 2012).

Tanım 2.2.2. M, C^{∞} manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla: \quad \chi(M) \times \chi(M) &\to \quad \chi(M) \\ (X, Y) &\to \quad \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

i) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iv) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y.$

koşulları sağlanıyorsa ∇, M manifoldu üzerinde bir **afin veya linner konneksiyondur**.$\nabla_X Y$, vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca **kovaryant türevi** deriz. (Şahin, 2012).

Afin konneksiyon tanımından görüldüğü üzere bir afin konneksiyon, M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına dönüştürmektedir (Şahin, 2012).

Tanım 2.2.3. (M, g) Riemann manifold olsun. ∇'da M üstünde bir afin konneksiyon ise, M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve $\forall\, X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için,

i) ∇, C^∞ sınıfındandır.

ii) $\nabla_V X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = [X_1, X_2]$ (sıfır torsion özelliği)

iii) $(\nabla_{X_1} g)(X_2, X_3) = g(\nabla_{X_1} X_2, X_3) + g(X_2, \nabla_{X_1} X_3)$ (konneksiyonun metrik ile bağdaşabilme özelliği).

özellikleri varsa ∇ konneksiyonuna M üzerinde bir **Riemann konneksiyonudur**. ∇_{X_1}'e de **Riemann anlamında kovaryant türev operatörü** deriz (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4. M de ∇ afin konneksiyonunu alalım. $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} T:\ \ \chi(M) \times \chi(M) &\to \ \chi(M) \\ (X_1, X_2) &\to \ T(X_1, X_2) = \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 - [X_1, X_2] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı (2,1) - tipindeki tensör alanı M'nin **torsion tensörüdür** denir. (Yano, Kon, 1984).

Özellikle $T = 0$ olursa aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$[X_1, X_2] = \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 \tag{2.2.1}$$

∇ ya M üstünde **sıfır torsionlu (zero-torsion) konneksiyon** şeklinde isimlendirilir. Aşağıdaki gibi yazılır (Yano, Kon, 1984).

$\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için

$$T(X_1, X_2) = -T(X_2, X_1) \tag{2.2.2}$$

Tanım 2.2.5. Bir Riemann manifold ve (M, g) n-boyutlu, M üzerinde Riemann konneksiyonu ∇ olsun.

$$\begin{aligned} R:\ \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \ \chi(M) \\ (X_1, X_2, X_3) &\to \ R(X_1, X_2, X_3) = R(X_1, X_2)X_3 = [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}]X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı (3,1) tipindeki tensör alanına M'nin **Riemann eğrilik tensörü** denir

Ayrıca $[\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}]X_3 = \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3$ olduğundan Riemann eğrilik tensörü $R(X_1, X_2)X_3 = \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_3 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_3 - \nabla_{[X_1, X_2]}X_3$ şeklinde de ifade edilebilir.

Özel olarak $R = 0$ ise M manifoldu **flattır (düzdür)** denir (O'Neill 1983).

Yani Öklid uzayının Riemann eğrilik tensörü sıfırdır. Buna göre Riemann eğrilik tensörü, manifoldun Öklid uzayından farklılığının belirlenmesini sağlayan bir ölçüt olarak düşünülebilir.

Önerme 2.2.1. M de bir ∇ afin konneksiyonu, $U \subset M$ açık altkümesi tanımlayalım. $X_1, X_2 \in \chi(M)$, U üzerinde X_1 veya X_2 sıfır oluyorsa $\nabla_{X_1} X_2$'de U üzerinde sıfırdır (Yano, Kon, 1984).

Önerme 2.2.2. (M, g) boyutu n olan bir Riemann manifoldu olsun ve $X_1, X_2, X_3, P, T \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda

i) $R(X_1, X_2) = -R(X_2, X_1)$

ii) $g(R(X_1, X_2)P, T) = -g(R(X_1, X_2)T, P)$

iii) $R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 = 0$

iv) $g(R(X_1, X_2)P, T) = g(R(P, T)X_1, X_2)$

koşulları sağlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6. (M, g) bir Riemann manifold ve. $T_P M$ tanjant uzayının boyutu 2 olan bir alt uzayı Ω olmak üzere, verilen $X_1, X_2 \in \Omega$ tanjant vektörleri için (0,2) tipindeki Q tensör alanı;

$$Q(X_1, X_2) = g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2$$

Biçiminde tanımlansın. $Q(X_1, X_2) \neq 0$ olmak üzere

$$K(X_1, X_2) = \frac{g(R(X_1, X_2)X_2, X_1)}{Q(X_1, X_2)} \tag{2.2.3}$$

K 'ya Ω nın **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Omega)$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.7. Bir Riemann manifoldu (M, g) n boyutlu ve $\chi(M)$'nin bir bazı $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned} S: \quad \chi(M) \times \chi(M) &\to \quad C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X_1, X_2) &\to \quad S(X_1, X_2) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X_1)X_2, E_i) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

biçiminde tanımlı (2,0) tipinde S tensör alanı, M'de **Ricci eğrilik tensörü** şeklinde adlandırılır. Ayrıca Q Ricci operatörü;

$$g(Q X_1, X_2) = S(X_1, X_2) \tag{2.2.5}$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8. (M, g) n boyutlu Riemann manifoldu ve Ricci tensörü S, sıfırdan farklı ve α, 1-form olmak üzere,

$$(\nabla_{X_1} S)(X_2, X_3) = \alpha(X_1)S(X_2, X_3) \tag{2.2.6}$$

bağıntısını sağlıyorsa, M manifoldu **Ricci recurenttir** denir (Petterson 1952).

Tanım 2.2.9. (M, g) n boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için;

$$S(X_1, X_2) = \gamma g(X_1, X_2) \tag{2.2.7}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde M üstünde bir γ fonksiyonu varsa yani M üstünde metrik tensör g, Ricci tensör S'nin bir fonksiyon katıysa M'ye **Einstein manifold** denir (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.2.10. (M, g), boyutu n olan bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ yerel ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.2.8}$$

değeri M manifoldunun **skaler eğriliği** olarak adlandırılır (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.2.11. (M, g) n boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ olmak üzere M'nin **Weyl konformal eğrilik tensör alanı**;

$$\begin{aligned} C(X_1, X_2)X_3 &= R(X_1, X_2)X_3 + \frac{1}{n-2}[S(X_1, X_3)X_2 - S(X_2, X_3)X_1 + g(X_1, X_3)QX_2 - g(X_2, X_3)QX_2] \\ &\quad - \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(X_1, X_3)X_2 - g(X_2, X_3)X_1] \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklinde tanımlanır. (2.2.9)'da Q Ricci operatörüdür (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.2.12. $n \geq 4$ boyutlu M manifoldu için $K = 0$ oluyorsa M manifoldu **konformal flat (düz)** olarak isimlendirilir (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.2.13. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için M **nin concircular (konsirkular) eğrilik tensörü;**

$$\bar{C}(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2) - \frac{r}{n(n-1)}[g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2] \tag{2.2.10}$$

ile tanımlanır (Yano, Kon, 1984).

2.3. Hemen Hemen Değme (Contact) Manifoldlar

Tanım 2.3.1. Boyutu $(2n + 1)$ olan bir M manifoldunda, ϕ, ξ, η sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, vektör alanı ve 1-form olsun. ϕ, ξ, η için, M'de herhangi bir X vektör alanını tanımlayalım. $\forall X \in \chi(M)$,

$$\eta(\xi) = 1$$

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.3.1}$$

koşulları var ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M manifoldu üzerinde bir hemen hemen değme yapısı ve bu yapı ile beraber M'ye de bir **hemen hemen (almost) değme (contact) manifoldu** denir (Yano, Kon, 1984).

