TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kısmet KASAPOĞLU

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
UYGULAMALI MATEMATİK
ANABİLİM DALI
2004
EDİRNE
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Cengiz DANE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİNDE NOKTA DÖNÜŞÜMLERİ

Kısmet KASAPOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Cengiz DANE

2004
EDİRNE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİNDE NOKTA DÖNÜŞÜMLERİ

Kısmet KASAPOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 22/01/2004 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Üye

Yrd. Doç. Dr Cengiz DANE
Danışman

Doç. Dr. Şevket Erol OKAN
Üye

ÖZET

Uygulamalı Bilimlerde bir olayı açıklamak ya da bir problemi çözmek çoğu kez bir diferansiyel denklem kurmayı ve onu çözmeyi gerektirir. Bundan dolayı diferansiyel denklemleri sınıflandırmak, çözülebilirlik durumlarını araştırmak çözüm yöntemleri geliştirmek diferansiyel denklemler teorisinin başlıca konularıdır.

Adi Diferansiyel Denklemler için geliştirilmiş değişik çözüm yöntemleri vardır. Bunlardan biride simetriler yardımı ile çözümlerin bulunmasıdır.

Bayağı Diferansiyel Denklemler ve çözümleri ile ilgili olan bu çalışma 6 Bölümden oluşmaktadır. I, II. Bölümlerde; nokta dönüşümleri, dönüşüm kuralları, dönüşüm ve üreteçlerin normal formları, dönüşümlerin çok parametreli grupları ve üreteçleri, bayağı diferansiyel denklemlerin lie nokta simetrileri ve bu simetrilerin bulunması, simetrilerle ilgili tanımlar, bir ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemler ile ilgili bilgiler verilmiştir.

III. ve IV. Bölümlerde; bir simetrisi bilinen diferansiyel denklemlerin çözümleri, lie cebrinin bazı temel özellikleri, lie nokta simetrilerinin kullanımı, integrasyon teknikleri incelenmiştir.

V. Bölümde; belli türden non-lineer bir denklem sınıfının belli koşullarda yapılabilen çözümleri ile, aynı denklem türünün simetriler yardımı ile yapılan bir çözümü incelenerek karşılaştırılmıştır.

VI. Bölümde; çalışılan konunun tartışması yapılmıştır.

Ek-A , Ek-B , Ek-C , Ek-D de ise lie nokta simetrilerinin bulunması, simetrileri bilinen diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

SUMMARY

In Applied Sciences, the construction of a differential equation and its solution is often required to explain an event, or to solve a problem. Therefore, the differential equations theory mainly focuses on the classification of the differential equations, the research on resolvable conditions and improving the solution methods.

There exist different solution methods developed for the ordinary differential equations. One of the most important methods is to find solutions by the help of the symmetries.

This study, which is considered the ordinary differential equations and their solutions consists of six chapters. In the first two chapters; the point transformations, the transformation rules, the normal forms of the transformations and generators, the groups with polyparameter and the generators of the transformations, Lie point symmetries of the ordinary differantial equations and finding these symmetries, the definitions related with symmetries, the information about the differential equations of 1^{th} and 2^{th} order are given.

In the third and fourth chapters, the solutions of the differential equations with known symmetry, the certain fundamental properties of the Lie Algebra, the use of Lie point symmetries, the integration techniques are studied.

In the fifth chapter, the solutions which can be found at obvious conditions of the obvious type of a nonlinear equation class are compared with the solution of the same type of the equation carried out by the help of the symmetries.

In sixth chapter discusses the overall subject.

In the appendiceses A-B-C-D, finding Lie point symmetries and the examples related with the solutions of the differential equations whose symmetries are known are presented.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçen değerli hocam Sayın Yrd.Doç.Dr Cengiz DANE' ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımı her zaman destekleyen değerli hocam Prof.Dr. Hülya İŞCAN'a teşekkür ederim.

Kısmet KASAPOĞLU

İÇİNDEKİLER

I. BÖLÜM

1. DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE SİMETRİLERİ

1.1 GİRİŞ

17. Yüzyılın başında diferansiyel ve integral kavramlarının G.W.Leibniz ve Isaac Newton tarafından ortaya atılması ile birlikte diferansiyel denklemler matematiğin günümüze kadar en çok araştırılan bir dalı olmuştur. Matematik tarihinde büyük isim yapmış olan Bernouilli kardeşler, Euler, Clairaut, J.L.Lagrange, D'Lambert, Charbit, Gaspord Monge, P.S.Laplace daha sonraları Cauchy, C.G.J.Jacobi picard, Frobenius gibi matematikçiler diferansiyel denklemler teorisini bugünkü ileri seviyeye getirmişlerdir.

İlk defa 1676 da Leibniz tarafından kullanılan "Diferansiyel Denklem" bağımlı değişkeni ve bir yada daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemi ifade ediyordu.

Doğadaki olayları açıklamak için en etkin ve sistematik yöntem diferansiyel denklem dilini kullanmaktır. Gerçektende ; Fizik, Kimya, Astronomi, Mühendislik, Ekonomi ve pek çok uygulamalı bilimler diferansiyel denklemlerin uygulama alanlarıdır.

Diferansiyel denklemlerin böyle geniş bir alanda uygulanabilir olmasının nedeni açıktır. Bilindiği gibi $y = f(x)$ gibi bir fonksiyonun $\frac{dy}{dx}$ türevi; y ' nin x 'e göre değişim hızı olarak yorumlanabilir. Doğal olaylarda da değişkenler ve bunların değişim hızları birbirine; olayı yöneten bazı temel yasalarla bağlıdır. Bu temel yasalar matematik formüllerle yazıldığında genellikle çoğu zaman bir diferansiyel denklem ile karşılaşılır. Örneğin $F = ma$ olarak bilinen Newton'nun 2. ci yasası aslında bir diferansiyel denklemdir. Benzer şekilde düzlem geometride, bir düzlem eğrinin $\frac{dy}{dx}$ eğimi ile (x, y)

koordinatları arasındaki ilişki bizi bir diferansiyel denkleme götürür. Isı iletkeni denge durumundayken ısı dağılımını belirten fonksiyonlar

$$\nabla^2 F = 0$$

Şeklindeki Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlar, iki boyutta dalgaların yayılışını ifade eden fonksiyonlar c bir sabit olmak üzere

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} - \frac{1}{c^2}\phi_{tt} = 0$$

şeklindeki Dalga denklemlerinin çözümü olan fonksiyonlar, K ısı iletkenliğini göstermek üzere difizyon olaylarını ifade eden fonksiyonlar

$$V_t = K\nabla^2 V$$

denkleminin çözümü olan fonksiyonlardır. Bu örnek doğa olaylarını ifade edildiği matematiksel bağıntılar " Kısmi türevli diferansiyel denklemler " olarak bilinirler.

Genel olarak bir fiziksel olayı tanımlayan diferansiyel denklem kurulup çözüldükten sonra aranan fiziksel olayın kesin ifadesi, denklem kurulurken olayın konumu itibariyle verilen bazı ön şartlar, denklem çözüldükten sonra genel çözüm olarak adlandırılan ifadede yerine yazılarak bulunur. Bulunan bu çözüm sadece verilen fiziksel olayın özel koşullarını sağlayan bir ifadedir.

Matematiksel olarak diferansiyel denklemlerle karakterize edilen olayların analizi bu denklemlerin çözümü olan fonksiyonlar üzerinde yapılır. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması önemlidir. Diferansiyel denklemleri oluşturup onların çözümlerini bulmak için yapılan çalışmalarda lineer ve non-lineer yapıda diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması ile ilgili çok geniş bir teori ve uygulama da da oldukça kolaylıklar sağlayan çözüm metotları geliştirilmiştir. Non-lineer denklemlerin çözümleri için aynı şeyleri söylemek mümkün değildir. Günümüzde non-lineer denklemlerin çözümleri ile ilgili yeni ve çok kullanışlı metotlar geliştirilmektedir. Bunlardan birisi de simetriler yardımı ile çözümlerin araştırılması ve bulunmasıdır.

Bu çalışmada bir ve ikinci mertebeden non-lineer denklemlerin çözüm yöntemleri incelenmiş daha sonra belirli bir formda yazılan non-lineer bir denklemin, denklemde bulunan bir keyfi sabit ile belirli bir fonksiyonun durumlarına göre yapılan çözüme altarnatif çözüm önerisi incelenmiştir.

