ÖZET

Bu çalışmada Cebir ve Sayılar Teorisinde önemli yere sahip iki temel konuda çalışılmıştır.

Bunlardan birincisi Değerlendirmeler ve Değerlendirmelerin Genişlemeleri, ikincisi de Değerlendirilmiş Gruplardır.

I. Bölümde Değerlendirmeler ve Cisimler ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir.

II. Bölümde Değerlendirmelerin rankları incelenmiş ve bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ cismine cebirsel ve transandant genişlemeleri ele alınmıştır.

III. Bölüm Değerlendirilmiş Gruplar ile ilgili olup, bir grup üzerinde bir değerlendirmenin nasıl tanımlandığı incelenmiş ve bazı özel değerlendirilmiş gruplara yer verilmiştir.

SUMMARY

In this work, it is aimed to research in two important subjects of Algebra and Number Theory.

The first subject is Valuation Theory and the second one is Valuated Groups

In chapter I, pertinent background on Valuations and Field Extensions is given.

In chapter II, the ranks of valuations are studied. Then the transcendental and algebraic extensions of valuations on K to $K(x)$ are given.

In chapter III, Valuated Groups are studied. In this chapter valuations on groups and certain special valuated groups are investigated.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Sayılar teorisinde önemli bir yeri olan değerlendirme teorisi cebirsel fonksiyonlar ve cebirsel sayılar arasındaki ilişkinin sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Dedekind ve Weber'in cebirsel fonksiyon teorisine aritmetik yaklaşımları Riemann yüzeyinin bir noktasında kuvvet serisi açılımlarının elde edilmesi problemini ortaya koymuştur. Böyle bir yaklaşımı p-adic sayılar teorisinde ele alan Hensel bunun cebirsel fonksiyonlar teorisinde sık sık ortaya çıkan kongruens sistemlerini açıklamakta yardımcı olacağını göstermiştir.

Hensel 1908 yılında yayınladığı " Theorie der Algebraischen Zahlen " adlı kitabındaki değerlendirme teorisi alanındaki çalışmalara taban oluşturan ve polinomların asal olup olmadıkları konusunda bir kriter olan indirgenebilirlik lemmasına yer vermiştir. Bu çalışmalar daha sonra Krull ve Ostrowski tarafından geliştirilmiştir.

Bu çalışmada da değer grubu toplamsal bir grup olan bir değerlendirmenin rezidül transandant ve rezidül cebirsel genişlemelerinin incelenmesi ve bir toplamsal grup üzerinde tanımlanan bir değerlendirmenin tanımlanması amaçlanmıştır.

Üç bölümden oluşan tezin I. bölümünde gerekli ön bilgiler verilmiş, II. bölümde değerlendirmenin genişlemeleri incelenmiş, III. bölümde ise değerlendirilmiş gruplar ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

Rezidül transandant genişlemeler 1967 yılında Nagata tarafından ele alınmış ve bu konudaki çalışmalar daha sonraki çalışanlara ışık tutmuştur. 1980 li yıllarda J. Ohm, N. Popescu, V.Alexandru, A. Zaharev tarafından bu konuda önemli aşamalar kaydedilmiştir.

Bir K cisminin değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesi ve bu genişlemeleri belirleyen çiftler konusu V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharev tarafından çalışılmış ve bu çalışmaları 1988 yılında yayınlanmıştır. Yine aynı grup 1991 bir K cisminin değer grubu toplamsal olan bir değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesini tanımlayan minimal çiftleri belirlemiştir. Sözü edilen bu çalışmalar tezin I. ve II. bölümünde incelenmiştir.

III. bölümde Değerlendirmiş Gruplar incelenmiştir. Bir toplamsal grup üzerinde bir değerlendirme tanımlanmış ve üzerinde tanımlanan değerlendirmeye göre gruplar sınıflandırılmıştır. L.Fuchs ve G. Viljoen 1996 yılında yayınladıkları makalede homojen değerlendirilmiş gruplar ve özel Butler grupları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Yine L.Fuchs, R.M.Rangaswamy ile 2006 yılında yaptığı çalışmada değerlendirilmiş gruplarının sonlu ranklarını ve özelliklerini inceleyerek bu grupları özel isimlerle adlandırmıştır. Tezin III. bölümünde değerlendirilmiş B_1, B_2 grupları , ayrıştırılabilir ve ayrıştırılamaz gruplar incelenmiştir. Patrizia Longobardi ve Mercede Maj ın 1998 yılında yayınladığı makalede de sıralanabilen gruplar incelenmiş ve Conrad sıralama, konveks atlama ve Conrad grup hakkında bilgiler verilmiştir.

I.BÖLÜM

1.1. DEĞERLENDİRMELER

1.1.1. TANIM:

G çarpımsal (veya toplamsal) değişmeli bir grup $<$ (veya $>$) G grubu üzerinde bir sıra bağıntısı olsun. Her $a, \; b, \; c \in G$ için;

i.) $a < b, \; b < c \Rightarrow a < c$ (veya i.) $a > b \, , \; b > c \Rightarrow a > c$)

ii.) $a < b, \; a = b, \; b < a$ (veya ii.) $a > b \, , \; a = b \, , \; b > a$)

koşullarından yalnız biri sağlanır.

iii.) $a < b \, , \; p \in G \Rightarrow a.p < b.p$ (veya iii.) $a > b \, , \; p \in G \Rightarrow a + p > b + p$)

koşulları gerçekleniyorsa G üzerinde $<$ (*veya* $>$) bağıntısıyla tam sıralı gruptur denir.

1.1.2. TANIM:

K bir cisim, G çarpımsal (veya toplamsal) tam sıralı bir grup olsun.

$v : K \rightarrow G \cup \{0\}$ (veya $v : K \rightarrow G \cup \{\infty\}$) dönüşümü her $a, \; b \in K$ için;

i.) $v(a)=0 \Leftrightarrow a=0$ (veya $v(a)=\infty \Leftrightarrow a=0$)

ii.) $v(a.b)=v(a).v(b)$ (veya $v(a.b)=v(a)+v(b)$)

iii.) $v(a+b)\le \max\{v(a),v(b)\}$ (veya $v(a+b)\ge \min\{v(a),v(b)\}$)

koşullarını gerçekliyorsa v ye K cisminin bir <u>değerlendirmesidir</u> denir.

1.1.3. TANIM:

G sıralı grubuna v değerlendirmesinin <u>değer grubu</u> denir.

1.1.4. TANIM:

v K cisminin bir değerlendirmesi olmak üzere her $a \in K$, $a \neq 0$ için

$v(a)=1$ (veya $v(a)=0$)

sağlanıyorsa v değerlendirmesine K cisminin <u>aşikar değerlendirmesi</u> denir.

1.1.5. TANIM:

K bir cisim olsun. Her $a \in K$ için;

i.) $|a| \ge 0$

ii.) $|a| = 0 \Leftrightarrow a=0$

iii.) Her $a,\ b \in K$ için $|a.b| = |a|.|b|$

iv.) Her $a,\ b \in K$ için $|a.b| \le |a| + |b|$

koşulları sağlanıyorsa $|\ |: K \to R$ dönüşümüne <u>Arşimedsel değerlendirme</u> veya <u>rankı 1 olan değerlendirme</u> denir.

1.1.6. TANIM:

K cismi üzerindeki v değerlendirmesi her $a,\ b \in K$ için

$$v(a+b) \le \max\{v(a),v(b)\}$$

koşulunu sağlarsa <u>Arşimedsel olmayan değerlendirme</u> denir.

1.1.7. ÖNERME:

K bir cisim, v K cisminin değer grubu çarpımsal olan bir değerlendirmesi, G_v v değerlendirmesinin değer grubu olsun. v değerlendirmesinin değerlendirme halkası; $O_v = \{a \in K \mid v(a) \leq 1\}$, O_v halkasının tek maksimal ideali $M_v = \{a \in O_v \mid v(a) < 1\}$, birim grubu $U_v = \{a \in O_v \mid v(a) = 1\}$ biçimindedir.

G_v değer grubunun toplamsal olması durumunda ise;

$O_v = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$, $M_v = \{a \in O_v \mid v(a) > 0\}$, $U_v = \{a \in O_v \mid v(a) = 0\}$ biçimindedir.

1.1.8. TANIM:

K bir cisim, V K cisminin bir alt halkası olsun. $a \in K$, $a \neq 0$ iken $a \in V$ veya $a^{-1} \in V$ oluyorsa V halkasına K cisminin değerlendirme halkası denir.

1.1.9. TANIM:

K bir cisim, V K cisminin bir değerlendirme halkası olsun. $M = \{a \in V \mid a^{-1} \notin V\}$ kümesi V değerlendirme halkasının maksimal idealidir.

1.1.10. TANIM:

K bir cisim, V K cisminin bir değerlendirme halkası olsun. $U = \{a \in V \mid a^{-1} \in V\}$ kümesi V değerlendirme halkasının birim grubudur.

1.1.11. TANIM:

v K cisminin bir değerlendirmesi O_v, v değerlendirmesinin değerlendirme halkası, M_v, O_v halkasının tek maksimal ideali olmak üzere $k_v = O_v / M_v$ cismine K cisminin rezidü cismi denir.

1.1.12. TANIM:

K ve F iki cisim, F cebirsel kapalı olsun. $\phi : K \to F \cup \{\infty\}$ dönüşümü;

i.) $\phi^{-1}(F) = V$ bir halkadır.

ii.) $\phi\,|_V : V \to F$ aşikar olmayan bir homomorfizmadır.

iii.) $a \in K$ için $\phi(a) = \infty \Rightarrow \phi(a^{-1}) = 0$ dır.

koşulları gerçekleniyorsa ϕ dönüşümüne K cisminin bir place' i adı verilir.

1.1.13. TEOREM:

Bir K cisminin değerlendirmeleri, değerlendirme halkaları ve placeleri arasında birebir bir eşleme vardır. (Bachman, 1964)

1.1.14. TEOREM:

K bir cisim, v K cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi olsun.

$$v' : K \to R \cup \{\infty\}$$

dönüşümü her $a,\ b \in K$ için;

$$v'(a) = -\log v(a)$$

biçiminde tanımlansın. v' K cisminin bir değerlendirmesidir. (Bachman,1964)

1.1.15. TANIM:

A tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge ve K, A nın kesir cismi olsun. $\mu \in A$ birimsel bir eleman ve p, A halkasının asal bir elemanı olmak üzere $x = \mu \prod_p p^a$ olarak yazılır. $c \in R,\quad 0 < c < 1$ olmak üzere

$$v_p(x) = c^a \qquad \text{(değer grubu toplamsal ise } v_p(x) = a\text{)}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler ve bu dönüşüm K cismine tek şekilde genişletilir. Bu biçimde tanımlanan değerlendirmeye p-adic değerlendirme denir.

1.1.16. TANIM:

K cisminin bir v değerlendirmesinin değer grubu sonsuz devirli bir grup ise v değerlendirmesine ayrık değerlendirme denir.

Örneğin; p-adic değerlendirme ayrık değerlendirmedir.

1.1.17. TANIM:

K cisminin rankı 1 olan bir v değerlendirmesi, K cismi üzerinde bir Hausdorff topolojisi tanımlar. Her $a \in K$ için a elemanının komşulukları $\mu > 0$ olmak üzere

$$U(a,\mu) = \{b \in K \mid v(a-b) < \mu\}$$

kümesinin yardımıyla bir Hausdorff topolojisi tanımlar.

1.1.18. TANIM:

K bir cisim, v_1 ve v_2 K cismi üzerinde aşikar olmayan iki değerlendirme olsun. v_1 ve v_2 değerlendirmeleri K cismi üzerinde aynı topolojiyi tanımlıyor ise v_1 ve v_2 denk değerlendirmelerdir denir.

1.1.19. TEOREM:

K bir cisim, v_1 ve v_2 K cisminin rankı 1 olan iki değerlendirmesi olsun. v_1 ve v_2 denk değerlendirmeler ise uygun bir $\alpha > 0$ reel sayısı için $v_1 = v_2^a$ biçimindedir. (Bachman, 1964)

1.1.20. TEOREM:

v_1 ve v_2 aynı K cismi üzerinde iki değerlendirme olsun. v_1 ve v_2 değerlendirmelerinin K cismi üzerinde tanımladıkları topolojiler sırasıyla τ_{v_1} ve τ_{v_2} ile gösterelim.

i.) $\tau_{v_1} = \tau_{v_2}$

ii.) En az bir $\alpha > 0$ için $v_1 = v_2^a$

iii.) $x \in K, \quad v_1(x) < 1 \Rightarrow v_2(x) < 1$

iv.) $x \in K, \quad v_1(x) \leq 1 \Rightarrow v_2(x) \leq 1$

v.) $x \in K, \quad v_1(x) = 1 \Leftrightarrow v_2(x) = 1$

$v_1(x) > 1 \Leftrightarrow v_2(x) > 1$

$v_1(x) \geq 1 \Leftrightarrow v_2(x) \geq 1$

ifadeleri denktir. (Weiss, 1963)

1.1.21. ÖNERME:

v Q rasyonel sayılar cisminin aşikar olmayan bir değerlendirmesi olsun. v, değerlendirmesi ya adi mutlak değere ya da $p \in Z$ asal sayısıyla tanımlanmış p-adic değerlendirmeye denktir. (Bachman, 1964)

1.1.22. TANIM:

$K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cismi üzerinde $0 < d < 1$ bir reel sayı olmak üzere her

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x) \text{ için } v\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = d^{\deg(g(x)) - \deg(f(x))}$$

(değer grubu toplamsal ise $v\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \deg(f(x)) - \deg(g(x))$)

biçiminde tanımlanan v değerlendirmesi K cismi üzerinde aşikar bir değerlendirmedir ve $K(x)$ cisminin sonsuzdaki değerlendirmesi olarak adlandırılır.