Teorem 2.3.1. (ϕ, ξ, η) hemen hemen (almost) değme(contact) yapısı için aşağıdaki özellikler vardır (Yano, Kon, 1984).

i) $\phi\xi = 0$
ii) $\eta(\phi X) = 0$
iii) $rank\phi = 2n$

Teorem 2.3.2. Her bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g Riemann metrik tensör alanı $\forall V, W \in \chi(M)$ için $g(V, \xi) = \eta(V)$ olacak şekilde vardır ve $g(\phi V, \phi W) = g(V, W) - \eta(V)\eta(W)$ dir (Yano, Kon, 1984).

Sonuç 2.3.1. M, hemen hemen değme manifoldunda

$$\eta(V) = g(V, \xi) \quad (2.3.2)$$

$$g(\phi V, \phi W) = g(V, W) - \eta(V)\eta(W) \quad (2.3.3)$$

olacak şekilde g Riemann metriği;

$$g(\phi V, W) + g(V, \phi W) = 0 \quad (2.3.4)$$

dır, yani ϕ, anti-simetrik olacak biçimde M üzerinde bir g Riemann metriği vardır (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.3.2. Teorem de verilen metrik tensör alanı g'yi, verilen (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş **Riemann metrik tensör alanı** olarak adlandıracağız. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birleştirilmiş bir Riemann metrik tensör alanı g olmak üzere, M'de (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir **hemen hemen değme metrik yapı** ve bu (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısıyla beraber M'ye **hemen hemen değme metrik manifolddur** denir (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.3.3. M'nin (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir ancak ve ancak

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

dır. Burada N_φ, φ yardımıyla belirlenmiş **Nijenhuis tensör** alanıdır.(Yano ve Kon,1984)

Tanım 2.3.4. (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $V, W \in \chi(M)$ için;

$$\Phi(V, W) = g(V, \phi W) \tag{2.3.5}$$

biçiminde verilen

$\Phi: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$

M'nin **temel 2-formu** denir (Yano ve Kon, 1984).

i) $d\Phi = 0, d\eta = 0$ ise hemen hemen değme metrik yapı hemen hemen kosimplektik yapıdır,

ii) Hemen hemen kosimplektik yapı normal yapı ise kosimplektik yapı denir,

iii) $d\eta = 0,\ d\Phi = \frac{2}{3}\eta \wedge \Phi$ ise hemen hemen yapı hemen hemen değme Kenmotsu yapı olarak adlandırılır,

iv) Hemen hemen değme Kenmotsu yapı normal yapı ise Kenmotsu yapı adı verilir,

v) $\Phi = d\eta$ ise hemen hemen yapı değme yapı olarak adlandırılır,

vi) Değme yapı normal ise bu yapı Sasakian olarak adlandırılır (Chinea ve Gonzalez, 1990).

Buna göre şu sonuçlar yazılabilir.

Sonuç 2.3.2 (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $V, W \in \chi(M)$ için,

i) M, Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow (\nabla_V \phi)W = g(V, W)\xi - \eta(W)V,$

ii) M, Kosimplektik yapıdır $\Leftrightarrow \nabla\phi = 0,$

iii) M, Kenmotsu yapıdır $\Leftrightarrow (\nabla_V \phi)W = g(\phi V, W)\xi - \eta(W)\phi V$

(Chinea ve Gonzalez, 1990).

Sonuç 2.3.3 (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik manifold olsun.$\forall\, V, W \in \chi(M)$ için,

i) M, Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow (\nabla_V \xi) = -\phi V,$

ii) M, Kosimplektik yapıdır $\Leftrightarrow (\nabla_V \xi) = 0,$

iii) M, Kenmotsu yapıdır$\Leftrightarrow (\nabla_V \xi) = -\phi^2 V$

(Chinea ve Gonzalez, 1990).

Teorem 2.3.3. (ϕ, ξ, η), hemen hemen (almost) değme yapısı ve M'de $(2n+1)-$boyutlu manifold olsun. O zaman M'nin tanjant demetinin yapı grubu $\mathrm{U}(n) \times 1$'e indirgenebilirdir. Burada $\mathrm{U}(n)$, $n \times n$ tipinde üniter matrislerin çarpma işlemine göre grubudur. Tersi de doğrudur (Yano, Kon, 1984).

Tanım 2.3.5. $(2n+1)$ boyutlu M manifoldu üzerinde ve M'nin heryerinde;

$$\eta \Lambda (d\eta)^n \neq 0 \qquad (2.3.6)$$

olacak şekilde bir η 1-formu var ise M manifoldu **değme yapıya** sahiptir ve bu manifold **değme manifold** adını alır. Biz η'ya M'nin bir **değme formu** diyeceğiz. Buradaki $(d\eta)^n$ ile n'inci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani $\underbrace{(d\eta)^n = (d\eta)\Lambda \dots \Lambda(d\eta)}_{n\ tane}$ dir.

Örnek 2.3.1. M, 3-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. Her (x, y, z) noktası komşuluğunda

$$\eta = \cos z\, dx + \sin z\ dy$$

diferansiyel 1-formu ve

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

ξ vektör alanı verilsin. Burdan

$$d\eta = \sin z\, dx \wedge dz + \cos z\, dz \wedge dy$$

olup 1-formunun dış türevi yardımıyla

$$d\eta(X, \xi) = 0$$

ve

$$\eta(\xi) = 1$$

bulunur.

Teorem 2.3.4. Değme formu η olan $(2n+1)$- boyutlu manifold Molsun. M üstünde

$$g(V, \phi W) = d\eta(V, W) \qquad (2.3.7)$$

olacak biçimde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır (Yano, Kon, 1984).

2.4. Kenmotsu Manifoldlar

Bu alt bölümde 3. Bölüme bir hazırlık yapılacaktır ve o bölümde temel alınan Kenmotsu manifoldları kısaca tanıtılacaktır ki bu manifoldlar hemen hemen (almost) değme (contact) manifoldların bir alt sınıfıdır.

Tanım 2.4.1. M, hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(n = 2m + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu ve $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_{X_1}\phi)X_2 = -g(X_1, \phi X_2)\xi - \eta(X_2)\phi(X_1),$$

$$\nabla_{X_1}\xi = X_1 - \eta(X_1)\xi$$

bağıntılarını sağlıyorsa M bir **Kenmotsu manifoldudur** (Kenmotsu 1972).

Tanım 2.4.2. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifold ise M'nin Riemann eğrilik tensörü R ve ∇'da M üzerinde tanımlanan Riemann konneksiyon olmak üzere;

$$R(X_1, X_2)\xi = \eta(X_1)X_2 - \eta(X_2)X_1 \tag{2.4.1}$$

$$(\nabla_{X_3}R)(X_1, X_2)\xi = g(X_3, X_1)X_2 - g(X_3, X_2)X_1 - R(X_1, X_2)X_3 \tag{2.4.2}$$

yukarıdaki gibidir (Kenmotsu 1972).

Sonuç 2.4.1. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifold, M'nin bir Riemann eğrilik tensörü R ve ∇'da M üzerinde tanımlanan bir Riemann konneksiyon olmak üzere aşağıdakiler yazılır(Kenmotsu 1972).

$$(\nabla_{X_1}\eta)(X_2) = g(X_1, X_2) - \eta(X_1)\eta(X_2) \tag{2.4.3}$$

$$\eta(R(X_1, X_2)X_3) = \eta(X_2)g(X_1, X_3) - \eta(X_1)g(X_2, X_3) \tag{2.4.4}$$

Sonuç 2.4.2. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifold ise S, M'nin Ricci tensörü olmak üzere;

$$S(X_1, \xi) = -(n-1)\eta(X_1) \tag{2.4.5}$$

eşitliği yazılır (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.4.1. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifold ise S, M'nin Ricci tensörü olmak üzere;

$$S(\phi X_1, \phi X_2) = S(X_1, X_2) + (n-1)\eta(X_1)\eta(X_2)$$

şeklindedir (Jun,Chand ve Pathak 2005).