1.2 Nokta Dönüşümleri ve Üreteçleri

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması sırasında sık sık uygun değişken dönüşümleri yardımıyla denklemler basitleştirilmeye çalışılır. Yani, x bağımsız, y bağımlı değişken olmak üzere,

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,y) \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x,y) \tag{1.2.1}$$

şeklinde dönüşümler kullanılarak diferansiyel denklemler basitleştirilmeye çalışılır. Bu tip dönüşümlere "Nokta Dönüşümü" denir. Bu dönüşüm (x,y) noktalarını $(\tilde{x},\tilde{y})$ noktalarına taşır. Simetriler

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,y;\varepsilon) \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x,y;\varepsilon) \tag{1.2.2}$$

şeklinde tanımlanan keyfi bir ε parametresine bağlı nokta dönüşümleri olarak göz önüne alınabilirler. Bu dönüşümler

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{x},\tilde{y};\tilde{\varepsilon}) = \tilde{\tilde{x}}(x,y;\tilde{\tilde{\varepsilon}}) \quad , \quad (\tilde{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{\varepsilon},\varepsilon)) \tag{1.2.3}$$

şeklinde kapalılık özelliğine sahip, tersi alınabilen dönüşümlerdir. Bu dönüşümler; $\varepsilon = 0$ için

$$\tilde{x}(x,y;0) = x \quad , \quad \tilde{y}(x,y;0) = y \tag{1.2.4}$$

şeklinde birim özelliğine de sahiptirler.

Bu özelliklerden dolayı (1.2.2) ile verilen nokta dönüşümleri, nokta dönüşümlerinin bir-parametreli gurubunu oluştururlar.

Bir-parametreli gruba basit bir örnek

$$\tilde{x} = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \quad , \quad \tilde{y} = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \tag{1.2.5}$$

şeklinde verilen düzlemdeki dönmelerin grubu gösterilebilir. Diğer taraftan,

$$\tilde{x} = -x \quad , \quad \tilde{y} = -y \tag{1.2.6}$$

ile verilen yansıma da bir nokta dönüşümü olmasına rağmen bir-parametreli bir grup oluşturmaz. (1.2.2) denklemi ile verilen dönüşümler bir grup yapısındadır. Dönüşümlerin etkileri (x,y) düzlemindeki hareketler gibi düşünülebilir. Bunu görmek için x-y düzleminde keyfi bir (x_0, y_0) rın görüntüleri olan $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ noktaları bir çizgi boyunca hareket ederler. Bu durum değişik başlangıç noktaları için tekrarlanırsa birbirine dönüşebilen noktaları temsil eden eğriler elde edilir. Bu eğrilere " Grup Yörüngeleri " denir. Yörünge eğrilerini X teğet vektörleri tarafından karakterize ederek (1.2.2) ile verilen dönüşüm grubunun değişik gösterimleri olacağını görebiliriz. Bu görüşe infinitesimal dönüşümler göz önüne alınarak yeni bir biçim verilir. Yani (1.2.2) ile verilen dönüşümler grubunun başka şekillerde de temsil edilebileceğini kanısına varılır.

Bu yeni gösterim için keyfi bir (x,y) noktası alınır ve

$$\tilde{x}(x,y;\varepsilon) = x + \varepsilon\,\xi(x,y) + ... = x + \varepsilon\,Xx + ...$$

$$\tilde{y}(x,y;\varepsilon) = y + \varepsilon\,\eta(x,y) + ... = y + \varepsilon\,Xy + ... \tag{1.2.7}$$

yazılır. Buradan $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonları,

$$\xi(x,y) = \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \quad , \quad \eta(x,y) = \left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{1.2.8}$$

şeklinde tanımlanır ; operatöre de

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.2.9}$$

şeklinde verilir.

Burada X teğet vektörünün bileşenleri $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarıdır. X operatörüne " Dönüşümün İnfinitesimal Üreteci " denir. İnfinitesimal dönüşüm tekrar uygulanırsa sonlu bir dönüşüm elde edilir. Bu şekilde elde edilen üreteç de X vektör alanının integral eğrilerinin grup yörüngeleri olduğunu ifade eden farklı yaklaşımdır. Yani x , y başlangıç değerleri ile

$$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon} = \xi(\tilde{x},\tilde{y}) \quad , \quad \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon} = \eta(\tilde{x},\tilde{y}) \tag{1.2.10}$$

ifadelerinin $\varepsilon = 0$ da integrali alınırsa (1.2.2) deki sonlu nokta dönüşümüne varılır.

İnfinitesimal üreteç gurubun yörüngelerini tek şekilde belirler. Eğer ε parametresi , $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ olmak üzere , $\varepsilon = f(\hat{\varepsilon})$ şeklinde yeniden düzenlenirse , $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarının (1.2.8) deki tanımı

$$\hat{\xi} = \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\hat{\varepsilon}}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\hat{\varepsilon}}\right|_{\hat{\varepsilon}=0} = \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon}f'(\hat{\varepsilon})\right|_{\varepsilon=0} = f'(0)\xi$$

$$\hat{\eta} = \left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\hat{\varepsilon}}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\hat{\varepsilon}}\right|_{\hat{\varepsilon}=0} = \left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon}f'(\hat{\varepsilon})\right|_{\varepsilon=0} = f'(0)\eta \tag{1.2.11}$$

ifadesini verir. X teğet vektörünü sabit bir değere sahip değildir.

Örnek.1. :

x-y düzleminin (1.2.5) ile verilen dönmelerini için,

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -y \qquad \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = x \tag{1.2.12}$$

olup , bunlara karşı gelen infinitesimal üreteç

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} = \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial x} + \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.2.13}$$

Örnek.2. :

Yine x-ekseni üzerinde yapılan

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \quad , \quad \tilde{y} = y \tag{1.2.14}$$

ötelemeleri için,

$$\left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1 \quad , \quad \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{1.2.15}$$

olup, buradan infinitesimal üreteç,

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.2.16}$$

şeklinde bulunur.

Buradan, üreteç verildiği zaman sonlu nokta dönüşümünün bulunması şeklinde ters bir problemle karşılaşırız. Bunu da bir örnek üzerinde inceleyelim;

Örnek.3. :

Eğer

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \tag{1.2.17}$$

şeklindeki üretecin hangi nokta dönüşüm grubuna karşı geldiğini araştırırsak, bu durumda (1.2.10) ile verilen ifade kullanılır. Yani,

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon} = \tilde{x} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} = \tilde{y} \tag{1.2.18}$$

olmak üzere $\tilde{x}(0) = x$ ve $\tilde{y}(0) = y$ başlangıç değerleri ile birlikte çözüm tam olarak,

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon} = \tilde{x} \quad , \quad \tilde{x} = e^{\varepsilon} x \tag{1.2.19}$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} = \tilde{y} \quad , \quad \tilde{y} = e^{\varepsilon} y \tag{1.2.20}$$

şeklinde bulunur. (1.2.19) ve (1.2.20) ile verilen

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon} x \quad , \quad \tilde{y} = e^{\varepsilon} y \tag{1.2.21}$$

ifadesi " Benzerlik Dönüşümü " dür.

1.3 Dönüşüm Kuralları ve Üreteçlerin Normal Formları

(1.2.9) denklemi ile verilen X üreteci tam olarak x ve y değişkenlerine bağlıdır. x yerine $u(x,y)$ ve y yerinede $v(x,y)$ değerlerini koyarak ξ ve η bileşenlerinin nasıl değiştiğini araştıralım. Bunun için

$$X = b^{i}(x^{i})\frac{\partial}{\partial x^{i}} \quad , \qquad i = 1,2,3,\ldots,N \tag{1.3.1}$$

şeklindeki üreteçleri göz önüne alarak problemi genişletelim. Eğer;

$$x^{i'} = x^{i'}(x^{i}) \quad , \qquad \left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right| \neq 0 \tag{1.3.2}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \tag{1.3.3}$$

olacağından, dönüşüm kuralı

$$X = b^{i'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \quad , \qquad b^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} b^{i} \tag{1.3.4}$$

olur. Görüldüğü gibi , X üretecinin b^{i} bileşenleri bir vektörün kontravaryant bileşenleri gibi değişmektedirler.

X üretecini farklı bir formda yazmak için bu dönüşüm kuralından faydalanılabilir

$$Xx^n = b^i \frac{\partial}{\partial x^i} x^n \quad , \quad Xx^{n'} = b^{n'} \tag{1.3.5}$$

olmasından dolayı

$$X = (Xx^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = (Xx^{i'})\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \tag{1.3.6}$$

olur. Buda X üretecinin x^i koordinatlarının nasıl bir yapıda olduğunun bilinmesi halinde nasıl belirleneceğini açıklar.