1.1.23. TANIM:

K bir cisim, $p(x) \in K[x]$ asal bir polinom olsun. $K(x)$ cisminin her

$p(x)^n \dfrac{u(x)}{q(x)} \in K(x)$ ($u(x), \ q(x) \in K[x]$ aralarında asal polinomlar) elemanı

$0 < d < 1$ olan bir reel sayı olmak üzere her $p(x)^n \dfrac{u(x)}{q(x)} \in K(x)$ için

$$v_{p(x)}(p(x)^n \frac{u(x)}{q(x)}) = d^n \quad , \quad v_{p(x)}(0) = 0$$

(değer grubu toplamsal ise $v_{p(x)}(p(x)^n \dfrac{u(x)}{q(x)}) = n$, $v_{p(x)}(0) = \infty$)

biçiminde tanımlanan $v_{p(x)}$, K cismi üzerinde aşikar olan bir değerlendirmedir ve $K(x)$ cisminin $p(x)$- adic değerlendirmesi olarak adlandırılır.

1.1.24. TEOREM:

$K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cismi, v $K(x)$ cisminin aşikar olmayan bir değerlendirmesi olsun. v K cismi üzerinde aşikar bir değerlendirme ise v $K(x)$ cisminin ya sonsuzdaki değerlendirmesi ya da bir $p(x) \in K[x]$ asal polinomu için $p(x)$-adic değerlendirmeye denktir. (Mc.Carthy, 1966)

1.2. CİSİM GENİŞLEMELERİ

1.2.1. TANIM:

K ve F iki cisim olsun. $a \in K$ için K = F (a) biçiminde yazılabiliyorsa K, F cisminin bir basit genişlemesidir denir.

1.2.2. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi ve $a \in K$ olsun. f(a) = 0 olacak şekilde en az bir $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$ polinomu varsa $a \in K$, F cismi üzerinde cebirsel bir elemanıdır denir ve a ceb/ F biçiminde gösterilir.

1.2.3. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi olsun. Her $a \in K$ elemanı F cismi üzerinde cebirsel ise K, F cisminin bir cebirsel genişlemesidir denir.

1.2.4. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi olsun. $a \in K$ elemanı F cismi üzerinde cebirsel değilse transandanttır denir. En az bir $a \in K$, F cismi üzerinde transandant oluyorsa K, F cisminin bir transandant genişlemesidir denir.

1.2.5. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi olsun. $K_a = \left\{ a \in K \middle| \; a \;\; ceb/F \right\}$ cismine F cisminin K cismi içindeki cebirsel kapanışı adı verilir.

1.2.6. TANIM:

K bir cisim olsun. K cisminin kendinden başka cebirsel genişlemesi yoksa K cismine cebirsel kapalı cisim denir.

1.2.7. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi $a \in K$ olsun. a, F cismi üzerindeki minimal polinomunun basit bir kökü ise $a \in K$, F cismi üzerinde ayrılabilir bir elemandır denir.

1.2.8. TANIM:

K, F cisminin bir genişlemesi olsun. Her $a \in K$ elemanı F cismi üzerinde ayrılabilir ise K, F cisminin bir ayrılabilir genişlemesidir denir.

1.2.9. TANIM:

K, F cisminin sonlu bir genişlemesi, F cisminin K cismi içindeki ayrılabilirlik derecesi n, ayrılamazlık derecesi $[K:F]_i$ olsun. $\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_n$ K nın F- otomorfizmaları olmak üzere $a \in K$ elemanın F üzerindeki normu;

$$N_{K/F}(a) = \left[\prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a) \right]^{[K:F]_i}$$

biçiminde tanımlanır.

II.BÖLÜM

DEĞERLENDİRMELERİN RANKLARI VE GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde verilen bir değerlendirmenin ranklarının ve genişlemelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Birinci kısımda değerlendirmenin rankları, ikinci kısımda da değerlendirmelerin genişlemeleri yer almaktadır.

2.1. Değerlendirmelerin Rankları

2.1.1.TANIM:

G sıralı bir grup, H G nin bir alt grubu olsun. $a \in G$ olmak üzere her $b \in H$ ve $b^{-1} \leq a \leq b$ iken $a \in H$ oluyorsa H G nin bir isolated alt grubudur denir.

2.1.2. TANIM:

G sıralı grubunun kendinden farklı tüm isolated alt gruplarının sayısı G sıralı grubun rankı olarak adlandırılır ve $\underline{rankG}$ ile gösterilir.

2.1.3. TANIM:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve G_v, v değerlendirmesinin değer grubu ise v değerlendirmesinin rankı G_v sıralı grubun rankıdır.

2.1.4. ÖNERME:

G bir sıralı grup, H G nin bir isolated alt grubu ise G/H bölüm grubu da sıralı bir gruptur ve $rankG = rankH + rank\, G/H$ tır. (Bourbaki, 1964)

2.1.5. ÖNERME:

G sıralı bir grup olsun. G grubundan herhangi bir sıralı gruba tanımlanan ters sıra koruyan bir homomorfizmanın çekirdeği G nin bir isolated alt grubudur.

2.1.6. TEOREM:

K bir cisim, A, K cisminin bir değerlendirme halkası olsun.

i.) $A \subset B \subset K$ yı sağlayan bir B halkası K cisminin bir değerlendirme halkasıdır.

ii.) $M(B)$, $A \subset B$ yi sağlayan bir B halkasının maksimal ideali ise $M(B)$, A halkasının bir asal idealidir.

iii.) A halkasının asal idealleri ile $A \subset B \subset K$ yi sağlayan B halkasının asal idealleri arasında kapsama bağıntısına göre ters sıra koruyan bire-bir bir eşleme vardır. (Bourbaki, 1964)

2.1.7. TEOREM:

K bir cisim, A K cisminin bir değerlendirme halkası olsun. K cisminin A halkasına karşılık gelen değerlendirmesinin değer grubunu G_{v_A} ile gösterelim. $A \subset B \subset K$ koşulunu sağlayan halkalar ile G_A grubunun isolated alt grupları arasında kapsama bağıntısına göre ters sıra koruyan bire-bir bir eşleme vardır. (Bourbaki, 1964)

2.1.8. ÖNERME :

A ve B K cisminin $A \subset B$ yi sağlayan iki değerlendirme halkası olsun. A halkasına karşılık gelen değerlendirmeyi v_A, v_A değerlendirmesinin değer grubunu G_{v_A} ile gösterelim.

G_{v_A} grubunun B halkası ile eşlenen isolated alt grubunu H_B ile gösterirsek;

$$\varphi : G_{v_A} \to G_{v_A} / H_B$$

doğal dönüşüm olmak üzere B halkasına karşılık gelen değerlendirme $v_B = \varphi o v_A$ biçimindedir. Ayrıca v_B, değerlendirmesinin değer grubu G_{v_B}, G_{v_A} / H_B bölüm grubuna izomorftur. (Bourbaki, 1964)

2.1.9. ÖNERME:

A ve B K cisminin $A \subset B$ yi sağlayan iki değerlendirme halkası, p_B B halkasına karşılık gelen place i olsun. p_B place inin rezidü cismi k_B ve k_B cisminin A' değerlendirme halkasına karşılık gelen place i $p_{A'}$ olmak üzere K cisminin A halkasına karşılık gelen place i $p_A = p_{A'} o p_B$ biçimindedir. Ayrıca p_A ve $p_{A'}$ place lerinin rezidü cisimleri izomorftur. (Bourbaki, 1964)

$$K \xrightarrow{p_B} k_{v_B} \xrightarrow{p_{A'}} k_{v_{A'}}$$

$$v_B \qquad\qquad v_{A'}$$

2.1.10. TANIM:

v_A, $v_{A'}$ ve v_B sırasıyla p_A, $p_{A'}$ ve p_B placelerine karşılık gelen değerlendirmeler olsunlar. K cisminin $p_A = p_{A'} o p_B$ place ine karşılık gelen değerlendirmesi $v_A = v_B o v_{A'}$ biçiminde yazılır ve $v_{A'}$ ve v_B <u>değerlendirmelerinin bileşkesi</u> olarak adlandırılır.

2.1.11. TANIM:

G sıralı bir grup olsun. Her $a, b \in G$, $b > 1$ için $b^n > a$ olacak şekilde bir $n \in Z$ varsa G <u>Arşimedsel gruptur</u> denir.

2.1.12. TANIM:

G ve G' iki sıralı grup ve $\varphi : G \to G'$ dönüşümü bir izomorfizma olsun.

Her a, $b \in G$, her $\varphi(a) = a' \in G'$, $\varphi(b) = b' \in G'$ için $a < b$ iken $a' < b'$ oluyorsa φ ye G ve G' grupları arasında sıra koruyan-izomorfizma denir.

2.2 Değerlendirmelerin Genişlemeleri

2.2.1. TEOREM:

K bir cisim, A K cisminin bir alt halkası, F cebirsel kapalı bir cisim ve $f : A \to F$ aşikar olmayan bir homomorfizma olsun. K cisminin $\varphi \,|_A = f$ olacak şekilde bir φ place ' i vardır.

KANIT:

$S = \{ b \in A \,|\, f(b) \neq 0 \}$ olsun. $S \neq \phi$ ve S nin bir yarı grup olduğu kolayca görülür. S nin kesir halkası

$$A' = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in A, b \in S \right\}$$

olsun. A' birimli bir halka, $A \subseteq A'$ ve $b \in S$ için $b^{-1} \in A'$ dür. Her $\frac{a}{b} \in A'$ için

$$f'(\frac{a}{b}) = \frac{f(a)}{f(b)}$$

biçiminde tanımlanan f' dönüşümü f nin A' ne bir genişlemesidir. Eğer A kendisinin kesir halkası ise $a \in A$, $f(a) \neq 0$ ise $a^{-1} \in A$ dır. Bu durumda her $\alpha \in K$ için f dönüşümü $A[\alpha]$ yada $A[\alpha^{-1}]$ halkasına genişletilir.

Bunu göstermek için; A kendisinin kesir halkası olsun. $f(A)=F$ kümesi bir cisimdir. $a \in A$ için $f(a)=\overline{a}$ ile gösterilsin. x $trans/K$ olmak üzere $f(P(x))=\overline{P}(x)$ olacak şekilde f, $A[x]$ halkasına genişletilsin. F cisim olduğundan $f(A[x])=F[x]$ esas ideal bölgesidir. $\alpha,\beta \in K$ için;

$$g(P(a))=\overline{P}(\beta)$$

olacak şekilde f, $A[\alpha]$ halkasının bir g homomorfizmasına genişletilsin. Eğer g iyi tanımlı ise; f nin genişlemesi olan bir homomorfizma olacaktır. Bunun için $P(\alpha)=0$ ise $P(\beta)=0$ olduğu gösterilmelidir.

$$I=\{P(x)\in A[x] \mid P(\alpha)=0\}$$

olsun. $I, A[x]\to A[\alpha]$ ya tanımlanan dönüşümün çekirdeğidir ve $A[x]$ halkasının bir idealidir. Bu durumda g nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için her $\overline{P}(x)\in I$ için $\overline{P}(\beta)=0$ olduğu gösterilmelidir. I, $F[x]$ in bir ideali olduğundan I bir esas idealdir. O halde $Q(x)\in F[x]$ için;

$$I=\overline{Q}(x)F[x]$$

biçimindedir. Bu durumda β, $\overline{Q}(\beta)=0$ olacak şekilde seçilmelidir. F cebirsel kapalı bir cisim olduğundan β bu şekilde seçilebilir. Öyleyse $\overline{Q}(x)\neq 0$ polinomu sabit polinom değil ise f, $A[\alpha]$ halkasının bir g homomorfizmasına genişletilir.