Teorem 2.4.2. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifold, R'de M'nin Riemann eğrilik tensörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2)\phi X_3 - \phi R(X_1, X_2)X_3 \\ &= g(X_2, X_3)\phi X_1 - g(X_1, X_3)\phi X_2 + g(X_1, \phi X_3)X_2 - g(X_2, \phi X_3)X_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\phi X_1, \phi X_2)X_3 \\ &= R(X_1, X_2)X_3 + g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2 + g(X_2, \phi X_3)\phi X_1 \\ &\quad - g(X_1, \phi X_3)\phi X_2 \end{aligned}$$

eşitliği yazılır.(Kenmotsu 1972).

Tanım 2.4.3. (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısına sahip $(2n+1)$- boyutlu değme metrik manifold M olsun. M'nin Ricci tensörü $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için; $a, b: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere

$$S(X_1, X_2) = ag(X_1, X_2) + b\eta(X_1)\eta(X_2)$$

formunda ise M'ye bir ***η*-Einstein manifoldu** denir (Blair 1976).

Teorem 2.4.3. M, boyutu $n = 2m+1$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M, bir η- Einstein manifold ise $a + b = -(n-1)$ dir (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.4.4. M, boyutu $n = 2m+1$ olan bir η-Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer a ve b'den biri sabit ise, M bir Einstein manifolddur (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.4.5. M, boyutu $n = 2m+1$ olan bir η-Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Hong,Özgür ve Tripathi 2006).

i) M manifoldunun Ricci tensörü η-paraleldir.

ii) M,$-n(n-1)$ sabit eğrilikli bir manifolddur.

iii) M, Ricci tensörü $S(X_1, X_2) = -(n-1)g(X_1, X_2)$ olarak tanımlı bir Einstein manifolddur.

BÖLÜM 3

SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİYONU İLE KENMOTSU MANİFOLDLARIN BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Konneksiyon kavramı, M bir manifold, X, M üzerinde bir vektör alanı ve γ bu manifold üzerinde bir eğri olsun. X vektör alanının γ eğrisi boyunca sabit olup olmadığına karar verebilir miyiz? Sorusunun cevabını vermemize yardımcı olur. Afin konneksiyon tanımından görüldüğü üzere bir afin konneksiyon, M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına dönüştürmektedir (Şahin, 2012).

Schouten-van Kampen konneksiyonu, holomorfik olmayan manifoldlar üzerinde çalışmak için tanıtılmıştır. Afin konneksiyon ile donatılmış diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde bir çift tamamlayıcı dağılımı parallelik ile korur (Schouten, Van Kampen, 1930). Daha sonra Olszak, Schouten -van Kampen konneksiyonunu hemen hemen kontakt metrik yapılara adapte etti ve bu konneksiyonla hemen hemen kontakt metrik yapılar üzerinde eğrilik özelliklerini kurdu (Olszak, 2013).

Bu kısımda Kenmotsu manifoldlarının bazı eğrilik şartlarının Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ilişkisi verilecektir. Bunun için önce yine Kenmotsu manifoldlarının birtakım özelliklerine değinilecek ve ardından Schouten-van Kampen konneksiyonu ile Levi-Civita konneksiyonları arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 3.1. M^n, n boyutlu diferansiyellenebilen g Riemann metriğine sahip bir manifold olsun. ∇, M^n üzerinde Levi-Civita konneksiyonunu, ∇^*'da herhangi bir lineer konneksiyonu göstersin. M^n üzerinde herhangi bir π_j vektör bileşeni için ∇^* konneksiyonunun burulma tensörü

$$T_{ki}^{l} = \delta_k^l \pi_k$$

şeklinde tanımlanırsa bu konneksiyona **semi-simetrik konneksiyon** denir (Yano, K.1970).

Teorem 3.1. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifold semi-simetrik ise, -1 negatif sabit eğriliklidir (Kenmotsu 1972).

Teorem 3.2. M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu Ricci semi-simetrik ise, bir Einstein manifolddur (Jun,Chand ve Pathak 2005).

İspat: M, boyutu $n = 2m + 1$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun ve $R(X_1, X_2).S = 0$ şartını sağlasın. Böylece

$$(R, S)(X_1, X_2, U, V) = -S(R(X_1, X_2)U, V) - S(U, R(X_1, X_2)V) = 0 \tag{3.1}$$

dir.(3.1) denkleminde $U = \xi$ alınırsa

$$S(R(X_1, X_2)\xi, V) + S(\xi, R(X_1, X_2)V) = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir ve burada da (2.4.1) ve (2.4.5) eşitlikleri uygulanırsa

$$\eta(X_1)S(X_2, V) - \eta(X_2)S(X_1, V) - (n - 1)\eta(R(X_1, X_2)V) = 0$$

elde edilir ve burada da $\eta(R(X_1, X_2)V)$ yerinde (2.4.4) uygulanırsa

$$\eta(X_1)S(X_2, V) - \eta(X_2)S(X_1, V) - (n - 1)[\eta(X_2)g(X_1, V) - \eta(X_1)g(X_2, V)] = 0 \tag{3.3}$$

eşitliğine ulaşılır.(3.3) denkleminde$\chi = \xi$ alınır.$\eta(\xi) = 1, \eta(X_1) = g(X_1, \xi)$ ve $g(\phi X_1, \phi X_2) = g(X_1, X_2) - \eta(X_1)\eta(X_2)$ uygulanır ve gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa

$$S(X_2, V) + (n - 1)\eta(X_2)\eta(V) - (n - 1)[\eta(X_2)\eta(V) - g(X_2, V)] = 0$$

eşitliği görülür ve

$$S(X_2, V) = -(n - 1)g(X_2, V) \tag{3.4}$$

elde edilir. Böylece M, bir Einstein manifolddur.

Sonuç 3.1. M, $(n = 2m + 1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu semi-simetrik ise, bir Einstein manifolddur (Jun, Chand ve Pathak 2005).

İspat: $R(X_1, X_2)R = 0$ ise $R(X_1, X_2)S = 0$ olacağından, üstteki bilgiden bu sonuca ulaşılır.

Teorem 3.3. M, boyutu $(n = 2m + 1)$-olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu Ricci recurrent ise, bir Einstein manifolddur (Jun,Chand ve Pathak 2005).

İspat: M, boyutu $(n = 2m + 1)$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. $g(QX_1, X_2) = S(X_1, X_2)$olmak üzere, bu manifold üzerinde $f^2 = g(Q, Q)$ şartını sağlayan bir f fonksiyonu tanımlayalım.

$$X_2(f^2) = X_2[g(Q, Q)] = 2g\left(\nabla_{X_2} Q, Q\right) \tag{3.5}$$

ve M, Ricci recurrent olduğundan $\left(\nabla_{X_1} S\right)(X_2, X_3) = \alpha(X_1)S(X_2, X_3)$ eşitliğinden

$$X_2(f^2) = 2f^2\alpha(X_2) \tag{3.6}$$

yazılır. Aynı zamanda, $X_2(f^2) = 2f(X_2 f)$ olduğundan,

$$f(X_2 f) = f^2 \alpha(X_2) \tag{3.7}$$

elde edilir. Bu da bize,

$$X_2 f = f\alpha(X_2) \neq 0 \tag{3.8}$$

olduğunu gösterir (3.8) eşitliğinden,

$$X_1(X_2 f) - X_2(X_1 f) = \{X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1)\}f \tag{3.9}$$

elde edilir. Buradan

$$\{\nabla_{X_1}\nabla_{X_2} - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1} - \nabla_{[X_1,X_2]}\}f$$
$$= \{X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha[X_1, X_2]\}f \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu denklemin sol tarafının sıfıra eşit olması ve M üzerinde $f \neq 0$ olması neticesinde

$$d_\alpha(X_1, X_2) = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. Bu da α, 1-formunun kapalı olduğunu gösterir. $(\nabla_{X_1} S)(X_2, X_3) = \alpha(X_1)S(X_2, X_3)$ eşitliğinden, $(\nabla_{X_2} S)(U, V) = \alpha(X_2)S(U, V)$ olduğundan,

$$(\nabla_{X_1}\nabla_{X_2} S)(U, V) = \{X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1)\}S(U, V) \tag{3.12}$$

dır. Böylece (3.11) eşitliğinden

$$(R(X_1, X_2)S)(U, V) = 2d_\alpha(X_1, X_2)S(U, V) = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Böylece Ricci recurrent bir manifoldun, Ricci semi-simetrik olduğu görülür.