Örneğin, $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ ile verilen üretecin

$$u = \frac{y}{x} \quad , \quad v = xy \tag{1.3.7}$$

koordinatlarında ifade edilmesi istenirse, (1.3.6) dan dolayı

$$Xu = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)u = x\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)\right] + y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)\right] = x\left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{1.3.8}$$

$$Xv = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)v = x\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy)\right] + y\left[\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right] = xy + yx = 2xy = 2v \tag{1.3.9}$$

bulunur. Bu değerler

$$X = (Xu)\frac{\partial}{\partial u} + (Xv)\frac{\partial}{\partial v} \tag{1.3.10}$$

denkleminde yerine yazılırsa, yeni koordinatlardaki üreteç

$$X = 2v\frac{\partial}{\partial v} \tag{1.3.11}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ ile verilen üreteci polar koordinatlarda ifade edersek;

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \tag{1.3.12}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.3.13}$$

olduğundan

$$Xr = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = -xy\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} + xy\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{1.3.14}$$

$$X\varphi = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \right)\arctan\left(\frac{y}{x} \right) = -y\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} + x\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = 1 \qquad (1.3.15)$$

olur. Bu değerler yeni koordinatlardaki üreteç formu olan

$$X = (Xr)\frac{\partial}{\partial r} + (X\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (1.3.16)$$

ifadesinde yerine yazılırsa, üretecin polar koordinatlardaki ifadesi

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (1.3.17)$$

şeklinde bulunur.

(1.3.17) den görüleceği gibi kutupsal koordinatlar dönmeyi, kartezyen koordinatlardan daha iyi tanımlar. Bu açıklama verilen bir parametreli dönüşümler grubuna her zaman azami derecede uyan koordinatlar var mıdır sorusunu akla getirir. Bu sorunun cevabı evettir. Her zaman keyfi N sayıdaki x^i koordinatlarına bağlı (1.3.1) formundaki X üretecini

$$X = \frac{\partial}{\partial s} \qquad (1.3.18)$$

şeklinde basit forma sokan koordinatlar vardır. Bu forma X üretecinin normal formu denir. Bunu göstermek için

$$Xs = b^i\frac{\partial s}{\partial x^i} = 1 \quad , \quad Xx^{n'} = b^i\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^i} = 0 \quad , \quad (i = \overline{1,N}) \, , (n' = \overline{2,N}) \qquad (1.3.19)$$

denklemlerinden oluşan sistemin daima

$$\left\{ s(x^i), x^{n'}(x^i) \right\}$$

şeklinde aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu kısmi türevli diferansiyel denklemlerden biliyoruz. Fakat (1.3.18) ifadesini bulmak için $(s, x^{n'})$ koordinatlarına dönüşüm yapmak daha anlaşılırdır. Bu kısaca şu demektir, Eğer N boyutlu uzayda, bu uzayı düzgün ve tamamen örten bir boyutlu grup yörüngelerinin bir kongrüansı varsa, bu durumda bu eğrileri $x^{n'} = sabit$ koordinat çizgileri gibi alabilir ve s' yi de bu eğriler boyuca bir parametre olarak düşünebiliriz. Bu koordinatlarda X teğet vektörünün yanlızca sıfırdan farklı tek bileşeni s yönündedir ve uygun bir s parametresinin seçimi ile s bileşenin birime eşit olduğu sonucuna varılabilir.

Verilen bir üreteci (1.3.18) şeklindeki normal forma sokan belirli dönüşümü bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Fakat diferansiyel denklemlerle ilgili olarak ortaya çıkan birçok uygulamada üreteci normal forma sokan dönüşümün belirlenmesi mümkündür. Bu belirli dönüşümün

$$\varepsilon = s(x,y) \tag{1.3.20}$$

şeklinde olduğunu görürüz.

1.4 Dönüşüm ve Üreteçlerin Genişlemeleri

(1.2.1) ve (1.2.2) ile verilen bir nokta dönüşümü

$$H(x,y,y',y'',y''',...,y^{(n)}) = 0 \tag{1.4.1}$$

şeklinde verilen bir diferansiyel denkleme uygulamak istendiğinde denklemdeki $y^{(n)}$ türevlerinin nasıl dönüştüğünün, yani bu nokta dönüşümlerinin türevlerde nasıl genişlediğinin bilinmesi gerekir. Bu da,

$$\tilde{y}' = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}(x,y;\varepsilon)}{d\tilde{x}(x,y;\varepsilon)} = \frac{\dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial y}dy}{\dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial y}dy} = \frac{y'\dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial x}}{y'\dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial x}} = \tilde{y}'(x,y,y';\varepsilon) \tag{1.4.2}$$

$$\tilde{y}'' = \frac{d\tilde{y}'}{d\tilde{x}} = \tilde{y}''(x,y,y',y'';\varepsilon) ,...\text{vs} \tag{1.4.3}$$

değerlerinin tanımı ile mümkündür. Yani dönüştürülmüş türevler, dönüştürülmüş değişkenlere karşı gelen türevlerdir. Denklemin çözümü için bilinmesi gereken X infinitesimal üreteçlerinin genişlemesidir. Bu genişlemeler

$$\eta = \left.\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} , \quad \eta' = \left.\frac{\partial\tilde{y}'}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} , \quad \eta'' = \left.\frac{\partial\tilde{y}''}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} , \quad \eta^{(n)} = \left.\frac{\partial\tilde{y}^{(n)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{1.4.4}$$

olmak üzere (1.2.7) ye benzer şekilde

$$\tilde{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + ... = x + \varepsilon Xx + ... \tag{1.4.5}$$

$$\tilde{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) + ... = y + \varepsilon Xy + ... \tag{1.4.6}$$

$$\tilde{y}' = y' + \varepsilon\eta'(x,y) + ... = y' + \varepsilon Xy' + ... \tag{1.4.7}$$

....

....

....

$$\widetilde{y}^{(n)} = y^{(n)} + \varepsilon\eta^{(n)}(x, y, y', ..., y^{(n)}) + ... = y^{(n)} + \varepsilon X\, y^{(n)} + .. \tag{1.4.8}$$

olur. Bulunan (1.4.5) , (1.4.6) , ..., (1.4.8) ifadeleri (1.4.2) ve (1.4.3) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\widetilde{y}' = y' + \varepsilon\eta' + ... = \frac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}} = \frac{dy + \varepsilon\, d\eta + ...}{dx + \varepsilon\, d\xi + ...} = \frac{y' + \varepsilon\dfrac{d\eta}{dx} + ...}{1 + \varepsilon\dfrac{d\xi}{dx} + ...} = \frac{(y' + \varepsilon\dfrac{d\eta}{dx} + ...)(1 - \varepsilon\dfrac{d\xi}{dx} + ...)}{(1 + \varepsilon\dfrac{d\xi}{dx} + ...)(1 - \varepsilon\dfrac{d\xi}{dx} + ...)}.$$

$$\widetilde{y}' = \frac{y' + \varepsilon\dfrac{d\eta}{dx} - y'\varepsilon\dfrac{d\xi}{dx} + ...}{1 - \varepsilon^2(\dfrac{d\xi}{dx})^2 + ...} \tag{1.4.9}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade de

$$\left(-\varepsilon^2(\frac{d\xi}{dx})^2 + ...\right) \tag{1.4.10}$$

terimleri ihmal edilirse,

$$\widetilde{y}' = y' + \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}\right) + ... \tag{1.4.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\widetilde{y}^{(n)} = y^{(n)} + \varepsilon\eta^{(n)} + ... = \frac{d\widetilde{y}^{(n-1)}}{d\widetilde{x}} = y^{(n)} + \varepsilon\left(\frac{d\,\eta^{(n-1)}}{d\,x} - y^{(n)}\frac{d\,\xi}{d\,x}\right) + ... \tag{1.4.12}$$

bulunur. Buradan (1.4.12) , (1.4.6) , (1.4.7) ve (1.4.8) ifadeleri karşılaştırılırsa,

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y} \tag{1.4.13}$$

....

....

....

$$\eta^{(n)} = \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} - y^{(n)}\frac{d\xi}{dx} \tag{1.4.14}$$

olduğu görülür. Tümevarım kullanılarak (1.4.14) ile verilen son rekürans bağıntısından $\eta^{(n)}$ nin

$$\eta^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}(\eta - y'\xi) + y^{(n+1)}\xi \tag{1.4.15}$$

şeklinde yazılabileceği gösterilebilir. Eğer,

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.4.16}$$

ifadesi, bir nokta dönüşümünün infinitesimal üreteci ise, bu durumda,

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\eta'\frac{\partial}{\partial y'}+...+\eta^{(n)}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{1.4.17}$$

ifadesi de bu üretecin n. mertebeden türeve genişlemesidir. (1.4.17) genişleme formülü ve (1.4.15) deki $\eta^{(n)}$ tanım formülü basit görünmekle beraber göründüğünden daha karmaşıktır. (1.4.15) deki türevler zincir kuralı gereği tüm argümanlara göre alınmak durumunda olduğundan n artıkça türev ifadesinin içindeki terimler giderek artar ve ilk iki adım,

$$\eta'=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-y'^2\xi_y \tag{1.4.18}$$

$$\eta''=\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y'+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2-\xi_{yy}y'^3+(\eta_y-2\xi_x-3\xi_y y')y'' \tag{1.4.19}$$

olarak verilir.