$Q(x)$ sabit bir polinom olsun. $\overline{Q}(x)\neq 0$ ise; β, F ın herhangi bir elemanı olarak seçilebilir. Eğer $\overline{Q}(x)$ sıfırdan farklı sabit bir polinom ise f, $A[\alpha]$ nın g homomorfizmasına genişletilemez. Daha fazla detay için $\overline{Q}(x)=1$ olsun. Bu durumda $\overline{a}_i=0$, $1\le i\le t$ olmak üzere;

$$Q(x) = 1 + a_0 + a_1 x + .. + a_t x^t$$

yazılabilir. $Q(\alpha) = 0$ varsayıldığından;

$$1 + a_0 + a_1\alpha + .. + a_t\alpha^t = 0$$

olmalıdır ki bu mümkün değildir.

f, $A[\alpha]$ halkasına genişletilmezse, $A[\alpha^{-1}]$ halkasına genişletilir. f dönüşümünü hem $A[\alpha]$ ya hem de $A[\alpha^{-1}]$ halkasına genişletilmediğini varsayalım.

a_i, $a_j \in A$, $\overline{a}_i = \overline{a}_j = 0$, $0 \le j \le s$ olmak üzere;

$$1 + a_0 + a_1 x + .. + a_t x^t = 0$$

$$1 + a_0' + a_1' \frac{1}{\alpha} + .. + a_t' \frac{1}{\alpha^s} = 0$$

olsun. t ve s yukarıdaki ifadeler gerçekleşecek şekilde en küçük dereceler ve $s \le t$ olarak alınsın. $s.t \ge 1$ dir. Çünkü $t = 0$ olursa $1 + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{1} + \overline{a}_0 = \overline{0} \Rightarrow \overline{1} = \overline{0}$ olur ki bu da bir çelişkidir.

$$\alpha^s = \frac{-a_1'}{1 + a_0'}\alpha^{s-1} ..... - \frac{a_s'}{1 + a_0'}$$

olur. $\overline{1} + \overline{a}_0' = \overline{1} = 0$ dır ve A kendisinin kesir halkası olduğundan $a_i'' \in A$, $\overline{a}_i'' = 0$ $0 \le i \le s - 1$ olmak üzere;

$$\alpha^s = a_s'' + a_1''\alpha + ... + a_{s-1}''\alpha^{s-1}$$

yazılır.

$$1 + a_0 + a_1\alpha + ... + a_t\alpha^{t-s}\alpha^s = 0$$

$$1 + a_0 + a_1\alpha + ... + a_t\alpha^{t-s}(a_0'' + a_1''\alpha + ... + a_{s-1}''\alpha^{s-1}) = 0$$

olur. Denklemde α nın en büyük derecesi t-1 dir ki bu da t nin minimal olmasıyla çelişir. O halde f dönüşümü $A[\alpha]$ halkasına genişletilemezse $A[\alpha^{-1}]$ halkasına genişletilir.

E, f dönüşümünün A yı kapsayan halkalara genişlemelerinin kümesi olsun. g_1, $g_2 \in E$ için $g_2 > g_1$ olması için gerekli ve yeterli koşul g_2 nin g_1 in bir genişlemesi olmasıdır biçiminde E kümesinde tanımlanan bir $>$ bağıntısına göre E kısmi sıralı bir kümedir. $\{g_\alpha\}$, E nin tam sıralı bir alt kümesi ve bu g_α ların tanımlı olduğu halkaların kümesi A_α olsun. $\{A_\alpha\}$ kümesi de kapsama bağıntısına göre tam sıralıdır ve $\bigcup A_\alpha$ kümesi $\{A_\alpha\}$ kümesinin maksimal elemanıdır. Her $a \in \bigcup A_\alpha$ için;

$$g(a) = g_\alpha(a)$$

tanımlanırsa $g \in E$ ve $\alpha \in I$ için $g > g_\alpha$ dır. Öyleyse; Zorn lemma 'dan E kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal eleman h ve

$$h : V \to F$$

biçiminde olsun. h maksimal olduğundan;

i.) V kendisinin kesir halkasıdır. Yani $a \in V$, $h(a) \neq 0$ ise $a^{-1} \in V$ dir.

ii.) $\alpha \in V$ ise h, $V[\alpha]$ ya genişletilemez. O halde; $V[\alpha^{-1}]$ e genişletilir. Öyleyse $\alpha^{-1} \in V$ dir. Yani V değerlendirme halkasıdır.

V değerlendirme halkasına karşılık gelen φ place' i bir izomorfizma altında h dönüşümüne denktir. i.) den $a \in V$, $h(a) \neq 0$ ise $a^{-1} \in V$ dır. Tersine $a \in V$, $a^{-1} \in V$ ise $h(a) = 0$ dır. $çekh = P$, V nin maksimal idealidir. ψ doğal dönüşüm, $h(a+P) = h(a)$ ve i içerme dönüşüm olmak üzere;

$$V \xrightarrow{\psi} V/P \xrightarrow{h} h(V) \xrightarrow{i} F$$

oluşturulur ve $\varphi = h$ olur. $a \in K$, $a \in V$ için $h(a) = \infty$ denilerek h , K cismine genişletilebilir.

2.2.2. TEOREM:

F bir cisim, v F cisminin bir değerlendirmesi ve K, F cisminin bir genişlemesi olsun. Bu durumda v değerlendirmesi K cismine genişletilebilir.

KANIT:

K cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere $\varphi : F \to K \cup \{\infty\}$ dönüşüm F cisminin v değerlendirmesine karşılık gelen place' i olsun. φ nin V_v değerlendirme halkasına kısıtlanışı $\varphi\,|_{V_v} : V_v \to K$ ise önceki teoremden K cisminin bir place ine genişletilebilir.

O halde değerlendirmeler, değerlendirme halkaları ve place leri arasında bire-bir eşleme olduğundan F cisminin v değerlendirmesi K cisminin bir değerlendirmesine genişletilebilir.

2.2.3. TEOREM:

F bir cisim, v F cisminin bir değerlendirmesi ve K F cisminin bir genişlemesi olsun. v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi w olsun. V_v ve V_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerin değerlendirme halkaları, M_v ve M_w maksimal idealleri, U_v ve U_w birim grupları ise;

$$V_w \cap F = V_v, \qquad M_w \cap F = M_v, \qquad U_w \cap F = U_v$$

sağlanır.

2.2.4. TANIM:

F bir cisim, v F cisminin bir değerlendirmesi ve K F cisminin bir genişlemesi ve w, v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. G_v ve G_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerin değer grupları k_v ve k_w rezidü cisimleri ise (w/v), w değerlendirmesinin v değerlendirmesine bir genişlemesi olmak üzere

$e = e(w/v) = [G_w : G_v]$ indeksine dallanma indeksi,

$f = f(w/v) = [k_w : k_v]$ derecesine rezidü derecesi

denir.

2.2.5. TEOREM:

K ve F iki cisim, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi olsun. F cismi, v değerlendirmesiyle tam ve K F cisminin n. dereceden bir genişlemesi ise, N, K cisminin F cismi üzerindeki normu olmak üzere v değerlendirmesi her $x \in K$ için

$$w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$$

ile tanımlanan K cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesine tek şekilde genişletilir.

KANIT:

$\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ K cisminin F cismi üzerindeki bir tabanı olsun. Her $x \in K$ $\alpha_i \in F$ $1 \leq i \leq n$ için

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... \alpha_n x_n$$

şeklinde yazılır. Her $x \in K$ için $\|x\|_0 = \max_i v(\alpha_i)$ şeklinde tanımlanan $\| \ \|_0$ dönüşümü K cismi üzerinde bir değerlendirme tanımlar ve $\| \ \|_0$ ve v değerlendirmeleri birbirine denk olurlar. (Bachman,1964)

$v(x) < 1$ ise $v(x^r) \to 0$ dır. $\| \ \|_0$ ve v değerlendirmelerin denkliğinden $\|x^r\|_0 \to 0$ olur.

Buradan $1 \le i \le n$ için

$$x^r = \alpha_{r_2} x_1 + \alpha_{r_2} x_2 + ...\alpha_{r_n} x_n$$

yazılırsa; $\lim_{r \to \infty} v(\alpha_{r_i}) = 0$ olur.

Böylece $\lim_{r \to \infty} v(N(x))^r = 0$ dir. Her $x \in K$ için;

$$v(x) < 1 \Rightarrow v(N(x)) < 1$$

$$v(x) > 1 \Rightarrow v(N(x)) > 1$$

$$v(x) = 1 \Rightarrow v(N(x)) = 1$$

olduğu görülür. $y = \dfrac{N(x)}{x^n} \in K$ alınırsa

$$N(y) = \frac{N(N(x))}{N(x^n)} = \frac{N(x)^n}{N(x)^n} = 1$$

veya $v(y) = 1$ olur. O halde

$$v(\frac{N(x)}{x}) = 1 \Rightarrow v(N(x)) = v(x)^n$$

olur . Böylece her $x \in K$ için w dönüşümü

$$w(x) = \sqrt[n]{v(N(x))}$$

olarak tek şekilde tanımlanır.

2.2.6. TEOREM:

K, F cisminin n. dereceden bir genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. e dallanma indeksi, f rezidü derecesi olmak üzere

$$ef \leq n$$

dir.

KANIT:

φ, F cisminin v değerlendirmesine, ψ K cisminin w değerlendirmesine karşılık gelen place leri olsun. $x_1,...,x_i \in V_w$, $y_1,..,y_j \in K-\{0\}$, $\psi(x_1),.....,\psi(x_i)$, $\varphi(V_v)=V_v/P_v$ cismi üzerindeki doğrusal bağımsız ve $y_1G_v,......,y_jG_v$, G_w içinde farklı kalan sınıfları olsun. $1 \leq \vartheta \leq i$ ve $1 \leq \mu \leq j$ için ij tane $x_\vartheta y_\mu$ elemanlarının K üzerinde doğrusal bağımsız olduğu gösterilirse $ef \leq n$ olduğu görülmüş olur. $1 \leq \vartheta \leq i$ için;

$$v(a_1x_1+...+a_ix_i)=\max_{\vartheta} v(a_i)$$

olması x_i lerin seçilişinden her ϑ için $a_\vartheta = 0$ olması ile mümkündür. $c_{\vartheta\mu} \in K$ olmak üzere;

$$\sum_{\vartheta,\mu} c_{\vartheta\mu}x_\vartheta y_\mu = 0$$

olsun.

$$\sum_{\mu}(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu}x_\vartheta)y_\mu = 0$$

biçiminde yazılabilir. $v(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu}x_\vartheta)v(y_\mu)=0$ ise;

$$v(\sum_{\mu}(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu} x_{\vartheta}) y_{\mu}) = \max_{\mu}(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu} x_{\vartheta}) v(y_{\mu}) = 0$$

olur. Bu da 2.2.3. ile çelişir. O halde;

$$v(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu} x_{\mu}) v(y_{\mu}) = 0$$

ve

$$v(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu} x_{\vartheta}) = 0$$

dır. Buradan;

$$v(\sum_{\vartheta} c_{\vartheta\mu} x_{\vartheta}) = \max(v(c_{\vartheta\mu})) = 0$$

olur. Bu durumda $1 \leq \vartheta \leq i$ ve $1 \leq \mu \leq j$ için $c_{\vartheta\mu} = 0$ olacağından $x_{\vartheta} y_{\mu}$ elemanları K cismi üzerinde doğrusal bağımsızdır.

2.2.7. TEOREM:

K, F cisminin n. dereceden bir genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi $w_1, w_2 ..., w_n$, v değerlendirmesinin K cismine farklı genişlemeleri olsun. e_i, f_i $1 \leq i \leq n$ olmak üzere bu değerlendirmelerin sırasıyla dallanma indeksleri ve rezidü derecelerini belirtsin. Bu durumda

$$\sum_{k} e_k f_k \leq n$$

dir.

KANIT:

$w_1, w_2, ..., w_n$ değerlendirmeleri denk değildir. $x_{1_k}, x_{2_k}, .., x_{n_k}$ ve $y_{1_k}, y_{2_k}, .., y_{n_k}$ elemanları 2.2.6 teoreminin kanıtındaki gibi seçilsin. Yaklaşım teoreminden her $i, j, k \in I$ elemanları için;

$$v(\beta_{jk} - y_{jk}) < v(y_{jk})$$

$$v(\beta_{jk}) < \min_{r,t}(y_{rt})$$

ve

$$v(\alpha_{jk} - x_{jk}) < 1$$

$$v(\alpha_{jk}) < 1$$

eşitsizliklerini sağlayan $\alpha_{1_k}, \alpha_{2_k}, .., \alpha_{f_k}$ ve $\beta_{1_k}, \beta_{2_k}, .., \beta_{e_k}$ elemanları vardır. 2.2.3. ten

$$v(\beta_{jk}) = v(y_{jk} - (y_{jk} - \beta_{jk})) = v(y_{jk})$$

olur. y_{jk} lar $v(y_{jk})G_v$ ler farklı kalan sınıfları olacak şekilde seçildiğinde $v(\beta_{jk})G_v$ ler de farklı kalan sınıflarıdır.

$$v(\alpha_{i_k} - x_{i_k}) < 1 \Rightarrow \psi(\alpha_{i_k} - x_{i_k}) = 0 \Rightarrow (\alpha_{i_k}) = (x_{i_k})$$

olduğundan x_{i_k} elemanlarının seçilişinden (α_{i_k}) elemanları da $\varphi(V_v)$ cismi üzerinde doğrusal bağımsızdır. O halde $\alpha_{i_k}\beta_{i_k}$ elemanlarının doğrusal bağımsız olduklarını göstermek yeterlidir. $a_{ijk} \in F$ olmak üzere;

$$\sum_{i,j,k} a_{ijk}\alpha_{i_k}\beta_{jk} = 0$$

ise 2.2.6 teoremindeki kanıtın benzer işlemleri sonucu her $i, j, k \in I$ için;

$$a_{ijk} = 0$$

olduğu görülür. Öyleyse $\alpha_{i_k} \beta_{i_k}$ elemanları doğrusal bağımsızdır ve

$$\sum_k e_k f_k \leq n \qquad \text{dır.}$$

2.2.8.TEOREM:

K bir cisim, v K cisminin bir Arşimetsel değerlendirmesi olsun. Bu durumda K cismi C nin bir alt cismine izomorftur ve v değerlendirmesi adi mutlak değerin bir kuvveti biçimindedir.