Teorem 3.4. M, $n > 3$, boyutu $(n = 2m + 1)$ olan bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M konformal flat (düz) ise, -1 negatif sabit eğrilikli bir manifolddur (Kenmotsu 1972).

Buraya kadar Levi-Civita konneksiyonu ile Kenmotsu manifoldlarına dair birtakım eğrilik şartlarını gördük buradan itibaren de Kenmotsu manifoldlarının bazı eğrilik şartlarının Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ilişkisini verilecek ve ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ∇ Levi-Civita konneksiyonları arasındaki bağlantıya da değinilecektir.

$$\nabla^*_{X_1} X_2 = \nabla_{X_1} X_2 - \eta(X_2)\nabla_{X_1}\xi + (\nabla_{X_1}\eta)(X_2)\xi \tag{3.14}$$

(3.14) nolu denklemin özel hali,

$$\nabla^*_{X_1} X_2 = \nabla_{X_1} X_2 + g(X_1, X_2)\xi - \eta(Y)X_1 \tag{3.15}$$

$X_2 = \xi$ yerine alalım.

$$\nabla^{*}_{X_1}\xi = 0 \tag{3.16}$$

Şimdi (3.15)'i kullanarak R^* Riemann eğrilik tensörünü aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$R^*(X_1, X_2)X_3 = R(X_1, X_2)X_3 + g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2 \tag{3.17}$$

(3.17)'de $X_3 = \xi$ yerine yazalım ve (2.4.1) eşitliğini göz önüne alalım

$$R^*(X_1, X_2)\xi = R(X_1, X_2)\xi + \eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2$$

$$\eta(X_1)X_2 - \eta(X_2)X_1 + \eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2 = 0$$

$R^*(X_1, X_2)\xi = 0 \Rightarrow \eta(R^*(X_1, X_2)\xi) = 0$' dır.

Bu durumda;

$$R^*(X_1, X_2)\xi = 0 \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.17)'nin izini alarak ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuyla Kenmotsu manifoldunun Ricci tensörü S^* aşağıdaki gibi bulunur.

$$S^*(X_2, X_3) = S(X_2, X_3) + 2ng(X_2, X_3) \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} g(Q^*X_2, X_3) &= g(QX_2, X_3) + 2ng(X_2, X_3) \\ &= g(QX_2, X_3) + g(2nX_2, X_3) \\ &= g(QX_2 + 2nX_2, X_3) \\ g(Q^*X_2, X_3) &= g(QX_2 + 2nX_2, X_3) \end{aligned}$$

olur.

$$Q^*X_2 = QX_2 + 2nX_2 \tag{3.20}$$

(3.19)'un izini alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$r^* = r + 2n(2n + 1) \tag{3.21}$$

Tanım 3.2. M bir Kenmotsu manifoldu ve manifold üzerindeki Levi- Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü R olsun. Bu durumda

$$g(R(X_1, X_2)X_3, U) = k\{g(X_2, X_3)g(X_1, U) - g(X_1, X_3)g(X_2, U)\} \qquad \textit{(k, keyfi sabit)}$$

ise manifolda **sabit eğriliklidir** denir.

Eğer (3.18) denkleminde $R^* = 0$ alırsak;

$R(X_1, X_2)X_3 = -[g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2]$, $k = -1$ dir. Böylece;

$$R(X_1, X_2, X_3, U) = -\{g(X_2, X_3)g(X_1, U) - g(X_1, X_3)g(X_2, U)\} \tag{3.22}$$

olur.

Buradan, Kenmotsu manifoldu ve manifold üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu sabit eğriliklidir ve bu eğrilik -1 dir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5. M bir Kenmotsu manifoldu ve manifold üzerindeki Schouten-van Kampen konneksiyonunun eğrilik tensörü ise $R^* = 0$ ise Kenmotsu manifoldu lokal olarak $H^{(2n+1)}(-1)$ hiperbolik uzaya izometriktir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Tanım 3.3. $T_x(M)$ tanjant uzayındaki her p düzlemi için $K(p)$ kesitsel eğriliği

$$K(p) = \frac{R(X_1, X_2, X_2, X_1)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2}$$

şeklinde tanımlanır (Barman, De, 2015). Burada $\{X_1, X_2\}$ p için bir ortonormal tabandır. $K\ (p)$ ortonormal taban seçiminden bağımsızdır.

(3.22)'de $Z = X_1, U = X_2$ alarak

$$R(X_1, X_2, X_1, X_2) = \{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)g(X_1, X_2)\} \tag{3.23}$$

elde edilir ve bu eşitlikten aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{R(X_1, X_2, X_2, X_1)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2} \\ &= -\frac{R(X_1, X_2, X_1, X_2)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

olur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.6. Bir Kenmotsu manifoldunda genelleştirilmiş Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip eğrilik tensörü ∇^* sıfıra eşitse o zaman kesitsel eğriliği -1'dir.$(X, Y \in \xi^{\perp})$

Şimdi, ilginç invaryant dairesel eğrilik tensörü tanımlayalım. Bu tanımlanan C^* yeni Schouten-Van Kampen konneksiyonu olur (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

3.1. Kenmotsu Manifoldu İçin Concircular (konsirkular) Eğrilik Tensörü

Tanım 3.1.1. Concircular (konsirkular) transformasyonunun bir invaryantı concircular eğrilik tensörüdür. Bu C^* concircular eğrilik tensörü (Yano, 1940), ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile aşağıdaki şekilde tanımlanır. M üzerindeki tüm X, Y, Z vektör alanları için,

$$C^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \qquad (3.1.1)$$

dir.

(3.1.1) denkleminde X_1 ve X_2'yi yer değiştirirsek,

$$C^*(X_2, X_1)X_3 = R^*X_3 - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_1, X_3)X_2 - g(X_2, X_3)X_1\} \qquad (3.1.2)$$

elde ederiz.

(3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerini toplar ve $R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_1)X_3 = 0$'i kullanırsak;

$$C^*(X_1, X_2)X_3 + C^*(X_2, X_1)X_3 = 0 \qquad (3.1.3)$$

elde edilir.

(3.17) ve (3.1.1) eşitlikleri ve ∇ konneksiyonu ile $R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 = 0$ 1.Bianchi Özdeşliğini kullanarak

$$C^*(X_1, X_2)X_3 + C^*(X_2, X_1)X_3 + C^*(X_3, X_1)X_2 = 0 \qquad (3.1.4)$$

bulunur. Böylece (3.1.3) ve (3.1.4) ten görünür ki Schouten-van Kampen konneksiyonu ile bir Kenmotsu manifoldunun concircular eğrilik tensörü ters simetrik ve devirlidir.

Kabul edelim ki M manifoldu Schouten-van Kampen konneksiyonuna göre concircularly flat olsun. Yani, $C^*(X_1, X_2)X_3 = 0$ olsun. Bu durumda (3.1.1) denkleminden

$$R^*(X_1, X_2)X_3 = \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)X_1 - g(X_1, X_3)X_2\} \tag{3.1.5}$$

dır. Bu denklemin ξ ile iç çarpımını alırsak

$$g(R^*(X_1, X_2)X_3, \xi) = \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)g(X_1, \xi) - g(X_1, X_3)g(X_2, \xi)\}$$

$$g(R^*(X_1, X_2)X_3, \xi) = \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} \tag{3.1.6}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte (2.3.1), (2.4.4), (3.18) ve (3.21) denklemleri kullanırsak;

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2)\} = 0 \tag{3.1.7}$$

elde edilir.