(1.4.15) , (1.4.18) , (1.4.19) den $\eta^{(n)}$ ın $y',y'',y''',...,y^{(n)}$ cinsinden polinomlar olduğunu ve bu polinomların $n\geq 2$ için $y^{(n)}$ de lineer olduğunu görüyoruz.

Örnek olarak bazı basit genişlemeler tanımlayabiliriz. Bu örnek genişlemeler üçüncü mertebe türevlere kadar yazılırsa

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}x\frac{\partial}{\partial y}+(1+y'^2)\frac{\partial}{\partial y'}+3y'y''\frac{\partial}{\partial y''}+(3y''^2+4y'y''')\frac{\partial}{\partial y'''}+... \tag{1.4.20}$$

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-y''\frac{\partial}{\partial y''}-2y'''\frac{\partial}{\partial y'''}-... \tag{1.4.21}$$

$$\begin{aligned}X=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+(y-xy')y'\frac{\partial}{\partial y'}-3xy'y''\frac{\partial}{\partial y''}\\ -(3y'y''+3xy''^2+4xy'y'''+yy''')\frac{\partial}{\partial y'''}+......\end{aligned} \tag{1.4.22}$$

$$X=\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.4.23}$$

olur.

Bu örneklerden (1.4.20),

$$\tilde{x}=x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon$$
$$\tilde{y}=x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon$$

şeklinde düzlemdeki dönmelere; (1.4.21) ise

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon} x \quad , \quad \tilde{y} = e^{\varepsilon} y$$

şeklinde basamak dönüşümlerine karşı gelen üreteçlerdir. (1.4.23) ise bir üretecin keyfi mertebeden türevlere genişleyen normal formunun nasıl bulunduğunu gösterir. Bu da $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ (veya $\xi = 0$, $\eta = 1$) ile tüm $\eta^{(n)}$ lerin özdeş olarak sıfıra eşitlemesi ile genişleyen operatör dönüşümüne karşı gelir.

1.5 Dönüşümlerin Çok Parametreli Grupları ve Üreteçleri

Dönüşümler, bir ε parametresinden çok daha fazla sayıda parametreye sahip olabilir. Yani, (1.2.1) ifadesi yerine

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \varepsilon_N) , \; \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \varepsilon_N) \; , \quad N = 1,2,3,...,r \tag{1.5.1}$$

yazılabilir. Eğer ε_N ' lerin her biri diğerinden bağımsız ve (1.5.1) dönüşümleri birimi içerirlerse tersi alınabilir ve kapalılık özelliğine sahiptirler. Bu durumda (1.5.1) dönüşümleri G_r ile belirtilen r-parametreli grubu oluştururlar. Her bir ε_N parametresine bir X_N infinitesimal üreteci

$$X_N = \xi_N \frac{\partial}{\partial x} + \eta_N \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \xi_N(x, y) = \left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_N} \right|_{\varepsilon_M = 0} \quad , \quad \eta_N(x, y) = \left. \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon_N} \right|_{\varepsilon_M = 0} \tag{1.5.2}$$

şeklinde bağlıdır.

ε_N ' in yeniden bir ölçümü ; bir çarpan ile X_N 'e karşı gelen bir ölçü olup,

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(\hat{\varepsilon}_M) \quad , \quad \varepsilon_N(0) = 0 \tag{1.5.3}$$

dönüşümü karşı gelir. Örnek vermek gerekirse,

$$\hat{\xi}_N = \left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \hat{\varepsilon}_N} \right|_{\varepsilon_L = 0} = \left. \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_M} \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \hat{\varepsilon}_N} \right|_{\hat{\varepsilon}_L = 0} = \xi_M \left. \frac{\partial \varepsilon_M}{\partial \hat{\varepsilon}_N} \right|_{\hat{\varepsilon}_L = 0} = B_N^M \, \xi_M \tag{1.5.4}$$

ifadesi lineer bir dönüşüme karşı gelir. B_N^M sabit katsayıları ile X_N arasında

$$\tilde{X}_N = B_N^M \, X_M \tag{1.5.5}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Özel bir dönüşümü belirtmek için, farklı ε_A değerlerinin birbirine nasıl bağlı olduklarını belirtmek gerekir. Yani, verilen ε_A lar tekil bir ε -

parametresinin fonksiyonları olarak göz önüne alınır. Bu özel dönüşüm için infinitesimal üreteç

$$\xi = \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_N}\frac{\partial \varepsilon_N}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = a^N \xi_N \ , \ \eta = a^N \eta_N \quad X = a^N X_N \qquad (1.5.6)$$

şeklindedir. Yani X_N taban üreteçlerinin bir lineer kombinasyonu şeklindedir.

Örneğin;

(x,y) düzleminde

$$\tilde{x} = x + \varepsilon_1 \quad , \quad \tilde{y} = y + \varepsilon_2 \qquad (1.5.7)$$

şeklinde verilen 2-parametreli grup göz önüne alındığında, üreteçler

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \qquad (1.5.8)$$

olup,esas üreteç

$$X = a^1 X_1 + a^2 X_2 = a^1 \frac{\partial}{\partial x} + a^2 \frac{\partial}{\partial y} \qquad (1.5.9)$$

şeklinde verilir. Burada a^1 ve a^2 sabitlerinin oranı (x,y)-düzleminde bir yön tayin eder. Özel bir öteleme için, bu yönde ne kadar gidileceğinin belirtilmesi gerekir. Biçimsel olarak, 1-parametreli grup ile çok parametreli grup üreteçleri arasındaki tek fark, çok-parametreli grup üretecinin lineer olarak bazı a^N parametrelerini içermesidir.

II. BÖLÜM

2. BAYAĞI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LİE NOKTA SİMETRİLERİ VE BU SİMETRİLERİNİN BULUNMASI

2.1 Temel Tanımlar ve Özellikleri

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,y) \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x,y) \tag{2.1.1}$$

şeklinde bazı parametrelere bağlı olan yada olmayan bir nokta dönüşümü, diferansiyel denklemlerin çözümlerini yine bu denklemin çözümlerine eşliyorsa ,yani, diferansiyel denklemin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $\tilde{y}(\tilde{x})$ görüntüsü yine diferansiyel denklemin bir çözümü oluyorsa, (2.1.1) dönüşümüne " adi diferansiyel denklemin simetri dönüşümü " veya kısaca " Diferansiyel denklemin simetrisi " denir. Başka bir değişle, n. mertebeden

$$H(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.1.2}$$

diferansiyel denklemin (2.1.1) simetri dönüşümü altında değişmez olduğu, yani, (2.1.1) ve (2.1.2) den

$$H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{y}''', ..., \tilde{y}^{(n)}) = 0 \tag{2.1.3}$$

olduğu ifade edilir.

Bu tanım, simetrinin varlığının diferansiyel denklemin ve bu denklemin çözümlerinin verildiği değişkenlerin seçiminden bağımsız olduğunu ifade etmesi bakımından önemlidir. Eğer keyfi bir nokta dönüşümü yapılırsa, bu durumda sadece simetrinin kapalı formu değişecektir. Basit diferansiyel denklemlerin birçok simetriye sahip olduğu düşünülebilir. Bu nedenle, karmaşık görünümlü bir diferansiyel denklemin çeşitli simetrileri bulunabilirse, aslında bu denklemin kapalı bir formda, yani,uygun olmayan değişkenlerle verilmiş basit bir denklem olduğu anlaşılır. Her ne kadar bu simetriler bir lie grubu teşkil etmeseler de, diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalarda oldukça kullanışlı olabilirler. Bu simetrilerin bulunması için kullanışlı basit bir yol yoktur.

Bundan sonra, simetri dönüşümünün

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \varepsilon) \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \varepsilon) \quad , \quad \tilde{y}' = \tilde{y}'(x, y, y'; \varepsilon), \dots \tag{2.1.4}$$

şeklinde en azından bir ε parametresi içerdiğini göz önüne alacağız. Bu dönüşüme "Lie nokta simetrisi " denir.

Şimdi simetri şartını analitik bir formda vermeye çalışalım:

(2.1.3) ifadesi ε ' nun her değeri için geçerli olacağından,

$$\left.\frac{\partial H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \dots, \tilde{y}^{(n)})}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} + \dots + \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}^{(n)}} \frac{\partial \tilde{y}^{(n)}}{\partial \varepsilon} \right)\right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{2.1.5}$$

bağıntısı elde edilir. Çünkü

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.1.6}$$

olup,

$$\xi(x, y) = \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \ \eta(x, y) = \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \ \eta'(x, y) = \left.\frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \dots\dots, \eta^{(n)}(x, y) = \left.\frac{\partial \tilde{y}^{(n)}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{2.1.7}$$

tanımları kullanılırsa, (2.1.5) ifadesinin

$$\xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y} + \eta' \frac{\partial H}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)} \frac{\partial H}{\partial y^{(n)}} = 0 \tag{2.1.8}$$

veya

$$XH = 0 \tag{2.1.9}$$

ifadelerine denk olduğu görülür.