KANIT:

K cismi üzerindeki v Arşimetsel değerlendirmesiyle tam bir cisim olsun. i, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olmak üzere $K(i)$ cismi göz önüne alınırsa, v değerlendirmesi $K(i)$ cisminin bir w değerlendirmesine tek şekilde genişletilir. 2.2.5. teoremden her $\alpha = a + ib \in K[i]$ için;

$$w(\alpha) = \sqrt{v(N(a))} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

biçimindedir.

K herhangi bir cisim ve v K cisminin bir Arşimetsel değerlendirmesi ise $charK = 0$ dır. (Bachman, 1964) Bu durumda K nın ilkel cismi Q ya izomorftur ve v değerlendirmesinin Q ya kısıtlanışı adi mutlak değerdir.

2.2.9. TEOREM:

K, F cisminin bir genişlemesi, v F cisminin değerlendirmesi ve w, v nin K cismine bir genişlemesi olsun. v ayrık bir değerlendirmesi ise w da ayrık bir değerlendirmedir.

KANIT:

G_v, v nin, G_w, w nın değer grubu olsun. 2.2.6. teoreminden e dallanma indeksi, f rezidü derecesi ve $[K:F]=n$ ise $ef \leq n$ dir. O halde

$$G_w{}^e \subseteq G_v$$

dir. Bu durumda $A \subseteq G_v$ olmak üzere $\alpha \in K$ için;

$$T : G_w \to A$$

$$w(\alpha)^e \to v(\alpha)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. Öyleyse G_w da sonsuz devirli bir grubun bir alt grubuna izomorftur yani w da ayrık değerlendirmedir.

2.2.10. TEOREM:

K, F cisminin n. dereceden bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. Bu durumda $rankw = 1$ dir. (Bachman, 1964)

2.2.11. TEOREM:

F cismi, v ayrık değerlendirmesine göre tam bir cisim ve K, F cisminin n. dereceden bir genişlemesi ise;

$$ef = n$$

dir. (Bachman, 1964)

KANIT:

w, v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi ve ψ ve φ sırasıyla w ve v değerlendirmelerine karşılık gelen place' leri olsun. $x_1, x_2, .., x_f \in V_w$ elemanları $\psi(x), ..., \psi(x_f) \in \psi(V_w)$ elemanları $\varphi(V_v)$ cismi üzerinde bir taban oluşturacak şekilde seçilsin ve G_w devirli grubu y elemanı ile üretilmiş olsun. $1 \leq i \leq f$ ve $1 \leq j \leq e-1$ olmak üzere $x_i y^j$ elemanlarının doğrusal bağımsız olduğu bilindiğinden K cisminin her elemanının $x_i y^j$ elemanlarının doğrusal bileşimi olarak yazıldığını göstermek yeterlidir.

$$V_w = \sum_{i,j} V_v x_i y^j$$

yazılsın. Bu durumda $\alpha \in K$, $a \in F^*$ ve $w(a\alpha) \leq 1$ ise;

$$a\alpha \in V_w = \sum_{i,j} V_v x_i y^j$$

olur. Buradan;

$$\alpha \in \sum_{i,j} F x_i y^j$$

bulunur. Öyleyse K cisminin her elemanının $x_i y^j$ elemanlarının doğrusal bileşimi olarak yazılacağını göstermek için V_w nın her elemanının $x_i y^j$ elemanlarının doğrusal bileşimi olarak yazılacağını göstermek yeterlidir.

G_v devirli grubun üreteci z olsun.

$\alpha \in V_w$, $a \neq 0$ ve $\exists$ $i = 0,1,2,...$ ve $\exists$ $j = 0,1,2,..,e-1$ için;

$$w(\alpha) \leq w(z^i \ y^j)$$

ve $\beta = \alpha / z^i y^j$ alınırsa $w(b) \leq 1$ ve $\psi(\beta) \in \psi(V_w)$ dır.

$a_i \in V_v$ olmak üzere;

$$\psi(\beta)=\psi(a)\psi(x)+....+\psi(a_f)\psi(x_f)$$

yazılırsa;

$$w(\beta-(a_1x_1+...+a_fx_f))<1 \Rightarrow w(\alpha-(a_1x_1+..+a_fx_f))<w(z^iy^j)$$

olur. Bu durumda $a_1,a_2,..a_f \in V_w$ ve $\gamma \in V_w$ olmak üzere;

$$\alpha=(a_1x_1+....+a_fx_f)+\gamma$$

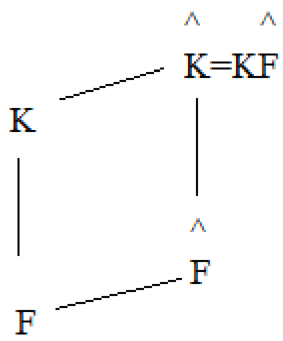
ya da $a_{oof} \in V_v$, $\alpha \in V_w$, $w(\alpha)<1$ olmak üzere ;

$$\alpha=(a_{001}x_1+....+a_{00f}x_f)+\alpha_1$$

yazılır. $a_{ijk} \in V_v$ ve $v(a_{ijk}) \to 0$ olduğundan $\sum_i a_{ijk}z^i$ yakınsaktır ve $\sum_i a_{ijk} \in V_v$ dir.

2.2.12.TEOREM:

K, F cisminin sonlu bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. K cisminin w ya göre tamlanışı $\hat{K}$, F cisminin v ye göre tamlanışı $\hat{F}$ ise $\hat{K}=K\hat{F}$ dır.



KANIT:

$K\hat{F}$, $\hat{F}$ nın sonlu genişlemesidir. $\hat{F}$ tam olduğundan $K\hat{F}$ da tamdır. $K \subseteq K\hat{F}$ ve K, $\hat{K}$ içinde yoğun olduğundan $\hat{K} \subseteq K\hat{F}$ olur. O halde $\hat{K} = K\hat{F}$ dır.

2.2.13. TEOREM:

K, F cisminin sonlu bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi, $\hat{F}$ F cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı ve $\overline{\hat{F}}$, $\hat{F}$ nın cebirsel kapanışı olsun. v değerlendirmesinin K cismine genişlemeleri ile K cisminin $\overline{\hat{F}}$ cismi içine gömmeleri arasında bire-bir bir eşleme vardır.

KANIT:

$\hat{v}$, v değerlendirmesinin $\hat{F}$ cismine genişlemesi ise $\hat{v}$ $\overline{\hat{F}}$ cismine tek şekilde genişletilir. Eğer K cismi $\overline{\hat{F}}$ cismi içine bir F-izomorfizma ile gömülürse v K cismine genişletilebilir.

$$\lambda : K \to K_1 \subseteq \overline{\hat{F}}$$

F i sabit bırakan bir dönüşüm v_1, $\hat{v}$ değerlendirmesinin K_1 cismine kısıtlanışı olsun. Her $\beta \in K$ için;

$$v_1'(\beta) = v_1(\lambda(\beta))$$

tanımlansın. v_1' K cisminin bir değerlendirmesidir ve v_1', v değerlendirmesinin bir genişlemesidir ve bu değerlendirme K nın $\overline{\hat{F}}$ cismine bir λ gömmesiyle belirlenmiştir.

$$\lambda_1 : K \to K_1 \subseteq \overline{\hat{F}}$$
$$\lambda_2 : K \to K_2 \subseteq \overline{\hat{F}}$$

dönüşümleri K cisminin F cismi içindeki iki gömmesi, σ $\overline{\hat{F}}$ nın $\hat{F}$-otomorfizması ve $\sigma\lambda_1 = \lambda_2$ yani λ_1 ve λ_2 gömmeleri eşlenik olsun.
Her $\beta \in K$ için;

$$v_1'(\beta) = v_1(\lambda(\beta)) = v_2(\sigma\lambda_1(\beta)) = v_2(\lambda_2(\beta)) = v_2'(\beta)$$

dır. O halde K cisminin $\overline{\hat{F}}$ cismi içine iki eşlenik K cismi üzerinde iki aynı değerlendirmeyi tanımlar.
Tersine ; $v_1' = v_2'$ olsun.

$$\lambda_3 = \lambda_2\lambda_1^{-1} : K_1 \to K_2$$

dönüşümü F cismini sabit bırakır. O halde λ_3 ün

$$K_1\hat{F} \to K_2\hat{F}$$

$\hat{F}$ - izomorfizmasına genişletildiği gösterilmelidir.
(α_n), K_1 cisminde bir Cauchy dizisi ve $\lim \alpha_n = \alpha \in K_1\hat{F}$ olsun. $v_1' = v_2'$ olduğundan;

$$
\begin{aligned}
v_2(\lambda_3(\alpha_n)-\lambda_3(\alpha_m)) &= v_2(\lambda_3(\alpha_n-\alpha_m)) \\
&= v_2(\lambda_2\lambda_1^{-1}(\alpha_n-\alpha_m)) \\
&= v_2'(\lambda_1^{-1}(\alpha_n-\alpha_m)) \\
&= v_1'(\lambda_1^{-1}(\alpha_n-\alpha_m)) \\
&= v_1(\alpha_n-\alpha_m)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Öyleyse $(\lambda_3(\alpha_n))$ de $K_2\hat{F}$ de bir Cauchy dizisidir ve $\lim(\lambda_3(\alpha_n)) \in K_2\hat{F}$ dır.

$$\overline{\lambda_3} : K_1F \to K_2F$$

bir $\hat{F}$ izomorfizma olmak üzere $\lim(\lambda_3(\alpha_n)) = \overline{\lambda_3}(\alpha)$ biçimindedir. Öyleyse $\overline{\lambda_3}$, $\overline{\hat{F}}$ cisminin bir $\hat{F}$-otomorfizmasına genişletilir.

2.2.14. TEOREM:

F bir cisim, $K = F(\alpha)$ F cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi, v F cisminin rankı 1 olan bir değerlendirmesi ve $f(x) = Irr(\alpha, F)$ olsun. Bu durumda v değerlendirmesinin K cismine $f(x)$ polinomunun F cisminde asal çarpanları kadar genişlemesi vardır.

KANIT:

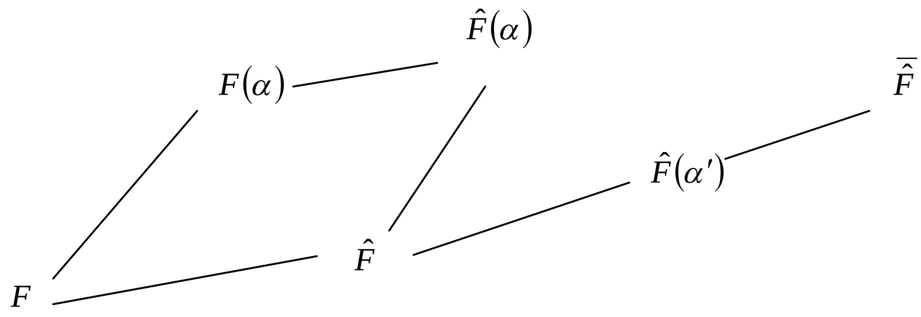
K F cisminin sonlu ayrılabilir bir genişlemesi olduğundan $p_i(x)$ ler $F[x]$ te farklı asal polinomlar olmak üzere;

$$f(x) = p_1(x)......p_r(x)$$

yazılır. λ, $K = F(\alpha)$ cisminin F cismi içine bir gömmesi olsun. Burada $\alpha' = \lambda(\alpha)$ dır.

$$0 = f(\alpha) = p_1(\alpha)......p_r(\alpha)$$
$$0 = f(\alpha') = p_1(\alpha')......p_r(\alpha')$$

olduğundan bazı $i \in I$ için $p_i(\alpha') = 0$ dır ve $F(\alpha)$ nın $\overline{\hat{F}}$ cismi içine gömmesi tek şekilde tanımlanır.



Tersine α', $p_i(x)$ polinomunun bir kökü olsun. $f(\alpha') = 0$ olduğundan $F(\alpha)$ ve $F(\alpha')$ cisimleri F –eşleniktir. O halde α' elemanıyla $F(\alpha)$ cisminin $F(\alpha') \subseteq F$ cismine bir gömmesi tanımlanır. β', $p_i(x)$ polinomunun başka bir kökü ise β ile $F(\alpha)$ cisminin $F(\beta') \subseteq \overline{\hat{F}}$ cismine bir başka gömmesi belirlenir. Ancak α' ve β' aynı $p_i(x)$ polinomunun kökleri olduğundan

$$F(\alpha') \cong F(\beta')$$

dır.