Buradan da M'nin skaler eğriliği ya $r = -2n(2n+1)$'dir ya da

$$g(X_2, X_3)\eta(X_1) - g(X_1, X_3)\eta(X_2) = 0 \tag{3.1.8}$$

olduğu bulunur. Burada $Y = \xi$ alırsak ve $\eta(\xi) = 1$ eşitliğini kullanırsak

$$\eta(X_1)\eta(X_3) - g(X_1, X_3) = 0 \tag{3.1.9}$$

(3.1.9)'da X_1'i QX_1 ile değiştirirsek ve $Q\xi = -2n\xi$ denklemi kullanarak

$$S(X_1, X_3) = -2n\eta(X_1)\eta(X_3) \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verilebilir.

Teorem 3.1.1. Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip bir concircularly flat Kenmotsu manifoldunun ya skaler eğriliği $-2n(2n+1)$ dir ya da manifold η-Einstein manifoldunun özel bir halidir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Biliyoruz ki bir manifoldun η-Einstein manifold olması için $S(X_1, X_2) = ag(X_1, X_2) + b\eta(X_1)\eta(X_2)$ eşitliğini sağlaması gerekmekteydi. Burada η-Einstein manifoldunun özel bir halidir denmesinin sebebi a katsayısının sıfır olmasıdır.

Tanım 3.1.2. $C^*(X_1, X_2)\xi = 0$ ise bir Kenmotsu manifoldu üzerindeki ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ξ**- concircularly düzdür** denir.

Kabul edelim ki Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip M manifodu ξ-concircularly düz, yani $C^*(X_1, X_2)\xi = 0$ olsun. (3.1.1) denklemden aşağıdakini yazabiliriz.

$$C^*(X_1, X_2)\xi = R^*(X_1, X_2)\xi - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} = 0$$

$$R^*(X_1, X_2)\xi = \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} \tag{3.1.11}$$

olur. $R^*(X_1, X_2)\xi = 0$ ve $r^* = r + 2n(2n+1)$ denklemlerini göz önüne aldığımızda ,

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} = 0 \tag{3.1.12}$$

bulunur, burada $Y = \xi$ alınırsa ve $\eta(\xi) = 1$ denklemi kullanılırsa

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{X_1 - \eta(X_1)\xi\} = 0 \tag{3.1.13}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin U ile iç çarpımını alırsak;

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(X_1, U) - \eta(X_1)\eta(U)\}$$
$$= 0 \tag{3.1.14}$$

elde edilir. Böylece diyebiliriz ki ya M'nin skaler eğriliği $r = -2n(2n+1)$ dir ya da

$$g(X_1, U) - \eta(X_1)\eta(U) = 0 \tag{3.1.15}$$

dir. Yukarıdaki denklemde X_1'i QX_1 ile değiştirelim ve $Q\xi = -2n\xi$ denklemini kullanalım

$$S(X_1, U) = -2n\eta(X_1)\eta(U) \tag{3.1.16}$$

elde edilir ve böylece aşağıdaki teoremi yazılabilir.

Teorem 3.1.2. Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip ξ- concircularly flat Kenmotsu Manifoldunun ya skaler eğriliği $-2n(2n+1)$ dir, ya da manifold η-Einstein manifoldun özel bir tipidir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Tanım 3.1.3. ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldu, M üzerindeki herhangi X_1, X_2, X_3 vektör alanları için

$$g(C^*(\phi X_1, X_2)X_3, \phi W) = 0 \qquad (3.1.17)$$

eşitliğini sağlıyorsa **pseudo-concircularly düzdür** denir.

(3.1.1) ve (3.1.17) denklemleri göz önüne alındığında,

$$g\left(R^*(\phi X_1, X_2)X_3 - \frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)\phi X_1 - g(\phi X_1, X_3)X_2\}, \phi W\right) = 0 \qquad (3.1.18)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte (3.17) ve (3.21)'i kullanarak;

$$g(R(\phi X_1, X_2)X_3, \phi W) - \frac{r}{2n(2n+1)}\{g(X_2, X_3)g(\phi X_1, \phi W)\}$$

$$-g(\phi X_1, X_3)X_2, g(X_2, \phi W) = 0 \qquad (3.1.19)$$

bulunur. $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}\}$ M'deki vektör alanlarının yerel bir ortonormal tabanı olsun. Bu durumda (3.1.19)'da $X_2 = X_3 = e_i$ yazarak ve $1 \leq i \leq 2n+1$ için i'ye göre toplamını alarak,

$$S(\phi X_1, \phi W) = \frac{r}{2n+1} g(\phi X_1, \phi W) \qquad (3.1.20)$$

elde edilir. Burada (2.3.1) ve Kenmotsu manifoldları için sağlanan $S(\phi X_1, \phi Y) = S(X_1, Y) + 2n\eta(X_1)\eta(Y)$ eşitliğini kullanarak,

$$S(X_1, W) = \frac{r}{2n+1} g(X_1, W) - \left\{2n + \frac{r}{2n+1}\eta(X_1)\eta(W)\right\} \qquad (3.1.21)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yukarıdaki eşitlikte tekrar $X = W = e_i$ yazarak ve $1 \leq i \leq 2n+1$ için i'ye göre toplam alırsak

$$r = -2n(2n+1) \qquad (3.1.22)$$

bulunur. (3.1.21) ve (3.1.22) sayesinde,

$$S(X_1, W) = -2ng(X_1, W) \qquad (3.1.23)$$

olduğu görülür. Buradan da M için bir Einstein manifoldudur diyebiliriz. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.3. Schouten-van Kampen konneksiyonuyla bir M Kenmotsu manifoldunun pseudo concircularly düzdür ancak ve ancak $S(X_1, W) = -2ng(X_1, W)$ dır (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Tanım 3.1.4. ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip bir Kenmotsu manifoldu, M üzerindeki herhangi X_1, X_2 vektör alanları için $C^*(X_1, X_2).\phi = 0$ eşitliğini sağlıyorsa **ϕ-concircularly (konsirkular) semi-simetriktir** denir (Yıldız, De, 2012).

Şimdi, Schouten-van Kampen konneksiyonuyla Kenmotsu manifoldu ϕ-concircularly semisimetrik olsun. Böylece,

$$(C^*(X_1, X_2), \phi)X_3 = C^*(X_1, X_2)\phi X_3 - \phi C^*(X_1, X_2)X_3 = 0 \tag{3.1.24}$$

Bu denklemde $Z = \xi$ yerine alırsak

$$\phi(C^*(X_1, X_2)\xi) = 0 \tag{3.1.25}$$

elde edilir. (3.1.25)'de (3.1.1) ve Kenmotsu manifoldları için geçerli olan $R(X_1, X_2)\xi = \eta(X_1)X_2 - \eta(X_2)X_1$ denklemleri kullanılarak

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{\eta(X_1)\phi X_2 - \eta(X_2)\phi X_1\} = 0 \tag{3.1.26}$$

Burada X_2 yi ξ ile X_1 i ϕX_1 ile yer değiştirelim ve (2.3.1) eşitliğini kullanalım. Böylece