Eğer $H = 0$ diferansiyel denklemi X üreteçli simetrilerden oluşan bir grubu içerir ve kabul ederse $XH = 0$'ı da içerir, $H = 0$ diferansiyel denklemi infinitesimal dönüşümler altında invaryanttır.

Tersini kanıtlamak için, simetrinin ortaya çıkışı değişkenlerin seçiminden bağımsız olduğu şeklindeki düşünce kullanılır;

Sadece simetrinin belirgin formu yani X'in bileşenleri bu seçime bağlıdır. Eğer $XH = 0$ denklemi bazı X' ler için geçerli ise üreteci her zaman

$$X = \frac{\partial}{\partial s}$$

şeklindeki normal formuna dönüştürülebilir. s değişkeni yeni bir $\tilde{x}$ bağımsız değişkeni olarak seçilir ve $\sim$ sembolü kaldırılırsa, (2.1.9) ifadesi

$$XH = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.10)$$

şeklini alır. Bu bağıntı genelde doğru ise, H' nın x' ten bağımsız olduğu kanısına varılabilir. Fakat (2.1.10) denkleminin sadece $H = 0$'ın çözümleri için sağlanması gerektiğinden dolayı, bu sonuç her zaman doğru olmayabilir. Çünkü, örneğin

$$H = (y'' - x^2)^2 = 0 \qquad (2.1.11)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu diferansiyel denklemde H'nın tüm birinci türevleri $H = 0$ halinde sıfıra eşitlenir. Bu durumda, herhangi bir X lineer operatörü için $XH = 0$ olduğu sağlanır. Özellikle, $H = 0$' ın çözümleri için

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

olması, H' nın x' ten bağımsız olduğunu ifade etmez. Diferansiyel denklemin bu garip durumundan kurtulmak için, H' nın tüm birinci türevlerinin $H = 0$'da sıfıra eşit olmadığı şeklinde bir kısıtlama getirilebilir. Bu da, diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi için çözülebileceği farz edilerek yapılır ve bundan dolayı

$$H = y^{(n)} - w(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0 \qquad (2.1.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $H = 0$' da

$$XH = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (2.1.13)$$

ifadesi gerçekten H' nın x' ten bağımsız olduğunu ifade eder. Böylece

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \qquad (2.1.14)$$

şeklindeki bir sonlu dönüşümün H'ı değiştirmediği, yani, diferansiyel denklemi invaryant bıraktığı görülür. Bu dönüşüm diferansiyel denklemin bir simetrisidir.

Kısaca özetlemek gerekirse, eğer $H = 0$'da H' nın tüm birinci türevleri sıfır değilse, aşağıdaki teorem geçerli olur;

Teorem.1.

$$H(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1.15)$$

şeklindeki bir adi türevli diferansiyel denklemin X üreteçli simetriler grubunu içermesi için gerek ve yeter şart,

$$XH \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, H = 0) \qquad (2.1.16)$$

olmasıdır.

Burada, $XH \equiv 0$ yazılmasının nedeni, tüm $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ değişkenlerinde bir denklemin özdeş olarak sağlanabilmesidir. Bu da simetrinin bir özelliği olarak yansır ki, (2.1.16) ifadesi (2.1.15) denkleminin her $y(x)$ çözümü için doğru olmalıdır. Ayrıca keyfi bir çözüm için $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ başlangıç değerleri herhangi bir x noktasında rahatlıkla verilebilir. " $\mathrm{mod}\, H = 0$ " ifadesi, eğer $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ verilmiş ise, $y^{(n)}$ türevinin $H = 0$ diferansiyel denklemi tarafından sabitleştireleceğini gösterir. Bu denklem değerlendirilmeden önce, $y^{(n)}$ türevi $H = 0$' ın yardımıyla $XH = 0$ denkleminden yokedilebilmelidir. Örneğin

$$H(x, y, y', y'') = y'' + y = 0 \qquad (2.1.17)$$

şeklindeki lineer diferansiyel denklemde y (ve y'') keyfi sabit bir çarpanla çarpılabilir. Yani (2.1.17) denklemi

$$\tilde{x} = x \quad , \quad \tilde{y} = (1 + \varepsilon) y \qquad (2.1.18)$$

alınıp, buradan

$$\xi = \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \ , \ \eta = \left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = y$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} = y' \qquad (2.1.19)$$

$$\eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx} = y''$$

bulunur. Bu sonuçlardan (2.1.17) diferansiyel denkleminin

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial}{\partial y''} = y \frac{\partial}{\partial y} + y' \frac{\partial}{\partial y'} + y'' \frac{\partial}{\partial y''} \qquad (2.1.20)$$

şeklinde bir simetri kabul ettiği görülür. Bu da

$$XH = (y\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{\partial}{\partial y'} + y''\frac{\partial}{\partial y''})(y'' + y) = y + y'' \tag{2.1.21}$$

olduğunu verir ve XH ifadesi sadece $H = 0$ olduğu hesaba katılırsa sıfıra eşit, yani $XH = 0$ olur.

2.2 Bayağı Diferansiyel Denklemler ve Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

n. mertebeden adi türevli diferansiyel denklemler ile

$$Af = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} f = a^i(x^r)\frac{\partial}{\partial x^i} f(x^r) = 0, \qquad \text{i,r=1,2,...,n+1} \tag{2.2.1}$$

şeklinde (n+1) değişkenli birinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki vardır.

$Af = 0$ ve $\lambda(x^k)Af = 0$ ifadeleri aynı çözüm kümesine sahiptiler. Eğer f bir çözüm ise, keyfi $F(f)$ fonksiyonu da bir çözümdür.

X operatörünün genel durumunda belirlendiği gibi

$$A = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.2.2}$$

Lineer operatörü her zaman uygun

$$s = s(x^i)\ ,\ \varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x^i)\ , \qquad \alpha = 1,2,3,\ldots,n \tag{2.2.3}$$

koordinatları ile

$$A\varphi^\alpha = 0 \tag{2.2.4}$$

verilerek

$$A = \frac{\partial}{\partial s} \tag{2.2.5}$$

şeklinde kendi normal formuna dönüştürülebilir.

Burada ne s, nede φ^α, tek şekilde belirlenemezler. $A = \frac{\partial}{\partial s}$ ve $A\varphi^\alpha = 0$ ifadelerini etkilemeksizin, her zaman

$$s = s + S(\varphi^\alpha) \tag{2.2.6}$$

$$\hat{\varphi}^{\alpha} = \hat{\varphi}^{\alpha}(\varphi^{\beta}) \tag{2.2.7}$$

dönüşümleri yapılabilir. (2.2.2) , (2.2.3) , (2.2.4) ve (2.2.5) bağıntılarından (2.2.1) denkleminin bağımsız çözümlerinin sayısının φ^{α} fonksiyonlarının sayısına eşit olduğu görülür. Bu sayı n' e eşittir. $Af = 0$ denklemini çözme problemi ile, A' nın (2.2.5) ile verilen normal formuna dönüştürülmesi problemleri aynı problemlerdir.

Tersine, (n+1)-koordinatlı uzayda verilen bir $Af = 0$ denkleminin çözümleri olan n tane bağımsız $\varphi^{\alpha}(x^{i})$ fonksiyonlarının bir sistemi verilmiş ise, bu durumda φ^{α}, A' yı sabit olmayan bir λ çarpanına kadar belirler. Eğer φ^{α} ve bazı $s(x^{i})$ fonksiyonları koordinat gibi kullanılırsa, bu durumda, A operatörü $\frac{\partial}{\partial s}$ operatörü ile orantılı olmalıdır.