2.2.15. TANIM:

F bir cisim, v F cisminin bir değerlendirmesi, K F cisminin bir genişlemesi ve $(v_i')_{i \in I}$ v değerlendirmesinin K cismine genişlemelerinin bir ailesi olsun. v değerlendirmelerinin K cismine genişlemesi olan her değerlendirme bir tek v_i' değerlendirmesine denk ise $(v_i')_{i \in I}$, v değerlendirmesinin K cismine genişlemelerinin tam sistemi olarak adlandırılır.

2.2.16. TANIM:

F bir cisim, K F cisminin cebirsel bir genişlemesi, v F cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin K cismine tek bir genişlemesi varsa v değerlendirmesine Henselian değerlendirme denir.

2.2.17. TANIM:

F bir cisim, v F cisminin bir değerlendirmesi, K F cisminin cebirsel olmayan bir genişlemesi ve w, v değerlendirmesinin K cismine bir genişlemesi olsun. k_v ve k_w sırasıyla v ve w değerlendirmelerinin rezidü cisimleri olmak üzere k_w, k_v cisminin transandant bir genişlemesi ise w değerlendirmesi v değerlendirmesinin K cismine bir rezidül transandant genişlemesidir (r.t.g.) denir.

2.2.18. TANIM:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. Her $F = a_0 + a_1 x + a_2 x + .. + a_n x \in K[x]$ polinomu için

$$w(F) = \inf_i (v(a_i))$$

biçiminde tanımlanan w değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine Gauss genişlemesi olarak adlandırılır. Bu durumda $w(x) = 0$ ve x^* $trans \big/ k_v$ olmak üzere $k_w = k_v(x^*)$ biçimindedir.

2.2.19. LEMMA:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. G, G_v grubunu kapsayan sıralı bir grup ve $\gamma \in G$ olsun. Her $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için

$$w(P) = \inf_i (v(a_i) + i\gamma)$$

biçiminde tanımlanan w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesidir.

KANIT:

$P = \sum_i a_i x^i$, $Q = \sum_i b_i x^i \in K[x]$ olsun.

$$w(P) = \inf_i (v(a_i) + i\gamma) \quad , \quad w(Q) = \inf_i (v(a_i) + i\gamma)$$

olarak tanımlandığından

$$w(P) = v(a_t) + t\gamma \quad \text{ve} \quad w(Q) = v(a_s) + s\gamma)$$

olacak biçimde bir t, $s \in Z$ elemanları vardır.

$$w(P) = \infty \Leftrightarrow P = 0$$

olduğu kolayca görülür. $c_i = a_i + b_i$ olmak üzere $P + Q = \sum c_i x^i$ yazılacağından

$$w(P+Q) = \inf_i (v(c_i) + i\gamma)$$

dır ve w nın tanımından bir $k \in I$ için

$$w(P+Q) = v(c_k) + k\gamma$$

biçiminde olduğu kolayca görülür. Buradan

$$
\begin{aligned}
w(P+Q) &= v(a_k + b_k) + k\gamma \\
&\geq \inf(v(a_k), v(b_k)) + k\gamma \\
&= \inf(v(a_k) + k\gamma, v(b_k) + k\gamma) \\
&\geq \inf(v(a_t) + t\gamma, v(b_s) + s\gamma) \\
&= \inf(w(P), w(Q))
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde

$$w(P+Q) \geq \inf(w(P), w(Q))$$

dur. $c_i = \sum a_m b_n$ olmak üzere $PQ = \sum_i c_i x^i$ olduğundan

$$\text{k}\, w(PQ) = \inf_i (v(c_i) + i\gamma)$$

ve w nın tanımından $c = \sum a_\alpha b_\beta$ olmak üzere

$$w(PQ) = w(cx^{k+s}) = v(c) + (k+s)\gamma$$

olur. v değerlendirmesinin özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
w(PQ) &= v(a_k b_s) + (k+s)\gamma \\
&= v(a_k) + v(b_s) + k\gamma + s\gamma \\
&= w(P) + w(Q)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani

$$w(PQ) = w(P) + w(Q)$$

olur.

2.2.20. ÖRNEK:

v, Q cisminin değer grubu toplamsal olan p-adik değerlendirmesi olsun. $G_v = Z$ dir ve $\gamma = \sqrt{3} \in R$ alırsak $P = \sum_i a_i x^i \in Q[x]$, $w(P) = \inf_i (v(a_i) + i\sqrt{3})$, $Q(x)$ cisminin bir değerlendirmesidir.

2.2.21. ÖNERME:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, G_v v nin değer grubu, G' de G_v yi alt grup kabul eden bir sıralı grup, $n \in Z$, $n\gamma \in G_v$ iken $n = 0$ olan $\gamma \in G'_v$ ise $w(x) = \gamma$ olacak şekilde v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir tek w genişlemesi vardır. k_w ve k_v aynıdır ve w nın değer grubu $G_v + Z\gamma$ biçimindedir.

KANIT:

$P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ olsun.

$$w(a_i x^i) = v(a_i) + i\gamma$$

olacağından $a_i x^i$, $a_i \neq 0$ ların w altında farklı değerler aldığı görülür. O halde w değerlendirmesi her $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için;

$$w(P) = \inf_i (v(a_i) + i\gamma)$$

biçiminde tek şekilde tanımlanır. w nın değer grubunun $G_w = G_v + Z\gamma$ olduğu tanımından açıktır.

$R \in K(x)$ ve $R \neq 0$ ise $a \in K^*$, $n \in N$, $u \in K(x)$, $w(u) > 0$ olmak üzere

$$R = ax^n(1+u)$$

yazılabilir. O halde

$$w(R) = v(a) + n\gamma$$

olacaktır.

$$w(R) = 0 \Leftrightarrow v(a) = 0, n = 0$$

dır. Bu durumda R ve a birbirine denk olacağından k_w ve k_v cisimlerine aynı gözle bakılabilir.

<u>2.2.22. ÖNERME:</u>

K bir cisim, v K nın bir değerlendirmesi, G_v v nin değer grubu, k_v de rezidü cismi olsun. Bu durumda v değerlendirmesi $w(x) = 0$, $x^* = t \ \ trans \Big/ k_v$ olacak şekilde $K(x)$ cisminin bir w değerlendirmesine tek şekilde genişletilir. $G_w = G_v$ ve $k_w = k_v(t)$ dir.

<u>KANIT:</u>

$P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için;

$$w(P) = \inf_i (v(a_i))$$

biçiminde tanımlanan w K cisminin bir değerlendirmesidir ve $G_w = G_v$ dir. O halde $w(x) = 0$ olur.

Bu değerlendirmenin tekliğini göstermek için her $P = \sum_i a_i x^i \in K[x]$ için $w(P) = \inf_i (v(a_i))$ olduğunu göstermek yeterlidir. P polinomu her $i \in I$ için $v(a_i) \geq 0$ ve en az bir $k \in I$ için $v(a_k) = 0$ sağlanacak şekilde $K - \{0\}$ ın uygun bir elemanı ile bölünsün. Bu durumda $w(x) = 0 \Rightarrow P \in V_w$ dır.

$x^* = t \ \ trans \Big/ k_v$ ve her $i \in I$ için $\overline{a}_i \neq \overline{0}$ olduğundan

$$\sum_i \overline{a}_i t^i \neq \overline{0}$$

olur. O halde

$$w(P)=0=\inf_i (v(a_i))$$

olacaktır.

$$\sum_i \bar{a}_i t^i=\bar{0} \Rightarrow (w(\sum a_i x^i)>0, v(a_i)>0) \Rightarrow \bar{a}_i=\bar{0}$$

dır. Öyleyse $x^*=t \quad trans \Big/ k_v$ dir. $R\in K(x)$ elemanı $R=c(\sum \bar{a}_i t^i)/(\sum \bar{b}_i t^i)$ yazılırsa;

$$R=c(\sum \bar{a}_i t^i)/(\sum \bar{b}_i t^i)$$

olacağından

$$k_w=k_v(t)$$

olduğu görülür.

2.2.23. ÖNERME:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $f\in K[x]$, $f\notin K$ olsun. Her $P=a_0+a_1 f+...+a_n f^n \in K[f]$ için

$$w_f(P)=\inf_i (v(a_i))$$

biçiminde tanımlanan w_f v değerlendirmesinin $K(f)$ cismine bir rezidül trandsandant genişlemesini belirler. w, v nin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olmak üzere w, w_f değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel genişlemesidir. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

2.2.24. ÖNERME:

v K cisminin bir değerlendirmesi, w v nin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi $K(f)$ cismi üzerinde v, f ve infimum ile tanımlanan w_f değerlendirilmesinin $K(x)$ cismine genişlemesi olacak şekilde bir $f \in K[X]$ polinomu vardır. (Alexandru, Popescu, 1988)

$$\begin{array}{cc} K(x) & w \\ \Big| & \\ K(f) & w_f \\ \Big| & \\ K & v \end{array}$$

2.2.25. ÖNERME:

w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda w değerlendirmesi v, infimum ve $f = ax - b$ ($a \neq 0$) doğrusal polinomu ile tanımlanmıştır. (Alexandru , Popescu , 1988)

2.2.26. ÖNERME:

K cebirsel kapalı bir cisim, $f = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i) \in K[x]$, $f \notin K$, $w = w_f$ olsun. w, w_f in $K(x)$ cismine bir genişlemesi ise $f_i = \dfrac{(x - a_i)}{c_i}$ olmak üzere $w = w_{f_i}$ olacak şekilde f polinomunun bir a_i kökü ve bir $c_i \in K$ elemanı vardır. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

2.2.27. TEOREM:

$f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[X]$, $v(a) = 0$ ve her $1 \le i \le n$ için $v(x_i) \ge 0$ olsun. Bu durumda w nın $K(x)$ cismine bir tek w genişlemesi vardır. w değerlendirmesinin, $K(x)$ cismi üzerinde v, x ve infimum ile tanımlanmıştır. (Alexandru, Popescu, 1988)

2.2.28. TEOREM:

$f = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in K[X]$, her $1 \le i \le n$ için w_i, f polinomu ve f in x_i köküne karşılık gelen değerlendirme olsun.

i.) $w_1 = ... = w_r$ her $l > r$ için $w_l = w_r$ ise k_{w_1}/k_{w_0} r. dereceden bir genişlemedir.

ii.) $w_1' = ... = w_r'$, w_0 ın $K(x)$ cismine genişlemelerinin tam sistemi ise;

$$\sum_j e(w_j/w_0) f(w_j/w_0) = [K(x) : K(f)]$$

dir. (Alexandru, Popescu, 1988)

2.2.29. TANIM:

$\deg(w/v) = \min\{n \mid \exists r \in V_w, r\, trans/k_v, \deg r = n\}$ olarak tanımlanır.

2.2.30. ÖNERME:

w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i.) w, v nin bir rezidül transandant genişlemesidir.

ii.) $\overline{w}$, $\overline{v}$ nin bir rezidül transandant genişlemesidir.

iii.) $G_{\overline{w}} = G_{\overline{v}}$ dir.

(Alexandru, Popescu, 1988)

$$\begin{tikzcd} \bar{v}\ \overline{K} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \overline{K}(x)\ \bar{w} \arrow[d, dash] \\ v\ K \arrow[r, dash] & K(x)\ w \end{tikzcd}$$

<u>2.2.31. ÖNERME:</u>

$\overline{K}$, K cisminin cebirsel kapanışı, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. Bu durumda; w değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine bir genişlemesi ise; $\bar{w}$ $\bar{v}$ değerlendirmesinin genişlemesi olacak şekilde w değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine bir $\bar{w}$ genişlemesi vardır. (Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1988)

<u>2.2.32. ÖNERME:</u>

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. G, G_v grubunu kapsayan bir grup olmak üzere her $F \in \overline{K}[x]$, $F = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n$ elemanı için $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ bir çift olmak üzere

$$w_{(a,\delta)}(F) = \inf_i (\bar{v}(a_i) + i\delta)$$

biçiminde tanımlanan $w_{(a,\delta)}$, v değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine bir genişlemesidir.

Tersine; v değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine her w genişlemesi G, G_v grubunu kapsayan bir grup olmak üzere bir $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çifti için $w = w_{(a,\delta)}$ biçimindedir.

(a,δ), $(a',\delta') \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftlerinin v değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine aynı genişlemeleri tanımlamaları için gerekli ve yeterli koşul $\delta = \delta'$ ve $\bar{v}(a - a') \geq \delta$ olmasıdır.

Eğer $\delta \in G_{\bar{v}}$ ise $w_{(a,\delta)}$ v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesidir. (Alexadru, Popescu, Zaharescu, 1988)

2.2.33. TANIM:

$\overline{K}(x)$ cisminin $\overline{w}$ değerlendirmesi $\overline{w}(x) = \gamma$ olmak üzere $\bar{v}$, infimum, $a \in \overline{K}$ ve $\gamma \in G_{\bar{v}}$ ile tanımlanmış olsun. $(a,\gamma) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftine w değerlendirmesini tanımlayan çift denir.

2.2.34. TANIM:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi ve w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir $(a,\gamma) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftiyle tanımlanan genişlemesi olsun. $\bar{v}(a - b) < \gamma$ yı sağlayan her $b \in \overline{K}$ elemanı için $[K(b):K] < [K(a):K]$ sağlanıyorsa $(a,\gamma) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftine K cismine göre minimal çift denir.