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{X_1 - \eta(X_1)\xi\} = 0 \tag{3.1.27}$$

bulunur. U ile yukarıdaki denklemin iç çarpımını alırsak,

$$\frac{r + 2n(2n+1)}{2n(2n+1)}\{g(X_1, U) - \eta(X_1)\eta(U)\} = 0 \tag{3.1.28}$$

bu da, M için ya skaler eğriliğinin $r = -2n(2n+1)$ dir, ya da

$$g(X_1, U) - \eta(X_1)\eta(U) = 0 \tag{3.1.29}$$

olduğunu gösterir. Şimdi burada X_1'i QX_1 ile değiştirip $Q\xi = -2n\xi$ gerçeği kullanarak,

$$S(X_1, U) = -2n\eta(X_1)\eta(U) \tag{3.1.30}$$

bulunur ve böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.4. Schouten-van Kampen konneksiyonuna sahip ϕ-concircularly (konsirkular) semi-simertik Kenmotsu Manifoldunun ya skaler eğriliği $-2n(2n+1)$

dir, ya da manifold η-Einstein manifoldun özel bir tipidir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
(R^*(X_1,X_2),C^*)(U,V,W) \quad = \quad & R^*(X_1,X_2)C^*(U,V)W - C^*(R^*(X_1,X_2)U,V)W \\
& -C^*(U,R^*(X_1,X_2)V)W - C^*(U,V)R^*(X_1,X_2)W
\end{aligned}
\tag{3.1.31}
$$

dir. (3.1.31) denkleminde (3.1.1) kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
(R^*(X_1,X_2),C^*)(U,V,W) \quad = \quad & R^*(X_1,X_2)R^*(U,V)W - R^*(R^*(X_1,X_2)U,V)W \\
& -R^*(U,R^*(X_1,X_2)V)W - R^*(U,V)R^*(X_1,X_2)W \\
& +\frac{r^*}{2n(2n+1)}\{g(R^*(X_1,X_2)V,W)U + g(V,R^*(X_1,X_2)W)U \\
& -g(R^*(X_1,X_2)U,W)V - g(U,R^*(X_1,X_2)W)V\}
\end{aligned}
\tag{3.1.32}
$$

R^* eğrilik tensörünün simetrik özelliklerinden (Pathak, De, 2002).

$$
\begin{aligned}
(R^*(X_1,X_2),C^*)(U,V,W) \quad = \quad & R^*(X_1,X_2)R^*(U,V)W - R^*(R^*(X_1,X_2)U,V)W \\
& -R^*(U,R^*(X_1,X_2)V)W - R^*(U,V)R^*(X_1,X_2)W
\end{aligned}
\tag{3.1.33}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$
(R^*(X_1,X_2),C^*)(U,V,W) = R^*(X_1,X_2)R^*(U,V)W \tag{3.1.34}
$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.5. M Kenmotsu manifoldu ve üzerindeki konneksiyon Schouten-van Kampen konneksiyonu olsun. Böylece $R^*.C^* = R^*.R^*$dır (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

3.2. Kenmotsu Manifoldu İçin Projektif Eğrilik Tensörü

Tanım 3.2.1. ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile P^* Projektif eğrilik tensörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Yano, Kon, 1984).

$$P^*(X_1, X_2)X_3 = R^*(X_1, X_2)X_3 - \frac{1}{2n}\{S^*(X_2, X_3)X_1 - S^*(X_1, X_3)X_2\} \tag{3.2.1}$$

Bu denklemde X_1 ve X_2 ‘ yi yer değiştirerek,

$$P^*(X_2, X_1)X_3 = R^*(X_2, X_1)X_3 - \frac{1}{2n}\{S^*(X_1, X_3)X_2 - S^*(X_2, X_3)X_1\} \tag{3.2.2}$$

(3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerini toplayarak ve $R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_1)X_3 = 0$ olduğunu kullanarak,

$$P^*(X_1, X_2)X_3 + P^*(X_2, X_1)X_3 = 0 \tag{3.2.3}$$

olduğu görülür. (3.17), (3.2.1) ve ∇ konneksiyonu ile $R(X_1, X_2)X_3 + R(X_2, X_3)X_1 + R(X_3, X_1)X_2 = 0$ 1. Bianchi Özdeşliğini kullanarak

$$P^*(X_1, X_2)X_3 + P^*(X_2, X_1)X_3 + P^*(X_3, X_1)X_2 = 0 \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki son iki denklem gösterir ki Schouten-van Kampen konneksiyonu ile Kenmotsu manifoldunun projektif eğrilik tensörü ters simetrik ve devirlidir.

Şimdi, (3.2.1)’de $Z = \xi$ yazalım.

$$P^*(X_1, X_2)\xi = 0 \tag{3.2.5}$$

olduğu görülür. Böylece, şu teoremi verilebilir.

Teorem 3.2.1. M, Schouten-van Kampen ile bir Kenmotsu manifoldu olsun eğer $P^*(X_1, X_2)\xi = 0$ ise M manifoldu ξ-Projectively düzdür (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Tanım 3.2.2. ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuyla bir Kenmotsu manifoldu M’deki herhangi X_1, X_2 vektör alanları için

$$P^*(X_1, X_2).\phi = 0 \tag{3.2.6}$$

şartını sağlıyorsa M'ye **ϕ-projectively semi-simetriktir** denir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Şimdi, (3.2.6)'yı

$$(P^*(X_1,X_2).\phi)X_3 = P^*(X_1,X_2)\phi X_3 - \phi P^*(X_1,X_2)X_3 = 0 \tag{3.2.7}$$

olarak yazabiliriz.

Yukarıda, (3.2.1), (3.17) ve (3.19) kullanılarak,

$$(R(X_1,X_2)\phi)X_3 - \phi R(X_1,X_2)X_3 - \frac{1}{2n}\{S(X_2,\phi X_3)X_1$$

$$-S(X_1,\phi X_3)X_2 + S(X_1,X_3)\phi X_2 - S(X_2,X_3)\phi X_1\} = 0 \tag{3.2.8}$$

elde edilir. (3.2.8)'de X_2 yerine ξ yazılırsa ve (2.4.1) ve Kenmotsu manifoldları için $S(X_1,\xi) = -2n\eta(X_1)$ olduğu gerçeği kullanılarak

$$S(X_1,\phi X_3)\xi = -2ng(X_1,\phi X_3)\xi \tag{3.2.9}$$

dir. ξ iç çarpım alarak ve X_1'i QX_1 ile değiştirerek, (2.3.3) ve $S(\phi X_1,\phi X_2) = S(X_1,X_2) + 2n\eta(X_1)\eta(X_2)$ gerçeğini kullanarak (3.2.9) aşağıdakiler elde edilir.

$$S(X_2,X_3) = -2ng(X_2,X_3) \tag{3.2.10}$$

ve

$$r = -2n(2n+1) \tag{3.2.11}$$

Tekrar (3.2.1)'de (3.2.11)'i yazalım. Buradan

$$P^*(X_1,X_2)X_3 = R(X_1,X_2)X_3 + \{g(X_2,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)X_2\} \tag{3.2.12}$$

karşımıza çıkar. Böylece şunlar söylenebilir:

Teorem 3.2.2. M, Schouten-van Kampen konneksiyonuyla bir Kenmotsu Manifoldu olsun. M, ϕ-projectively semi-simetriktir ancak ve ancak $S(X_2,X_3) = -2ng(X_2,X_3)$ dir. Dahası eğer $P^* = 0$ ise M, $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzaya izomorfiktir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

3.3. Kenmotsu Manifoldu İçin Weyl Konformal Eğrilik Tensörü

Tanım 3.3.1. Bir Riemann manifoldunda,

$$C^*(X_1,X_2)X_3 = R^*(X_1,X_2)X_3 - \frac{1}{2n-1}\{S^*(X_2,X_3)X_1 - S^*(X_1,X_3)X_2 + g(X_2,X_3)Q^*X_1 - g(X_1,X_3)Q^*X_2\} + \frac{r^*}{2n(2n-1)}\{g(X_2,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)X_2\} \quad (3.3.1)$$

eşitliği ile verilen C^* tensörüne ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuyla, **Weyl konformal eğrilik tensörü** denir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Yukarıdaki tanımda verilen denklemde (3.17), (3.19), (3.20), (3.21)'i yerine yazalım. $\forall\, X_1, X_2, X_3$ vektör alanları için

$$C^*(X_1,X_2)X_3 = K(X_1,X_2)X_3 \quad (3.3.2)$$

olur. Böylece şu teoremi verilebilir:

Teorem 3.3.1. Kenmotsu manifoldunun Wely konformal eğrilik tensörü Levi-Civita konneksiyonu için de Schouten-van Kampen konneksiyonu için de aynıdır (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Tanım 3.3.2. ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonuyla Kenmotsu manifoldu için R^* eğrilik tensörü

$$(\nabla^*_W R^*)(X_1,X_2)X_3 = A(W)R^*(X_1,X_2)X_3 \quad (3.3.3)$$

şartını sağlanıyorsa manifolda **recurrent** denir.