Şimdi adi türevli diferansiyel denklemler ile, (2.2.1) formundaki kısmi türevli diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiyi kuralım. Önce; n. mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi

$$y^{(n)} = w(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.2.8}$$

şeklinde yazalım. Bu denkleme karşı gelen (n+1) değişkenli kısmi türevli diferansiyel denklem,

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + ... + w \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) f = 0 \tag{2.2.9}$$

dir. Bu denklemdeki $y', y'', y''', ..., y^{(n-1)}$ ler aynı x ve y gibi, bağımsız değişkenler olarak davranırlar. (2.2.8) ve (2.2.9) denklemleri arasındaki ilişki, her ikisinde de bulunan w fonksiyonuna dayanır. Bu denklemlerin tamamen denk olmaları, aralarındaki bağıntıyı daha da derileştirir. Bu ifadeler arasındaki bağıntı, adi türevli diferansiyel denklemlerin ilk integralleri tarafından sağlanır. İlk integral, (2.2.8)' in çözümleri boyunca sabit olan.

$$z = z(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{2.2.10}$$

fonksiyonudur. Eğer $y^{(n)}$ ile w yer değiştirirse

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + y' \frac{\partial z}{\partial y} + y'' \frac{\partial z}{\partial y'} + ... + y^{(n)} \frac{\partial z}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \tag{2.2.11}$$

elde edilir. Buradan

$$z(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = z_0 \qquad (2.2.12)$$

bağıntısının $y^{(n-1)}$' e göre çözülmesiyle,

$$y^{(n-1)} = \hat{w}(x, y, y', y'', ..., y^{(n-2)}; z_0) \qquad (2.2.13)$$

elde edilir. İlk integral, diferansiyel denklemin mertebesini bir basamak düşürmede kullanılabilir. (2.2.11) ile verilen ilk integral tanımı ile, (2.2.9) ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklem karşılaştırıldığında, $Af = 0$'ın her φ^{α} çözümünün $y^{(n)} = w$ denkleminin bir z ilk integrali olduğu hemen görülür ve terside doğrudur. φ^{α} sabit olmadıkça,

$$\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \qquad (2.2.14)$$

ile

$$A\varphi^{\alpha} = 0 \qquad (2.2.15)$$

ifadeleri tezatlık oluşturduklarından, φ^{α}' nın $y^{(n-1)}$' e bağlı olması gerekir. Buradan başka , n tane bağımsız φ^{α} çözümlerinin her tam kümesi, y' nin tüm türevlerinin

$$\varphi^{\alpha}(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) = \varphi^{\alpha}{}_0 \quad , \quad \alpha = 1,2,3,...,n \qquad (2.2.16)$$

sisteminden elemine edilmesi ile elde edilebilen adi diferansiyel denklemlerin

$$y = y(x, \varphi_0^{\alpha}) \qquad (2.2.17)$$

şeklindeki genel çözümüne karşı gelir. Buradaki φ_0^{α} sabitleri, aslında, diferansiyel denklemin integrasyon sabitleri (başlangıç değerleri) dir.

Bunu bir örnekle ifade edersek;

$$y'' = w(x, y, y') = -y \qquad (2.2.18)$$

diferansiyel denklemini ve ona karşı gelen

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial y'} \right) f = 0 \qquad (2.2.19)$$

şeklindeki kısmi türevli diferansiyel denklemi göz önüne alalım. (2.2.18) diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (2.2.20)$$

tir. Eğer

$$c_1 = -(\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_0^2 \quad , \quad c_2 = (\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi_0^2 \tag{2.2.21}$$

olarak seçilirse, genel çözüm

$$y = -(\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_0^2 \cos x + (\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi_0^2 \sin x = (\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \sin(x - \varphi_0^2) \tag{2.2.22}$$

olarak bulunur. (2.2.18) diferansiyel denklemine karşı gelen (2.2.19) kısmi türevli diferansiyel denklemi göz önüne alalım,

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial y'}\right)f = 0 \tag{2.2.23}$$

denkleminin iki bağımsız çözümü olan φ^1 ve φ^2

$$\varphi^1 = y^2 + (y')^2 \tag{2.2.24}$$

$$\varphi^2 = x - arctg\left(\frac{y}{y'}\right) \tag{2.2.25}$$

şeklinde bulunur. (2.2.24) denkleminde $\varphi^1 = \varphi_0^1$ ve (2.2.25) çözümünde $\varphi^2 = \varphi_0^2$ alınırsa,

$$y = y(x, \varphi_0^1, \varphi_0^2) = (\varphi_0^1)^{\frac{1}{2}} \sin(x - \varphi_0^2) \tag{2.2.26}$$

gibi bulur. Bu çözüm daha önce bilinene yolla bulunan (2.2.22) çözümü ile aynıdır.

2.3 Simetri İçin İkinci Bir Tanım

Simetrinin birinci tanımında görüldüğü gibi $y^{(n)} = w$ diferansiyel denklemi bir A lineer operatörü vasıtası ile

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \dots + w\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right)f = 0 \tag{2.3.1}$$

gibi ifade edilebileceğinden ve herhangi Lie nokta simetrisi tamamen kendi

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y'} + \eta''\frac{\partial}{\partial y''} + \dots + \eta^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{2.3.2}$$

üreteci ile belirlendiğinden, diferansiyel denklem (A operatörü) ve simetri (X üreteci) aynı konumdadır. X üreticinin, (2.3.1) denkleminin simetrisi olması için sağlanması gereken şartlar nelerdir ? (2.3.1) denkleminin n tane bağımsız φ^{α} çözümlerinin tam bir kümesini alalım. Simetri tanımından bilindiği gibi, simetri, çözümleri çözümlere eşler. Bu durumda, $X\varphi^{\alpha}$ yine bir çözüm olmalıdır. Buradan

$$X\varphi^{\alpha} = \Omega^{\alpha}(\varphi^{\alpha}) \quad , \quad A\varphi^{\alpha} = 0 = A\Omega^{\alpha} \tag{2.3.3}$$

elde edilir. Bilinmeyen Ω^{α} fonksiyonlarından kurtulmak için, yine A ve X gibi lineer operatör olan ve

$$[X,A] = -(A\xi)\frac{\partial}{\partial x} + \{(Xy') - (A\eta)\}\frac{\partial}{\partial y} + ... + \{(Xw) - (A\eta^{(n-1)})\}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{2.3.4}$$

ile tanımlanan, X ve A' nın komütatörünü göz önüne alalım. (2.3.3)' den dolayı,

$$[X,A]\varphi^{\alpha} = X(A\varphi^{\alpha}) - A(X\varphi^{\alpha}) = 0 \tag{2.3.5}$$

olup, $A\varphi^{\alpha} = 0$ ve $X\varphi^{\alpha} = \Omega^{\alpha}$ olduğundan,

$$[X,A] = -A\Omega^{\alpha} = 0 \tag{2.3.6}$$

elde edilir. Bu ifade tüm φ^{α} fonksiyonları için geçerli olduğundan,

$$[X,A]f = 0 \tag{2.3.7}$$

denklemi ile

$$Af = 0 \tag{2.3.8}$$

denklemi aynı çözüm kümesine sahip olur.

Böylece, bu iki operatör sadece genelde sabit olmayan bir λ çarpanı kadar farklıdırlar, yani, X üretecinin (2.3.1) denkleminin simetrisi olması için

$$[X,A] = \lambda(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})A \tag{2.3.9}$$

olmalıdır.

Aslında, $[X,A]$ ve A operatörleri birer vektördürler. Bu nedenle, (2.3.9) ifadesi aslında (n+1) denklemden oluşan bir sistem gibidir. (2.1.16)' deki $XH = 0$ tanımı sadece tek bir denklem olduğundan, ilk bakışta n+1 sayısı şaşırtıcı olabilir. Bu noktayı açıklamak için, (2.3.9) ifadesinin değişik bileşenlerini göz önüne alalım. Yani, (2.3.4) bağıntısını kullanarak, bu denklemin her iki yanındaki

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y'}, ...$$

terimlerinin katsayılarını karşılaştıralım:

$\frac{\partial}{\partial x}$ ' in bileşenlerinin karşılaştırılması, λ fonksiyonunun tanımı olan,

$$-A\xi = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \lambda \tag{2.3.10}$$

ifadesini verir. (2.3.9) ifadesinin geri kalan kısmına geçmeden önce, y ' nin türevleri bağımsız değişken olarak davranmasına karşın, (2.2.9) ile A operatörünün, $\text{mod}\, y^{(n)} = w$ ortaya çıktığı zaman, $y^{(n)}$ ile $w(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ ' in yer değişimi olduğunu belirten,

$$A = \frac{d}{dx} \tag{2.3.11}$$

operatörü şeklinde yazılabileceği görülür. (2.3.2) , (2.3.4) ve (2.3.10) den dolayı (2.3.9) denklemi uygulamada $\text{mod}\, y^{(n)} = w$ ' in sadece sol tarafındaki $\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$ teriminin katsayısını ilgilendirmektedir. Bu durumda (2.3.9) denklemi,

$$\left(\eta' - \frac{d\eta}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\eta'' - \frac{d\eta'}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \left(Xw - \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$$
$$= -\frac{d\xi}{dx}\left(y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + w\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right) \quad (\text{mod}\, y^{(n)} = w) \tag{2.3.12}$$

şeklinde yazılır. $\eta^{(n)}$ ' nin

$$\eta^{(n)} = \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} - y^{(n)}\frac{d\xi}{dx} \tag{2.3.13}$$

şeklindeki tanımından dolayı, $\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}$ ' in katsayıları dışında

$$Xw = \eta^{(n)} \quad (\text{mod}\, y^{(n)} = w) \tag{2.3.14}$$

sonucunu ortaya koyan çoğu terimin sadeleştiği görülür. Ama bu durum, tamamen altarnatif simetri koşulu olan,

$$XH \equiv 0 \quad (\text{mod}\, H = 0) \tag{2.3.15}$$

bağıntısına, $H = y^{(n)} - w$ ifadesinin eklenmesi ile elde edilen bir sonuçtur. Sonuç olarak, probleme yapılan bu iki yaklaşım ve simetrinin (2.1.16) ve (2.3.9) ile verilen iki tanımın tamamen denk olduğu görülür. A lineer operatörünün yardımı ile simetri şartının formüle edilmesi, diferansiyel denklemlerin simetrilerinin bulunması ve bu simetrilerden faydalanılarak diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Kısaca özetlenirse, n. mertebeden bir diferansiyel denklem

$$H = H(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.3.16}$$

veya,

$$y^{(n)} = w(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.3.17}$$

veya,

$$A\,f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + w \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) f = 0 \tag{2.3.18}$$

formlarından herhangi biri ile verilebilir.