2.2.35. ÖNERME:

v, K cisminin bir değerlendirmesi ve w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. Bu durumda $\overline{w}$ değerlendirmesini tanımlayan aşağıdaki koşulları sağlayacak bir $(a,\gamma) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çifti vardır.

i.) $[K(a):K] = n$ ise her $g(x) \in K[x]$, $\deg g(x) < n$ için $w(g(x)) = \bar{v}(g(a))$ dır.

ii.) $f(x) = Irr(a, K)$ için $w(f) = \gamma$ ve $e\gamma \in G_{v_a}$ olsun. $\deg h(x) < n$, $r = f^e / h$ için $w(r^*) = 0$ ve $r^*\ trans/k_v$ olacak şekilde $h(x) \in K[x]$ polinomu vardır.

iii.) k_{v_a}, k_v nin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışıdır.

2.2.36. TEOREM:

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesi olsun. Bu durumda; $w = w_{(a,\delta)} \big|_{K(x)}$ olacak biçimde bir $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çifti vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

$f(x) = Irr(a, K)$ ve $w(f) = \gamma$ olsun. Her $F \in K[x]$ polinomu için

$$F = F_0 + F_1 f + ... + F_n f^n \ , \ \deg F_i < \deg f \quad , \ i = 0,1,2,...n$$

yazılır ve w değerlendirmesi

$$w(F) = \inf_i \left(\bar{v}(F_i) + i\gamma\right)$$

biçiminde tanımlanır.

$v_a = \bar{v} \big|_{K(a)}$ olsun. e; $e\gamma \in G_{v_a}$ yı sağlayan en küçük pozitif tamsayıyı göstermek üzere

$$G_w = G_{v_a} + Z\gamma \ \text{ ve } \ [G_w : G_v] = e[G_{v_a} : G_v]$$

eşitlikleri sağlanır.

$h(x) \in K[x]$, $\deg h < \deg f$ ve $v_a(h(a)) = e\gamma$ sağlayan bir polinom olsun.

Bu durumda; $r = f^e / h \in O_w$ elemanı $r^* \in k_w$ elemanı k_v cismi üzerinde transandant olan en küçük dereceli elemandır.

k_{v_a} , k_v cisminin k_w cismi içindeki cebirsel kapanışıdır ve $k_w = k_{v_a}(r^*)$ biçimindedir.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \overline{K}(x) \\
\overline{K} \arrow[ur] & \\
K(a) \arrow[u] & K(x) \arrow[uu] \\
K \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2.2.37. TANIM:

v, K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cisminin $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çiftiyle tanımlanan rezidül transandant genişlemesi olsun.

$\bar{v}$, f, δ, v_a, γ, e, h, r, r^* daha önce tanımlandığı gibi olsun.

$r^* = Y$ ve $G = u_o + u_1 Y + ... + Y^m \in k_{v_a}[Y]$ monik polinomunu alalım.

$$w(g) = me\gamma, \qquad \deg g = me \deg f, \qquad (g/h^m)^* = G$$

özelliklerini sağlayan $g \in K[x]$ polinomu G polinomunun <u>liftingi</u> olarak adlandırılır.

Ayrıca; $G \neq Y$ asal bir polinom ise g liftingi de asaldır.

2.2.38. TANIM:

v, K cisminin bir değerlendirmesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi olsun. k_w, k_v cisminin bir cebirsel genişlemesi ise w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir <u>rezidül cebirsel genişlemesidir</u> denir.

2.2.39. TANIM:

w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel bir genişlemesi ve G_w/G_v sonlu bir grup ise w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir <u>rezidül cebirsel torsion</u> genişlemesi olarak adlandırılır.

2.2.40. TANIM:

K cebirsel kapalı bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemeleri arasında;
$w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \forall f \in K[x]$ için $w_1(f(x)) \leq w_2(f(x))$ biçiminde bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir.

(a_1,δ_1), $(a_2,\delta_2) \in K \times G$ w_1, w_2 değerlendirmelerini tanımlayan minimal çiftler olsun.

$$w_1 \leq w_2 \Leftrightarrow \delta_1 \leq \delta_2 \quad \text{ve} \quad v(a_1 - a_2) \geq \delta_1$$

olmasıdır.

Benzer şekilde;

$w_1 < w_2 \Leftrightarrow w_1 \leq w_2$ ve $w_1(f(x)) < w_2(f(x))$ sağlayan bir $f \in K[x]$ polinomu vardır.
biçiminde tanımlandığında $w_1 < w_2 \Leftrightarrow \delta_1 < \delta_2$ ve $v(a_1 - a_2) \geq \delta_1$ olmasıdır.

2.2.41. TANIM:

I iyi sıralı sonsuz bir küme ve $(w_i)_{i\in I}$, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir kümesi olmak üzere $i,\ j \in I$ ve $i < j$ için $w_i < w_j$ oluyorsa $(w_i)_{i\in I}$ kümesine v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemi denir.

2.2.42. TANIM:

$(w_i)_{i\in I}$, $K(x)$ cisminin rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemi olsun. Her $f \in K[x]$ polinomu için

$$w(f(x)) = \sup_i (w_i(f(x)))$$

biçiminde tanımlanan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesidir ve $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sistemin bir limiti olarak adlandırılır. $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limiti olan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesi olmayabilir.

2.2.43. TEOREM:

$(w_i)_{i\in I}$, $K(x)$ cisminin rezidül transandant genişlemelerinin bir sıralı sistemi olsun. $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemelerinin olması için gerekli ve yeterli koşul her $i \in I$ için $v(a - a_i) \geq \delta_i$ olacak biçimde bir $a \in K$ elemanının bulunmasıdır.

Buna göre; $(w_i)_{i\in I}$ sıralı sisteminin limitinin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant olmayan bir genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul her $a \in K$ ve $w_i(x-a) < \delta_i$ sağlayan $i \in I$ elemenının bulunmasıdır.

(Alexandru, Popescu, Zaharescu, 1990)

2.2.44. TEOREM:

v K cisminin bir değerlendirmesi, $rankv = n$ olsun. w, v nin $K(x_1,...,x_m)$ cismine bir genişlemesi ise $rankw \le n+m$ dir. (Khanduja, Garg, 1990)

2.2.45.TANIM:

w, K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül cebirsel genişlemesi olsun. G_w / G_v torsion grup değilse w, v değerlendirmesinin rezidül cebirsel serbest genişlemesi olarak adlandırılır.

v, K cisminin bir değerlendirmesi ve w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir serbest rezidül cebirsel genişlemesi olsun. w aşağıdaki gibi tanımlanır. $rankw = 2$ ise G_w değer grubunun aşikar olmayan bir H isolated alt grubu vardır. O_w halkasının da $M_1 \subset M_w$ sağlayan sıfırdan farklı M_1 ve M_w asal idealleri vardır.

$i : G_w \to G_w / H$ doğal homomorfizma olsun. $u_1 = iow$, $K(x)$ cisminin rankı bir olan bir değerlendirmesidir. u değerlendirmesinin değerlendirme halkası O_{u_1}, O_v halkasının M_{u_1} idealinin tümleyenine göre kesir halkasıdır. O_v halkasının maksimal ideali M_{u_1} dir. u_2, k_{u_1} rezidü cisminin O_w / M_{u_1} halkasına karşılık gelen değerlendirmesi olsun. Bu durumda $w = u_1 o u_2$ bileşke değerlendirmedir.

$$O_{u_1} \cap K = K \qquad \text{veya} \qquad O_{u_1} \cap K = O_v$$

durumlar incelenerek u_1 değerlendirmesi tanımlanır.

2.2.46. ÖNERME:

v, K cisminin bir değerlendirmesi, w, u_1 yukarıdaki gibi olsun. $O_{u_1} \cap K = K$ ise u_1 değerlendirmesi K cismi üzerinde aşikardır. Bu durumda; u_1, bir asal monik $f \in K[x]$ polinomuyla tanımlanmış ise $G_{u_1} = Z$ ve a, f polinomunun uygun bir kökü olmak üzere $k_{u_1} = K(a)$ biçimindedir. u_1, sonsuzdaki asal ile belirlenmiş ise $k_{u_1} = K$ dır.

Bu durumda; her $F \in K[x]$ polinomu

$F = F_0 + F_1 f + ... + F_n f^n$, $F_i \in K[x]$ $\deg F_i < \deg f$, $i = 0,1,..,n$

olarak tek şekilde yazılır ve w değerlendirmesi ;

$$w(F) = \inf_i (i, v'(F_i(a)))$$

biçiminde tanımlanır. Burada v', v değerlendirmesinin $k_{u_1} = K(a)$ cismine bir genişlemesidir.

$$\begin{tikzcd}
K(x) \arrow[r, dash, "u_1"] & k_{u_1} = K(a) \arrow[r, dash, "u_2"] & k_{u_2} \\
K \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] & v & k_v \arrow[u, dash]
\end{tikzcd}$$

2.2.47. TANIM:

Bu biçimde tanımlanan w değerlendirmesi, v değerlendirmesinin <u>1.tip serbest rezidül cebirsel genişlemesi</u> olarak adlandırılır.

2.2.48. ÖNERME:

v, K cisminin bir değerlendirmesi, w, u_1 yukarıdaki gibi olsun. $O_{u_1} \cap K = O_v$ ise u_1 değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesidir. k_{u_1} cisminin O_w / M_{u_1} değerlendirme halkasına karşılık gelen değerlendirmenin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesidir. Bu durumda; u_1 bir $(a,\delta) \in \overline{K} \times QG_{\bar{v}}$ minimal çiftiyle tanımlanmıştır.

u_2, k_v cismi üzerinde aşikar olduğundan $G(Y) \in k_{v_a}[Y]$ asal monik polinomuyla tanımlanmıştır. $g \in K[x]$, $G(Y)$ polinomunun asal liftingi olmak üzere w aşağıdaki gibi tanımlanır. Her $F \in K[x]$, polinomu

$$F = F_0 + F_1 g + ... + F_n g^n \ , \ F_i \in K[x] \ , \quad \deg F_i < \deg g \ , \ i = 0,1,..,n$$

yazılır ve $\rho = w(g) = (u_1(g),1) \in QG_v \times Q$ ve $j : QG_v \to Q$ olmak üzere

$$\alpha \mapsto (\alpha,0)$$

$$w(F) = \inf_i ((ju_1(F_i) + iw(g)) = \inf_i ((u_1(F_i),0) + i\rho)$$

olarak tanımlanır.

$n = \deg g(Y)$ olsun. $(g/h^n)^* = G(Y)$, k_v üzerinde transandant olduğundan $g(Y)$ polinomunun $\bar{v}(b-a) \le \delta$ sağlayan bir kökü vardır. $\deg F < \deg f$ olan her $F \in K[x]$ polinomu için $F(b)^* = F(a)^*$ dır ve $(F(b)^* / h(b))^* = c$, $G(Y)$ polinomunun bir köküdür.

Bu durumda; v_b, v değerlendirmesinin $K(b)$ cismine bir genişlemesi olmak üzere $k_w = k_{v_b} = k_{v_a}(c)$ olduğu görülür. (Popescu, Vraciu, 1992)

$$\begin{tikzcd}
& K(x) \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d, dash] \arrow[dr, phantom, "\text{r.t.g}"] & k_{v_a}(r^*) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "\text{tr}"] & k_v(c) \\
K(a) \arrow[r, dash] & K \arrow[r, dash, "v"] & k_v \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

2.2.49. TANIM:

Bu biçimde tanımlanan w değerlendirmesi, v değerlendirmesinin 2.tip serbest rezidül cebirsel genişlemesi olarak adlandırılır.

III.BÖLÜM

DEĞERLENDİRİLMİŞ GRUPLAR

Bu bölümde bir grup üzerinde bir değerlendirmenin nasıl tanımlandığını ve üzerinde değerlendirme tanımlanan gruplara B_1, B_2, Butler grup, özel Butler grup, tamamen ayrıştırılabilir grup… gibi adlar verildiğini göreceğiz.

3.1. TANIM:

H ve K iki grup olsun. Her (h,k), $(h',k') \in H \times K$ için

$$(h,k).(h',k') = (hh',kk')$$

biçiminde tanımlanan ikili işlem ile tüm sıralı ikililerin kümesine H ve K gruplarının direkt çarpımı denir. $H \times K$ şeklinde ifade edilir.

3.2. TANIM:

Her (a_k), $(a'_k) \in \prod_{k\in I} A_k$ elemanı için $(a_k)+(a'_k) = (a_k + a'_k)$ biçiminde tanımlanan işlem ile $\prod_{k\in I} A_k$ bir gruptur ve bu gruba A_k, $k = 1,2,3,..$ gruplarının direkt çarpımı denir.

3.3. TANIM:

H ve K iki grup olsun. Her (h,k), $(h',k') \in H \times K$ için

$$(h,k)+(h',k')=(h+h',k+k')$$

biçiminde tanımlanan ikili işlem ile tüm sıralı ikililerin kümesine H ve K gruplarının direkt toplamı denir ve $H \oplus K$ şeklinde ifade edilir.