Burada (3.3.3)'ü kullanarak,

$$\nabla^*_W R^*(X_1,X_2)X_3 - R^*(\nabla^*_W X_1,X_2)X_3 - R^*(X_1,\nabla^*_W X_2)X_3 - R^*(X_1,X_2)\nabla^*_W X_3 = A(W)R^*(X_1,X_2)X_3 \quad (3.3.4)$$

eşitliğini yazabiliriz ve (3.15), (3.17) ve (3.19) kullanılarak

$$g(W,R(X_1,X_2)X_3)\xi \quad -g(W,X_1)R(\xi,X_2)X_3 - g(W,X_2)R(X_1,\xi)X_3 - g(W,X_3)R(X_1,X_2)\xi$$
$$-\eta(R(X_1,X_2)X_3)W + \eta(X_1)R(W,X_2)X_3 + \eta(X_2)R(X_1,W)X_3 + \eta(X_3)R(X_1,X_2)W$$
$$-\eta(W)\{\phi R(X_1,X_2)X_3 - R(\phi X_1,X_2)X_3 - R(X_1,\phi X_2)X_3 - R(X_1,X_2)\phi X_3\}$$
$$= A(W)\{g(X_2,X_3)X_1 - g(X_1,X_3)X_2\} \tag{3.3.5}$$

yazılabilir. Z'yi ξ ile değiştirerek ve (2.3.1), (2.4.1), $R(\xi,X_1)X_2 = \eta(X_2)X_1 - g(X_1,X_2)\xi$ ve $\eta(R(X_1,X_2)X_3) = g(X_1,X_3)\eta(X_2) - g(X_2,X_3)\eta(X_1)$ kullanalım.

$$A(W)\{\eta(X_2)X_1 - \eta(X_1)X_2\} = g(W,X_2)X_1 - g(W,X_1)X_2 + R(X_1,X_2)W \tag{3.3.6}$$

Burada U ile bir iç çarpım alarak,

$$A(W)\{\eta(X_2)g(X_1,U) - \eta(X_1)g(X_2,U)\} = g(W,X_2)g(X_1,U) - g(W,X_1)g(X_2,U) + R(X_1,X_2,W,U) \tag{3.3.7}$$

$\{e_1,e_2,e_{3,\ldots,}e_{2n+1}\}$ M'deki vektör alanlarının yerel bir ortonormal tabanı olsun. O zaman

$X_1 = U = e_i$ (3.3.7)'de yerine koyup $1 \leq i \leq 2n+1$ için i'ye göre toplam alırsak,

$$S(X_2,W) = -2n\{g(X_2,W) + \eta(X_2)A(W)\} \tag{3.3.8}$$

elde ederiz.

A ilişkili 1-formunun η ilişkili 1-formuna eşit olduğunu varsayalım, (3.3.8)'den

$$S(X_2,W) = -2n\{g(X_2,W) + \eta(X_2)\eta(W)\} \tag{3.3.9}$$

yazılır. Böylece şu denilebilir:

Teorem 3.3.2. Schouten-van Kampen konneksiyonuyla bir Kenmotsu manifoldun eğrilik tensörü kovaryant sabit ise manifold recurrenttır ve A ilişkili 1-formu η ilişkili 1-formuna eşittir. Böylece manifold bir η-Einstein manifoldudur (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

Örnek 3.3.1. Burada Schouten-van Kampen konneksiyonuyla 5 boyutlu Kenmotsu manifoldu kullanılarak örnek verilecektir.

Beş boyutlu $M = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5\}$ manifoldunu ele alalım, burada (x, y, z, u, v) $\mathbb{R}^5$'teki standart koordinatlardır. Vektör alanları;

$$E_1 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial x}\ , \quad E_2 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial y}\ , \quad E_3 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial z}\ , \quad E_4 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial u}, \quad E_5 = e^{-v}\frac{\partial}{\partial v}$$

M manifoldunun her noktasında lineer bağımsızdır. g, Riemann metriği olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$g_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$$

η, herhangi bir $Z \in \chi(M)$ için $\eta(Z) = g(Z, E_3)$ ile tanımlanan 1-form olsun. ϕ, (1,1) tensör alanı olsun ve $\phi E_1 = E_3$, $\phi E_2 = E_4$, $\phi E_3 = -E_1$,$\phi E_4 = -E_2$, $\phi E_5 = 0$ olsun. ϕ ve g nin lineerliğini kullanarak, herhangi $Z, U \in \chi(M)$.için

$\eta(E_5) = 1$, $\phi^2(Z) = -Z + \eta(Z)E_5$, $g(\phi Z, \phi U) = g(Z, U) - \eta(Z)\eta(U)$,

dir. Ayrıca $E_5 = \xi$, (ϕ, ξ, η, g) M üzerinde hemen hemen kontakt (değme) metrik yapı tanımlar.

∇, g metriğine göre levi-civita konneksiyonu olsun. Böylece,

$[E_1, E_2] = [E_1, E_3] = [E_1, E_4] = [E_2, E_3] = 0, [E_1, E_5] = E_1,$

$[E_4, E_5] = E_4, [E_2, E_4] = [E_3, E_4] = 0,\ \ [E_2, E_5] = E_2,\ \ [E_3, E_5] = E_3\ ,$

g metriğinin ∇ Riemann konneksiyonu, Koszul'un formülüyle verilir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X\big(g(Y, Z)\big) + Y\big(g(Z, X)\big) - Z\big(g(X, Y)\big) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Koszul'un formülüne göre,

$\nabla_{E_1}E_1 = -E_5$, $\nabla_{E_1}E_2 = 0$, $\nabla_{E_1}E_3 = 0, \nabla_{E_1}E_4 = 0\ , \nabla_{E_1}E_5 = E_1$,

$\nabla_{E_2}E_1 = 0\ , \nabla_{E_2}E_2 = -E_5$, $\nabla_{E_2}E_3 = 0, \nabla_{E_2}E_4 = 0\ , \nabla_{E_2}E_5 = E_2$,

$\nabla_{E_3}E_1 = 0\ , \nabla_{E_3}E_2 = 0$, $\nabla_{E_3}E_3 = -E_5$, $\nabla_{E_3}E_4 = 0\ , \nabla_{E_3}E_5 = E_3$,

$\nabla_{E_4}E_1 = 0$, $\nabla_{E_4}E_2 = 0$, $\nabla_{E_4}E_3 = 0, \nabla_{E_4}E_4 = -E_5\ , \nabla_{E_4}E_5 = E_4$,

$\nabla_{E_5}E_1 = 0,\ \nabla_{E_5}E_2 = 0,\ \nabla_{E_5}E_3 = 0, \nabla_{E_5}E_4 = 0\ , \nabla_{E_5}E_5 = 0,$

Ayrıca, aşağıdakileri elde ederiz;

$$\nabla^*_{E_i}E_j = 0\ , i,j = 1,2,3,4,5$$

ve böylece;

$$\left(\nabla^*_{E_i}\phi\right)E_j = 0\ , i,j = 1,2,3,4,5$$

Yukarıdaki ifadelerden, manifold $\xi = E_5$ için (2.3.3) ve Tanım (2.4.1.)'i sağlar. Dolayısıyla manifold bir Kenmotsu manifoldudur. Yukarıdaki sonuçlardan şu sonuçları bulunabilir:

$R(E_1,E_2)E_2 = R(E_1,E_3)E_3 = R(E_1,E_4)E_4 = R(E_1,E_5)E_5 = -E_1,$

$R(E_1,E_2)E_1 = E_2,\ R(E_1,E_3)E_1 = R(E_5,E_3)E_5 = R(E_2,E_3)E_5 = E_3,$

$R(E_2,E_3)E_3 = R(E_2,E_4)E_4 = R(E_2,E_5)E_5 = -E_2,\ R(E_3,E_4)E_4 = -E_3,$

$R(E_2,E_5)E_2 = R(E_1,E_5)E_1 = R(E_4,E_5)E_4 = R(E_3,E_5)E_3 = E_5,$

$R(E_1,E_4)E_1 = R(E_2,E_4)E_2 = R(E_3,E_4)E_3 = R(E_5,E_4)E_5 = E_4.$

ve

$$R^*\left(E_i,E_j\right)E_k = 0\ , \qquad i,j,k = 1,2,3,4,5.$$

Kenmotsu manifoldunun eğrilik tensörünün yukarıdaki ifadelerinden manifoldun sabit kesit eğriliğinin -1 olduğu görülür. Yukarıdaki sonuçları kullanarak Ricci tensörlerini aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} S(E_1,E_1) &= g(R(E_1,E_2)E_2,E_1) + g(R(E_1,E_3)E_3,E_1) + g(R(E_1,E_4)E_4,E_1) \\ &\quad + g(R(E_1,E_5)E_5,E_1) = -4 \end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$S(E_2,E_2) = S(E_3,E_3) = S(E_3,E_3) = S(E_4,E_4) = S(E_5,E_5) = -4 \qquad (3.3.10)$$

ve

$S^*(E_1,E_1) = S^*(E_2,E_2) = S^*(E_3,E_3) = S^*(E_4,E_4) = S^*(E_5,E_5) = 0$

ve

$r = \sum_{i=1}^{5} S(e_i, e_i) = -20$ ve $r^* = \sum_{i=1}^{5} S^*(e_i, e_i) = 0$

Böylece (3.3.10) den Levi-Civita konneksiyonuyla bir manifoldun bir Einstein manifoldu olduğunu kolayca doğrulanabilir (Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019).

BÖLÜM 4

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk bölümde giriş kısmı yer almaktadır. Bu bölümde geometri ve manifold teorisi hakkında tarihsel gelişim süreci anlatılmaktadır. İkinci bölümde temel kavramlara yer verilmiş, özel olarak Riemann manifoldları, hemen hemen değme yapı ve hemen hemen değme manifoldları tanıtılmış ve ardından hemen hemen değme manifoldların bir alt sınıfı olan Kenmotsu manifoldları hakkında temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019 yılında yayımladıkları makale üzerine inceleme yapılmıştır. Burada önemli bulunan ve de açık problemlere yer bırakan bazı teoremler ise şöyledir; eğer ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile eğrilik tensörü sıfırsa Kenmotsu manifoldu, $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayına yerel olarak izomorfiktir. Daha sonra ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ξ-concircularly flat, pseudo-concircularly flat ve ϕ-concircularly semi simetrik Kenmotsu manifoldları üzerinde durulmuş ve Kiran Kumar, Nagaraja, Naveenkumar 2019 tarafından ispatlanan $R^*.C^* = R^*.R^*$ olduğu sonucu verilmiştir. Ayrca yine ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile projektif eğrilik tensörü, Weyl projektif eğrilik tensörü ve ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile Kenmotsu manifoldunun recurrent olma şartları üzerine çalışılmıştır ve yukarıda verilen sonuçların sağlandığını göstermek amacıyla ∇^* Schouten-van Kampen konneksiyonu ile 5-boyutlu Kenmotsu manifolduna bir örnek verilmiştir.

Yapılan bu tez çalışmasında orijinal bir sonuç elde edilememiş olmasına rağmen, yapılan detaylı eğrilik incelemesi akıllara birçok açık problem getirmektedir. Bu sorulardan sadece ikisi şöyledir; üzerinde çalışılan bu eğrilikler farklı konneksiyonlar veya farklı manifoldlar üzerinde nasıl sonuçlar doğurur? Örneğin yine aynı konneksiyonla hemen hemen kosimplektik manifoldlar incelense benzer sonuçlar elde edilebilir mi? Gibi sorular akla gelen en temel açık problemlerdir.

Yaptığımız bu çalışmanın matematik ve geometri alanında temel tanımlara farklı konneksiyonlara, Kenmotsu manifoldlarına çalışmak isteyen araştırmacılara iyi bir kaynak oluşturacağını umuyoruz ve yine açık problem arayan araştırmacılara da yol gösterici nitelikte olmasını diliyoruz.

KAYNAKLAR

Barman, A., De, U.C. (2015). Semi-symmetric non-metric connections on Kenmotsu manifolds. *Rom. J. Math. Comput. Sci.*, 5, 13-24.

Chinea, D. Gonzalez, C. (1990). A Classification of Almost Contact Metric Manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Spain.

Hacısalihoğlu, H. H. (1985). Lineer Cebir. *Gazi Üniversitesi Yayınları.*

Hacısalihoğlu, H. H. (1998). Diferensiyel Geometri. *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.* 3. Baskı.

Hong, S., Özgür C., Tripathi, M. M. (2006). On some special classes of Kenmotsu manifolds. *Kuwait J. Sci. Engrg*. 33, no.2, 19-32.

Jun, J. B., De U.C., Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc*. 42, 435-445.

Kiran Kumar, D.L., Nagaraja, H.G., Naveenkumar, S.H. (2019). Some curvature properties of Kenmotsu manifolds with Shouten-van Kampen connection. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov.*Vol.12(61), No. 2, 351-364.

Kiran Kumar, D.L., Nagaraja, H.G., Kumari, D. (2019). Concircular curvature tensor of Kenmotsu manifolds admitting generalized Tanaka-Webster connection. *J. Math. Comput. Sci.* 9 No. 4, 447-462.

Olszak, Z. (2013). The Schouten-van Kampen affine connection adapted to an almost (para) contact metric structure. *Publications de I'Institut Mathematique*. 94, 31-42.

O'Neill B. (1983). Semi Riemannian geometry. *A. Press.* London.

Pathak, G., De, U.C. (2002) On a semi-symetric connection in a Kenmotsu manifold. *Bull. Calcutta Math. Soc*, 94, 319-324.

Patterson, E. M. (1952). Some theorems on Ricci recurrent spaces. *J. London Math. Soc.* 27 287-295.

Schouten, J.A., Van Kampen, E.R. (1930). Zur einbettungs-und krmmungs-theorie nichtholonomer gebilde, *Mathematische Annalen*, 103, 752-783.

Şahin, B. (2012). Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. *Nobel Yayınları*, Ankara.

Yano, K. (1940). Concircular geometry I. Concircular transformations. *Proceedings of imperial Academy*. 16, 195-200.

Yano, K., Kon. M. (1984). Structures on Manifolds. *World Scientific Publishing*. Singapore.

Yano, K. (1970). On semi-symmetric metric connection. *Rev. Roum. Math. Pures Et Appl. Tome XV*. No.9, 1579-1589, Bucarest.

Yıldız, A., De, U. C. (2012). A classification of (k, μ)-contact metric manifolds. *Commun. Korean Math. Soc*. 27, 327-339.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: İlknur PALA TEPECİK
Doğum Yeri	: Bakırköy/İSTANBUL

Eğitim Bilgileri

Lise	: Bakırköy Anadolu Lisesi , İSTANBUL	2012
Lisans	: Matematik Bölümü, Trakya Üniversitesi, Fen Fakültesi	2018
Y.Lisans	: Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü	2022

İş Deneyimleri

2015 – 2016	1. Murat Anadolu Lisesi	(Stajyer Matematik Öğretmeni)
2016 – 2018	Açı Eğitim Kurumları	(Matematik Öğrt.& Müdür Yardımcısı)
2018 – 2019	Bilim Özel Öğretim Kursu	(Matematik & Geometri Öğretmeni)
2019 – 2020	Final Özel Öğretim Kursu	(Matematik & Geometri Öğretmeni)
2020 - 2021	Birebir Kişisel Gelişim Kursu	(Matematik & Geometri Öğretmeni)
2021 – …	İskenderköy Sınav Okulları	(Matematik & Geometri Öğretmeni)

Yabancı Diller

İngilizce