Eğer,

$$XH \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} H = 0) \tag{2.3.19}$$

veya eşdeğer olarak

$$[X, A] = \lambda\, A \tag{2.3.20}$$

bağıntıları sağlanırsa, (2.3.16) , (2.3.17) veya (2.3.18) formlarından biri ile ifade edilebilen diferansiyel denklem

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta'(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{2.3.21}$$

$$\left(\eta^{(n)} = \frac{d\eta^{(n-1)}}{dx} - y^{(n)} \frac{d\xi}{dx} \right)$$

üreteçli bir Lie nokta simetrisi kabul eder.

2.4 Genel Hatırlatmalar

$$H(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \tag{2.4.1}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemin Lie nokta simetrilerinin bulunması,

$$XH=0 \quad (\mathrm{mod}\, H=0) \tag{2.4.2}$$

ile verilen simetri şartının $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ genel çözümünün bulunması anlamına gelir. (2.4.1) diferansiyel denkleminin regülerliğini sağlamak için

$$y^{(n)}=w(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}) \tag{2.4.3}$$

formundaki denklemleri göz önüne alalım.

$$Xw=\eta^{(n)} \quad (\mathrm{mod}\, y^{(n)}=w) \tag{2.4.4}$$

ile verilen ifadeden, genel haldeki $H(x,y,y',y'',...,y^{(n)})$ için

$$XH=\left[\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\eta'\frac{\partial}{\partial y'}+\eta''\frac{\partial}{\partial y''}+...+\eta^{(n)}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}\right]H$$

denklemi alınarak; (2.4.3) için

$$Xw=\left[\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\eta'\frac{\partial}{\partial y'}+\eta''\frac{\partial}{\partial y''}+...+\eta^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right]w=\eta^{(n)} \tag{2.4.5}$$

simetri koşulu elde edilir. Buradan

$$\eta^{(i)}=\frac{d\eta^{(i-1)}}{dx}-y^{(i)}\frac{d\xi}{dx} \tag{2.4.6}$$

ile verilir ve $\eta^{(n)}$ ifadesinde görülen $y^{(n)}$ w ile yerdeğiştirilir.

(2.4.5) simetri koşulu, ξ ve η fonksiyonlarının her ikisine göre bir lineer denklemdir. Ayrıca bu koşul, tüm $x,y,y',y'',...,y^{(n)}$ değişkenlerinde özdeş olarak sağlanabildiğinden ve sadece ξ ve η , x ile y' ye bağlı fonksiyonlar olduğundan, sonlu tane farklı kısmi türevli diferansiyel denkleme parçalanır. Bu diferansiyel denklemlerin uygun aşikâr çözümleri vardır ve bu çözümler genellikle bulunabilmektedir. Çözümler sırasında genellikle 1. mertebeden Kısmi türevli denklemlerle karşılaşılır. Bu durum bizi birinci mertebeden diferansiyel denklemler ile genel lineer diferansiyel denklemlere götürür.

2.5 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem $F = (x, y, y') = 0$ yada $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ şeklinde verilir. Bu denklemler y' ' ye göre çözüldüğünde $y' = f(x,y)$ elde edilir. Buradan 1.mertebeden diferansiyel denklem için $y' = w(x,y)$ adi türevli diferansiyel denklemini ve

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.5.1)$$

operatörünü alarak, simetri koşulunu

$$Xw = \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}\right)w = w\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - w\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (2.5.2)$$

yada

$$\xi\, w_x + \xi_y\, w^2 + \xi_x\, w = \eta_x - \eta\, w_y + \eta_y\, w \qquad (2.5.3)$$

şeklinde yazabiliriz.

$w(x,y)$ fonksiyonu ile verilen bu kısmi türevli diferansiyel denklem daima sıfırdan farklı $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ çözümlerine sahiptir. Bu çözümü ξ (yada η) olarak düşünelim. Bu durumda (2.5.3) denkleminde ξ (yada η)' yı hesaplayabiliriz. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem daima sonsuz sayıda simetriye sahiptir.

Bu tip Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kümesi bir parametreli eğri ailesidir. Simetri işlemi tanım olarak çözümleri çözümlere tasvir eden bir dönüşümdür. Bu simetrinin operatörü olan X üreteci, çözümleri komşu çözümlere götüren bir vektör alanına karşı gelir. Böyle bir vektör alanı daima vardır. X ' in herhangi bir noktadaki yönü tanımlanabilir. X ' in iki farklı seçimi X ve $\hat{X}$ ' nin integral eğrilerinin yönünün hareketin de fark eder. Analitik olarak eğer X bir simetri ise,

$$\hat{X} = X + \mu(x,y)\,A. \qquad (2.5.4)$$

bağıntısıyla verilen $\hat{X}$ operatörü de bir simetridir. Çünkü,

$$\left[\hat{X}, A\right] = \hat{\lambda}\, A \qquad (2.5.5)$$

geçerlidir ve $\hat{\eta}$ ile $\hat{\xi}$, sadece x ile y' nin fonksiyonlarıdırlar. Nitekim,

$$\xi\, w_x + \xi_y\, w^2 + \xi_x\, w = \eta_x - \eta\, w_y + \eta_y\, w \tag{2.5.6}$$

denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu çözümlerin herhangi birini bulmak için sistematik olmayan bir yol vardır. (2.5.6) ile verilen simetri koşuluna basit durumlarda bir çözüm verilebilir. Bu duruma uyan birkaç denklem simetri üreteçleri ile birlikte

$$y' = \frac{-(y+2x)}{x} \quad , \quad X = \frac{1}{y+2x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5.7}$$

$$y' = f(y)g(x) \quad , \quad X = \frac{1}{g(x)}\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5.8}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{x}\tan(x-y) \quad , \quad X = \frac{1}{x\cos(x-y)}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.5.9}$$

şeklinde verilebilir.

2.6 İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$$y'' = w(x, y, y') \tag{2.6.1}$$

2.mertebe diferansiyel denklemi için (2.4.5) ile verilen simetri şartı

$$Xw = \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y'}\right)w = \eta'' \tag{2.6.2}$$

şeklini alır. η' , η'' için,

$$\eta' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y' - \xi_y\, y'^2$$

ve

$$\eta'' = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{yy})\, y'^2 - \xi_{yy}\, y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y\, y')\, y''$$

ifadelerini y'' yerine w yazarak kullanırsak

$$\begin{aligned} w(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y\, y') - w_x\,\xi - w_y\,\eta - \left\{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\, y' - \xi_y\, y'^2\right\} w_{y'} + \eta_{xx} \\ + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\, y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\, y'^2 - \xi_{yy} y'^3 = 0 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemden $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonları belirlenir (2.4.1) ' deki gibi, bu ifade x, y, y' göre bir özdeşlik olup, ayrıca ξ ve η fonksiyonları y' ' ye bağlı olmadıkları için, (2.6.3) denklemi y' 'den bağımsız denklemlere ayrılır.

2.7 Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler ve n. Mertebeden Genel Lineer Denklem

Mertebesi ikiden büyük adi türevli diferansiyel denklemlerin simetrilerini bulmak için, ikinci mertebeden denklemler diferansiyel denklemler için yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak simetriler hesaplanabilir.