3.4. TANIM:

$\prod_{k\in I} A_k$ nın hemen hemen her bileşeni sıfır olan elemanlardan oluşan alt kümesi $\prod_{k\in I} A_k$ nın bir alt grubudur. Bu gruba A_k ların direkt toplamı denir ve $\sum_{k\in I} A_k$ ile gösterilir.

3.5. TANIM:

G toplamsal bir grup, p asal bir sayı olsun. G grubunun her x elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise G grubuna bir p-grup denir.

3.6. SONUÇ:

Bir G grubunun bir sonlu p-grup olması için gerekli ve yeterli koşul G nin mertebesinin p nin bir kuvveti olmasıdır.

3.7. TANIM:

G değişmeli bir grup olsun. G nin mertebesi sonlu olan elemanlarının kümesi G nin bir alt grubudur. Bu alt gruba G nin torsion alt grubu denir ve tG ile gösterilir.

3.8. TANIM:

$G=tG$ ise G grubuna torsion grup, $tG=\{0\}$ ise G grubuna torsion free grup denir.

3.9. TEOREM:

G ve H iki torsion grup, G_p ve H_p sırasıyla G ve H gruplarının mertebeleri p olan alt grupları olsun. $G \cong H$ olması için gerekli ve yeterli koşul her p asal sayısı için $G_p \cong H_p$ olmasıdır. (J.J.Rotman,1978)

3.10. TANIM:

G bir grup, $x \in G$ ve $n > 0$, $n \in Z$ olsun. Bu durumda $ny = x$ eşitliğini sağlayan bir $y \in G$ varsa x elemanı n ile bölünebilir denir.

3.11. TANIM:

G bir grup olsun. Her $x \in G$ için $x = n.y$ olacak biçimde $n \in Z$ ve $y \in G$ elemanları varsa G grubuna bölünebilir grup denir.

3.12. TANIM:

F, $Z_k = \langle x_k \rangle$ sonsuz devirli gruplarının direkt toplamı ise, F grubu $A = \{x_k | \ k \in I\}$ kümesi üzerinde bir serbest değişmeli gruptur denir.

3.13. TANIM:

F, $A = \{x_i | \ i \in I\}$ kümesi üzerinde bir serbest grup olsun. Eğer I sonlu ve n elemanı varsa F grubunun rankı n dir denir.

F, $A = \{x_i | \ i \in I\}$ kümesi üzerinde bir serbest grup ve G de $B = \{y_j | \ j \in J\}$ kümesi üzerinde serbest grup olsun. Eğer I ve J nin eleman sayıları aynı ise F ve G grupları aynı ranka sahiptir denir.

3.14. TEOREM:

Eğer F, $A = \{x_k \mid k \in I\}$ kümesi üzerinde bir serbest grup ise, sıfırdan farklı her $x \in F$ elemanı $m \neq 0$, $m \in Z$ ve k_i, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $x = m_{k_1} x_{k_1} + ... + m_{k_n} x_{k_n}$ biçiminde tek şekilde yazılır.

3.15. TEOREM:

Bir F serbest değişmeli grubunun her H alt grubu da serbesttir ve $rankH \leq rankF$ tir. (J.J.Rothman, 1978)

3.16. TANIM:

X, G grubunun sıfırdan farklı elemanlarının kümesi olsun. $x_a \in X$ ve $m_a \in Z$ olmak üzere $\sum m_a x_a = 0$ iken her $m_a x_a = 0$ oluyorsa X kümesi bağımsızdır denir.

3.17.TANIM:

A bir toplamsal grup, $P < A$ olsun. Her $x \in P$, her $y \in A$ ve $x = n.y$ yi sağlayan $\forall n \geq 1$, $n \in Z$ için $x = n.z$ olacak şekilde en az bir $z \in P$ varsa P pure alt gruptur.

3.18.TANIM:

G bir grup olsun. X, G nin bağımsız bir alt kümesi ve $\langle X \rangle$, G nin bir pure alt grubu ise X kümesine G nin bir pure bağımsız alt kümesi denir.

3.19. TANIM:

G bir torsion grup, $B \subseteq G$ olsun.

i.) B devirli grupların direkt toplamıdır.

ii.) B, G nin bir pure alt grubudur.

iii.) G/B bölünebilirdir.

koşulları gerçekleniyorsa B ye G nin temel alt grubu denir.

3.20. LEMMA:

T, G grubunun bir pure alt grup olsun. Eğer $T \subset S \subset G$ ve S/T, G/T nin bir pure alt grubu ise S, G nin pure alt grubudur. (J.J. Rotman, 1978)

3.21. TEOREM:

S, G nin bir pure alt grubu olsun. Bazı $n > 0$, $n \in Z$ için $nS = 0$ ise S, G grubunun bir direkt toplananıdır. (J.J. Rotman, 1978)

3.22. TEOREM:

Her sonlu üretilmiş değişmeli grup, devirli grupların bir direkt toplamıdır.
(J.J. Rotman, 1978)

KANIT:

Önce her sonlu üretilmiş değişmeli grubun, p-grupların direkt toplamı olduğu gösterilmeli, sonra da her p-grubun, devirli grupların direkt toplamı olduğunu gösterirsek teoremi kanıtlanmış olur.

3.23. TANIM:

A, G iki grup ve A, G grubunun alt grubu olsun. Her a, $b \in A$ ve her $\lambda \in G$ için $a \le \lambda \le b$ iken $\lambda \in A$ oluyorsa A grubuna G grubunun bir konveks alt grubu denir.

3.24. TANIM:

G, H, K birer grup olmak üzere eğer $G \cong H \times K$ iken $H = \{e_H\}$ veya $K = \{e_K\}$ oluyorsa G grubuna ayrıştırılamaz grup denir

3.25. TEOREM:

A ve B, C toplamsal grubunun aşağıdaki koşulları sağlayan alt grupları olsun.

1) $A \cap B = \{0\}$

2) $A + B = C$

Bu durumda C, $A \oplus B$ direkt toplamına izomorftur.

KANIT:

1. izomorfizma teoremini kullanalım. $\phi : A \oplus B \to C$, $\phi(a,b) = a + b$ olsun.

1) ϕ homomorfizma;

$\phi((a,b) + (a',b')) = a + a' + b + b'$ (*)

$\phi(a,b) + \phi(a',b') = a + b + a' + b'$ (**)

C değişmeli olduğundan (*) ve (**) birbirine eşittir.

2) $çek\phi = \{(a,b) \mid \phi(a,b) = a + b = 0\}$ fakat $a + b = 0$, $a = -b \in A \cap B$,
$a = b = 0$ ve $çek\phi = \{0\}$ dır.

3) $\phi((a,b)) = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = A + B = C$

1.izomorfizma teoreminden $A \oplus B \cong \dfrac{A \oplus B}{çek\phi} \cong \operatorname{Im}\phi = C$ dir.

3.26. TANIM:

Yukarıdaki teoremdeki C grubuna A ve B gruplarının iç direkt toplamı denir ve $A \oplus B = C$ şeklinde gösterilir.

3.27. TEOREM: (Sonlu değişmeli grupların temel teoremi)

Her sonlu toplamsal grup, mertebesi bir asalın kuvveti olan devirli grupların direkt toplamıdır. (L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.28. LEMMA:

$(n,m)=1$ olmak üzere A mertebesi n.m olan sonlu değişmeli bir toplamsal grup olsun. Bu durumda; A, $|B|=n$ ve $|C|=m$ olan alt gruplarının $A=B\oplus C$ biçiminde bir direkt toplamıdır.

3.29. TEOREM:

$p_1,...,p_k$ farklı asallar olmak üzere A mertebesi $n=p_1^{e_1}...p_k^{e_k}$ olan bir toplamsal grup olsun. Bu durumda P_i $(i=1,2,..,k)$ mertebesi $p_i^{e_i}$ olan p-gruplar olmak üzere $A=P_1\oplus P_2\oplus...\oplus P_k$ biçimindedir.

A bir grup ve P, A nın bir alt grubu olsun. Pure alt grup tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

3.30. TANIM:

A bir grup ve P, A nın bir alt grubu olsun. $p^k y=x$ eşitliğini sağlayacak şekilde her $x\in P$ ve her $y\in A$ için $p^k z=x$ i olacak şekilde en bir $z\in P$ varsa P grubuna A grubunun pure alt grubu denir.

3.31. ÖRNEK:

$A=Z_6=\{\overline{0},\overline{1},..\overline{5}\}$ olsun. $P=\{\overline{0},\overline{3}\}$, Z_6 nın bir pure alt grubudur. Örneğin $y=\overline{1}\in A$ ve $x=3y$ olduğundan $x=\overline{3}\in P$ A içindeki $n=3$ ile bölünebilir. P pure alt grup olduğundan x elemanı P grubunda da 3 ile bölünebilmelidir ve $x=3x$, $9\equiv 3(\bmod 6)$ olduğundan bu sağlanır.

3.32. ÖRNEK:

Eğer $S\leq G$ ve G/S torsion serbest ise S pure alt gruptur. Eğer $s=ng$ ve $g+S\in G/S$ sonlu bir mertebeye sahip ise G/S torsion serbest; $g+S=S$ ve $g\in S$ dir.

3.33. TEOREM:

Her sonlu p-grup, devirli p-grupların direkt toplamıdır.

KANIT:

[L.Fuchs] tan aşikar olmayan sonlu A p-grubunn aşikar olmayan devirli bir P pure alt grubu vardır. Bundan dolayı P, A sonlu p-grubunun pure alt grubu olmak üzere bazı Q alt grupları için $A = P \oplus Q$ biçiminde yazılır. Buradaki Q alt grubu A grubunun mertebesinden küçük mertebeye sahiptir. Q p-devirli grupların direkt toplamı olarak yazılır. Bu durumda $A = P \oplus Q = P \oplus (Q_1 \oplus Q_2 \oplus ... \oplus Q_k)$ biçimindedir.

3.34. TANIM:

$(G, \leq)$ bir tam sıralı grup olsun. Her $a, b, x, y \in G$ için $a \leq b$ iken $x.a.y \leq x.b.y$ oluyorsa G ye bir sıralanabilen grup denir.

3.35. TEOREM:

G ve G' sıralı değişmeli gruplar, $f : G \to G'$ herhangi bir sıra koruyan homomorfizma olsun. $çekf$, G nin bir konveks alt grubudur.

KANIT:

$çekf$, G nin konveks alt grubu $\Leftrightarrow$ $\forall$ a, $b \in çekf$, $\lambda \in G$ olmak üzere $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, iken $\lambda \in çekf$ tir

$a, b \in çekf$, $\alpha \leq \beta$ olsun. $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ olacak biçimde $\lambda \in G$ alalım.

$0 = \alpha f \leq \lambda f \leq \beta f = 0$ olduğundan $\lambda f = 0$ olup $\lambda \in çekf$ tir.

$çekf$, G nin konveks alt grubudur.

3.36. TEOREM:

Herhangi bir sıralı grubun içindeki konveks alt grupların kümesi kapsamaya göre tam sıralıdır.

KANIT:

F_1 , F_2 sıralı grupların konveks alt grupları olsun. $F_1 \not\subset F_2$ varsayalım. $\alpha \in F_1$, $\alpha \notin F_2$ dir. α dan büyük elemanlar F_2 nin elemanı değildir. Eğer $\alpha \in F_2$ ise F_2 nin her bir elemanı α dan büyüktür ve $F_2 \subseteq F_1$ dir.

3.37. TEOREM:

G bir sıralanabilen grup, $N \triangleleft G$ olsun. G/N bölüm grubunun sıralanabilen grup olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul N nin G nin bir konveks alt grubu olmasıdır. (Patrizia Longabardi, Mercede Maj, 1998)

3.38. TEOREM:

G üzerindeki herhangi bir sıralamanın Arşimedyen bir sıralama olması için gerekli ve yeterli koşul her $a,\ b \in G$, $a,\ b > e$ için $a^n > b$ sağlayan bir $n \in N$ olmasıdır.

(Patrizia Longabardi, Mercede Maj, 1998)

3.39. TANIM:

C ve D G sıralı grubun konveks alt grupları $C < D$ olsun. G grubunun $C < H < D$ olacak biçimde bir konveks H alt grubu yoksa $C \to D$ konveks jump olarak adlandırılır.

3.40.TANIM:

G grubundaki her $a,b,c \in G$ için $a \le b$ iken $ac \le bc$ olacak şekilde G üzerinde bir tam sıralama bağıntısı varsa G grubuna sağ sıralanabilir grup denir.

3.41. TANIM:

$\leq$, G grubu üzerinde bir sağ sıralama bağıntısı, C ve D G nin konveks alt grupları olsun. Her $C \to D$ konveks jumpı için $C \lhd D$ ve D/C Arşimedyen grup ise $\leq$ sağ sıralamasına <u>Conrad sıralama</u> denir.

3.42.TANIM:

G grubu üzerinde Conrad sıralama var ise G grubuna <u>Conrad grup</u> denir.

3.43. TEOREM:

Herhangi bir sağ sıralamanın Conrad sıralama olması için gerekli ve yeterli koşul her $a,\ b \in G$, $a\ \ ,b > e$, $a^n b > a$ sağlayan en az bir $n \in N$ olmasıdır.

(Patrizia Longabardi, Mercede Maj, 1998)

3.44. TANIM:

G değişmeli bir grup, G' de sıralı bir grup olsun. p asal bir sayı olmak üzere eğer $v_p : G \to G'_p \cup \{\infty\}$ dönüşümü,

Her $a,b \in G$ ve $n \in Z$ için;

i.) $a = 0 \Rightarrow v_p(a) = \infty$

ii.) $v_p(pa) \geq v_p(a)$ ($v_p(a) = \infty$ olmadıkça eşitsizlik durumundadır.)

iii.) $v_p(na) = v_p(a)$, $(n, p) = 1$ ise

iv.) $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$

Her $a \in G$ için $v(a)$, $v_p(a)$ ların bir dizisi olarak $v(a) = (v_p(a))$ biçimindedir.

koşullarını sağlıyorsa G ye değerlendirilmiş grup, v_p ye de G grubu üzerinde bir değerlendirmedir denir.

3.45. TANIM:

G ve G' iki değerlendirilmiş grup, $\phi : G \to G'$ bir grup homomorfizması olsun. Her $a \in G$ ve her p asal sayısı için $v_p(a) \le v_p(\phi(a))$ sağlanıyorsa ϕ ye değer koruyan homomorfizma denir.

3.46. ÖNERME:

G ve G' iki değerlendirilmiş grup olsun. Her $a \in G$ ve her p asalı için $v_p(a) \le v_p(\phi(a))$ eşitsizliğini sağlayan değerlendirilmiş gruplar ve bu şekilde tanımlanan $\phi : G \to G'$ morfizmaları bir kategori oluşturur.
(L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.47. TANIM:

A ve B değerlendirilmiş grupları arasında değer koruyan bir izomorfizma var ise A ve B grupları izometriktir denir ve $A \approx B$ ile gösterilir.

3.48.TANIM:

F, rankı 1 olan değerlendirilmiş serbest torsion grupların bir direkt toplamı ise F ye tam olarak ayrıştırılabilir değerlendirilmiş grup denir.

3.49.ÖNERME:

F tam olarak değerlendirilmiş ayrıştırılabilir grup olsun. F nin rankı sonlu ise F_i ler rankı 1 olan değerlendirilmiş serbest torsion gruplar olmak üzere $F \approx F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$ dır. $x \in F_i$ olmak üzere her p asalı için v_p değerlendirmesi $v_p(x_1 + x_2 + .. + x_n) = \min_i(v_p(x_i))$ şeklindedir. (L.Fuchs, G.Viljoen, 1996)

3.50.TANIM:

B, F nin en az bir H pure alt grubu için F/H değerlendirilmiş bölüm grubuna izometrik olacak şekilde rankı sonlu olan tam olarak ayrıştırılabilir değerlendirilmiş $F = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$ grubu varsa B ye değerlendirilmiş B_2-grubu denir. Burada F_i ler rankı bir olan değerlendirilmiş serbest torsion gruplardır.

3.51. ÖRNEK:

Rankı iki olan değerlendirilmiş serbest F grubunu tanımlayalım. $F = < a > + < b >$ olsun. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, ..\alpha_n$ artan dizisini alalım. Bunlar F içindeki elemanların p-değerleri olacaktır. F nin v_p değerlendirmesi, π nin n. kısmi toplamı π_n ile göstermek üzere transendental p-adic birim π nin terimleri ile belirlenir. k ve n negatif olmayan tamsayıları için;

$$v_p(p^k a) = \alpha_k, \quad v_p(p^k b) = \alpha_k, \quad v_p(p^k(a + \Pi_n b)) = \alpha_{k+n}$$

olsun. Ayrıca her $x \in F$ ve $p \neq q$ olan tüm asallar için $v_q(x) = \infty$ olsun. Bu şekilde F nin her elemanı iyi tanımlanmış bir değere sahip olacaktır.

3.52.ÖNERME:

Eğer; $\phi : F \to B$ kanonik dönüşüm ise bu durumda $a_i = \phi(x_i)$ $(\ni x_i \in F_i)$ elemanları B yi üretir ve B üzerindeki değerlendirme her $a \in B$ için $v(a) = \sup(\min_i(v(x_i)))$ biçiminde tanımlanır. (L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.53. TANIM:

G, v ile değerlendirilmiş grup, A G nin bir alt grubu ve G/A rankı bir olan serbest torsion grup olsun. Rankı 1 olan bir X değişmeli serbest torsion grubu ve $\phi|_A = 1_A$ olacak şekilde bir $\phi : A \oplus X \to G$ izometrisi varsa A grubuna G grubunun bir dengelenmiş alt grup denir.

3.54. TANIM:

Eğer C serbest torsion ve $\mathrm{Im}\alpha$, B nin bir dengelenmiş alt grubu ise $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ tam dizisine değerlendirilmiş grupların dengelenmiş tam dizisi denir.

3.55. LEMMA:

C torsion serbest grup olmak üzere $0 \to A \to B \xrightarrow{\alpha} C \to 0$ değerlendirilmiş ve dengelenmiş bir tam dizi olsun. $\gamma : C' \to C$ dönüşümü verildiğinde $0 \to A \to B' \xrightarrow{\beta} C' \to 0$ dizisi tam olacak şekilde γ yardımıyla $C'/çek\gamma$ ve C arasında bir izometri tanımlanabilirse , η yardımıyla da $B'/çek\eta$ ve B arasında bir izometri tanımlanabilir.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \to & B' & \xrightarrow{\beta} & C' & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \to & A & \to & B & \xrightarrow{\alpha} & C & \to & 0
\end{array}
$$

(L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.56. LEMMA:

C torsion serbest grup olmak üzere $0 \to A \to B \xrightarrow{\gamma} C \to 0$ değerlendirilmiş ve dengelenmiş bir tam dizi olsun. $\alpha : A \to A'$ dönüşümü verildiğinde $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ dizisi tam olacak şekilde α yardımıyla $\mathrm{Im}\alpha$ ve A arasında bir izometri tanımlanabilirse , β yardımıyla da $\mathrm{Im}\beta$ ve B arasında bir izometri tanımlanabilir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.57. TANIM:

Her dengelenmiş torsion T grubu için değerlendirilmiş grupların dengelenmiş $0 \to T \to G \to B \to 0$ tam dizisi parçalanıyorsa B değerlendirilmiş torsion serbest grubuna B_1- grubu denir.

3.58. LEMMA:

Herhangi bir tam olarak ayrıştırılabilir değerlendirilmiş gruplar ve bu grupların toplamları da değerlendirilmiş B_1-gruplarıdır. (L.Fuchs, K.M.Rangaswamy, 2006)

3.59. TANIM:

A ve B iki değerlendirilmiş grup olsun. $A \oplus B$ üzerindeki bir v değerlendirilmesi her $a \in A$,$b \in B$ için; $v(a,b) = \min(v(a), v(b))$ biçiminde tanımlanır.

3.60. TANIM:

A değerlendirilmiş bir grup, C A nın bir pure alt grubu olsun. A/C bölüm grubu üzerinde bir değerlendirme her $a \in A$ için $v(a+C) = \sup\{v(a+c) \mid c \in C\}$ biçiminde tanımlanır.

3.61.TANIM:

G rankı sonlu olan ve tamamen ayrıştırılabilir bir grup olsun. G nin rankı sonlu olan torsion serbest değişmeli bir pure alt grubuna Butler grup denir.

Başka bir ifadeyle rankı sonlu olan tam olarak değerlendirilmiş ayrıştırılabilir grubun epimorfik görüntüsüdür.

3.62.TANIM:

B sonlu üretilmiş değerlendirilmiş serbest Butler grup olsun. B grubu üzerinde tanımlanan v değerlendirmesi değerlendirme tanımındaki ii.) koşulundan daha güçlü olan her $b \in B$ için $v_p(pa) = v_p(a) + 1$ koşulunu sağlıyorsa B grubuna özel Butler grubu denir.

3.63. TANIM:

Eğer $F_i = \langle a_i \rangle$ izometrik değerlendirilmiş devirli gruplar olmak üzere değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest $F = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$ grubu homojen grup olarak adlandırılır.

3.64. LEMMA:

Homojen değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest $F = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle a_n \rangle$ grubunun bir devirli pure $\langle b \rangle$ alt grubu bir değerlendirilmiş toplanandır. Yani, uygun $b_i \in F$ için $F = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus ... \oplus \langle b_n \rangle$ dir. (L.Fuchs, G.Viljoen, 1996)

3.65. TEOREM:

Homojen değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest grupların pure altgrupları değerlendirilmiş toplananlardır.

KANIT:

G, F homojen değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest grubun bir pure alt grubu olsun. Eğer $b \in G$, G nin bir pure alt grubunu üretiyorsa C homojen değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest bir grup olmak üzere $F = \langle b \rangle + C$ biçimindedir. Bu durumda $C \cap G$, C nin bir pure alt grubudur. G nin rankı üzerinden tümevarımla G, F nin bir toplananı olduğundan $G = \langle b \rangle + C \cap G$ olduğunu gösterebiliriz. Bu da G nin kendi başına bir serbest değerlendirilmiş grup olduğunu gösterir.

3.66. TEOREM:

Her $\langle a_i \rangle$ bir pure grup olmak üzere $B = \sum_{1}^{k} \langle a_i \rangle$ değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest grup bir özel Butler grubudur. Eğer $v(a_1) = v(a_2) = ... = v(a_k)$ ise B bir serbest değerlendirilmiş gruptur.

KANIT:

B homojen değerlendirilmiş F serbest grubunun epik görüntüsüdür. Bu durumda homomorfizmanın çekirdeği bir toplanandır. Dolayısıyla B, F nin bir toplananına izomorfik olacak şekilde bir serbest değerlendirilmiş gruptur.

3.67. LEMMA:

Her $\langle a_i \rangle$ bir pure grup olmak üzere $B = \sum_{1}^{k} \langle a_i \rangle$ değerlendirilmiş sonlu üretilmiş serbest grup bir özel Butler grubudur. Eğer $v(a_1) \leq v(a_2) \leq ... \leq v(a_k)$ ise $\langle a_k \rangle$, B nin bir değerlendirilmiş toplananıdır. Yani bazı değerlendirilmiş C Butler grubu için $B = \langle a_k \rangle + C$ dir. (L.Fuchs, G.Viljoen, 1996)

KAYNAKLAR

1.) Joseph J. Rotman, 1978. The Theory of Groups, 470 Atlantic Avenue, Boston

2.) Alexandru, V.Popescu , N. Zaharescu A. 1988. A Theorem of Characterization of Residual Transcendental Extensions of Valued Fields, J.Math. Kyoto Univ, 28-4 (579, 592)

3.) Bachman G. 1964 . Introduction to p-adic Numbers and Valuation Theory . Academic Press, New York and London

4.) Bourbaki N. 1969. Commutative Algebra, Addison Wesley Publishing Company, Newyork

5.) Deuring M. 1973. Algebraic Function of One Variable . Springer-Verlag, Newyork

6.) Mc. Carthy P.J. 1966. Algebraic Extension of Fields. Blaisdell Publishing Company, London

7.) Nagata M. 1967. A Theorem on Valuation Rings and its Applications. Nagaya Math. J. 29.(85-91)

8.) Nagata M. 1977. Field Theory. Chelsea Publishing Company, New York and Basel

9.) Ohm J. 1983. The Ruled Residue Theorem for Simple Trascendental Extensions of Valued Fields. Prooceeding of the American Mathematical Society 89 (16,18)

10.) Ohm J. 1985. Simple Transcendental Extensions of Valued Fields 2 : A Fundemental inequality. J.Math Kyoto Univ. 25-3 (583,596)

11.) Shilling O.F.G. 1950. American Mathematical Society, New York

12.) Weiss E. 1963. Algebraic Number Theory, Chelsea Publishing Company . New York

13.) Bourbaki N. 1964. Algebra Commutative, Herman, Paris

14.) Öke, Figen 1992. Değerlendirmeler ve Rezidül Transandant Genişlemeleri, Fen-Edebiyat Fakültesi, Edirne, Türkiye

15.) L.Fuchs, New Orleans, G.Viljoen, Bloemfontein,1996. Valuated Butler Groups of Special Type

16.) L.Fuchs, R.M.Rangaswamy, J.Aust.Math.Soc. 80. (2006), 335-350. Valuated Butler Groups of Finite Rank

17.) Patrizia Longobardi, Mercede Maj, Italy,1998. On Same Classes of Orderable Groups

ÖZGEÇMİŞ

15.02.1982 tarihinde İzmit ‘e bağlı Gölcük ilçesinde dünyaya geldim. İlkokulu Pirireis İlkokulu ‘nda okuduktan sonra Gölcük Orta Okulu ‘nda eğitimime devam ettim. Yabancı Dil Ağırlıklı İhsaniye Lisesi ‘nden mezun olup 2000 yılında Trakya Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım. 2004 yılında Trakya Üniversitesi ‘nden mezun oldum. 2005 yılında yüksek lisansa başladım. Şu an özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.