İlk önce $\eta^{(i)}$ için

$$\eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - y^{(i)}\frac{d\xi}{dx} \qquad i=1,2,3,\ldots,n \tag{2.7.1}$$

yazılır. Bu taktirde simetri koşulu ya

$$XH = 0 \quad (\operatorname{mod} H = 0)$$

ya da

$$Xw = \left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \eta^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}}\right) w = \eta^{(n)}$$

olur. Buradan ortaya çıkan kısmi türevli diferansiyel denklemlerden $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonları hesaplanır. n sayısının artması oldukça uzun işlemleri ortaya çıkarır. Ancak bu işlemler ne kadar uzun olursa olsun, ξ ve η 'lar daima lineerdir. Simetriler, diferansiyel denklemlerin çözülmesiyle bulunur. Bunun nedeni de simetrilerin en çok

$$\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ x\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ y\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ a\,x\frac{\partial}{\partial x} + b\,y\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7.2}$$

şeklinde ortaya çıkmasıdır. Bu simetriler ise sırasıyla

$$\tilde{x} = x + \varepsilon\ ;\ \tilde{x} = (1+\varepsilon)x\ ;\ \tilde{y} = y + \varepsilon\ ;\ \tilde{x} = (1+\varepsilon)^a x\ ;\ \tilde{y} = (1+\varepsilon)^a y \tag{2.7.3}$$

sonlu dönüşümlerine karşılık gelirler

Örneğin $\quad 2yy''' - 3y''^2 = 0 \quad , \quad H(y^{(iv)}, y'', y', y) = 0 \quad , \quad y''' - yy'' + y'^2 = 0$

denklemlerinin simetrileri sırası ile $X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + cy\dfrac{\partial}{\partial y'}$, $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$,

$X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ dir.

Genel lineer diferansiyel denklemler bazen ,

$$L(y)=\sum_{i=0}^{n} f_{i(x)}\, y^{(i)}=g\,(x) \qquad (2.7.4)$$

olarak karşımıza çıkar. Bu denklemin genel çözümü; $U_k(x)$ homojen denklemin n adet lineer bağımsız çözümü, $y_{inh}(x)$ de (2.7.4) ikinci taraflı denkleminin bir özel çözümü olmak üzere

$$y(x)=y_{inh}(x)+\sum_{k=1}^{n} C_k\, U_k\,(x)$$

şeklindedir. Buradan n tane bağımsız $U_k(x)$ fonksiyonu sabit bir katı $y(x)$ çözümüne eklenebilir ve bu da bir çözümdür.

Bu ise üreteci

$$X=\eta(x)\frac{\partial}{\partial y}=\sum_{k=1}^{n} a^k\, U_k\,(x)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.7.5)$$

olan

$$\tilde{y}=y+\varepsilon\sum_{k=1}^{n} a^k\, U_k\,(x) \quad ; \quad a^k=sabit \qquad (2.7.6)$$

şeklinde bir simetri dönüşümüdür.

n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklem, Lie nokta simetrilerinin en küçük n-parametreli bir grubunu içerir.

Simetrinin belirlenmesi ile, doğal olarak n.ci mertebeden bir diferansiyel denklemi çözmüş oluruz. Çünkü η fonksiyonu bu denklemin bir çözümüdür.

Kısaca, eğer n yada daha fazla simetriye sahip (lineer olmayan) bir diferansiyel denklemle karşılaşırsak, bu denklemde simetrilerin bulunması, aslında denklemin, uygun olmayan bir koordinat sisteminde lineer bir denklem ile ifade edilebileceği yolunda bir ipucu verir. Bunun bir örneği $y''=(x-y)y'^3$ denklemidir. Bu denklemin sekiz parametreli bir grub simetrisi gösterdiğini ve x ile y nin yer değiştirmesi ile basit bir şekilde lineer bir denkleme dönüştürülebildiğini biliyoruz. Dolayısı ile n simetrinin var olması durumunda , verilen denklemi lineer şekle dönüştürmek oldukça yararlıdır. Bunu yapmanın en kolay yolu üreteç fonksiyonu (2.7.5) formuna dönüştürmektedir. Fakat, daha genel bir ifade ile, simetri koşulunun daima lineer olması önemlidir ve bunlar çözülebilirse, diferansiyel denklemin çözümünü; denklemi lineer bir şekle dönüştürmeden oluşturulabilir.

Diğer taraftan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri keyfi fonksiyonlardan bağımsız olmaktadır. Acaba keyfi fonksiyonlar tahmin edilebilir mi? Bu sorunun cevabı için,

$$\eta^{(n)} = Xw$$

simetri koşulu alınarak, $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$' nin n. kısmi türevini içeren terimlere bakılır. Çünkü

$$\eta^{(n)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^n (\eta - y'\xi) + \ldots$$

$$\eta^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left[y'^m \frac{\partial^n \eta}{(\partial x)^{n-m}(\partial y)^m} - y^{n(m+1)} \frac{\partial^n \xi}{(\partial x)^{n-m}(\partial y)^m} \right] + \ldots \qquad (2.7.7)$$

İfadesinin terimleri n>1 için seçilerek, y'^k' nın katsayıları simetri koşulunda sıfıra eşitlenerek ayrılabilir. Sonuç olarak,

ξ ve η ile onların daha düşüş mertebeden türevlerinde lineer olan terimleri =

$$\binom{n}{k} \frac{\partial^n \eta}{(\partial x)^{n-k}(\partial y)^k} - \binom{n}{k-1} \frac{\partial^n \xi}{(\partial x)^{n-k-1}(\partial y)^{k-1}} \qquad (2.7.8)$$

dir.

Burada n. türevden (n+2) tane denklem vardır. Onların x ve y' ye göre diferansiyelini aldığımızda, 2(n+2) tane bağımsız denklem buluruz. Bunlar yüksek mertebeden türevlerin bir lineer kombinasyonu olarak $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$' nin (n+1) türevlerinin tümünü bulma imkanı verir. Ancak böyle bir sistem sadece sonlu sayıda lineer bağımsız çözüm içerir. Verilen bir (x,y) noktasında ilk olarak ξ ve η ile bunların yüksek mertebeden türevleri tam olarak verilebilir. Bu da ξ ve η' nın (n>1 için) keyfi sabitler üzerinden bağımlı ancak keyfi fonksiyonlar üzerinden bağımlı olmayacağı anlamına gelir.

(2.7.8) koşuluna ilave olarak, simetri koşulunun kalan kısmı sağlanmakta olduğundan, simetrilerin uygun sayısı yalnızca (2.7.8) denkleminde bulunmuş olanlardan çok daha küçüktür. Buradan n>2 için n. mertebeden diferansiyel denklemler ile bunların bulunmuş olan Lie nokta simetrilerinin r sayısı r>n+4 ile sınırlandığı görülür.

III. BÖLÜM

3. BİR SİMETRİSİ BİLİNEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ LİE CEBRİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

$$y' = w(x,y) \Leftrightarrow Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0 \tag{3.1.1}$$

şeklinde 1.mertebeden bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım ve bu denklemin

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.1.2}$$

üreteçli bir simetri kabul ettiğini varsayalım. Acaba simetrileri bir integrasyon işleminde, yani, diferansiyel denklemin çözümünde kullanabilir miyiz? Bunu görmek için

$$Af = 0 \tag{3.1.3}$$

denkleminin bir ϕ çözümünü göz önüne alalım. X simetri olduğu için çözümleri çözümlere eşler. Bu durumda (3.1.3) ' ün tüm çözümleri ϕ 'nin fonksiyonları olup

$$X\phi = \Omega(\phi) \tag{3.1.4}$$

olur.

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{1}{\Omega(\phi)} \tag{3.1.5}$$

şeklinde uygun bir $\varphi(\phi)$ fonksiyonu alınarak

$$X\varphi = \xi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$X\varphi = \frac{d\varphi}{d\phi}\left(\xi\frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$X\varphi = \frac{1}{\Omega(\phi)}X\phi = \frac{1}{\Omega(\phi)}\Omega(\phi) = 1 \tag{3.1.6}$$

bulunur.

Aynı şekilde,

$$A\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+w\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{d\varphi}{d\phi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+w\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

$$A\varphi=\frac{d\varphi}{d\phi}A\phi=0 \quad , \quad (A\phi=0) \tag{3.1.7}$$

olarak bulunur. (3.1.6) ve (3.1.7) ifadeleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$X\varphi=\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}=1 \tag{3.1.8}$$

$$A\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+w\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{3.1.9}$$

elde edilir. Eğer X ; A' nın bir çarpanı değil ise, $\partial\varphi/\partial x=\varphi_x$ ve $\partial\varphi/\partial y=\varphi_y$ ifadeleri çözülebilir. Yani, (3.1.8) ve (3.1.9) denklemlerinden oluşan sistemden

$$\varphi_x=-\frac{w}{\eta-w\xi} \tag{3.1.10}$$

$$\varphi_y=\frac{1}{\eta-w\xi} \tag{3.1.11}$$

ve

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \Rightarrow d\varphi=\frac{dy-w\,dx}{\eta-w\xi} \tag{3.1.12}$$

olarak bulunur. Buradan integral alınarak

$$\varphi(x,y)=\int\frac{dy-w(x,y)\,dx}{\eta(x,y)-w(x,y)\,\xi(x,y)} \tag{3.1.13}$$

elde edilir. Bu ifade (3.1.3) denkleminin genel çözümüdür. Ayrıca φ fonksiyonu

$$y'=w(x,y) \tag{3.1.14}$$

diferansiyel denkleminin daima ilk integrali olur. Bun durumda şu teorem verilebilir.

Teorem 1. :

(3.1.14) diferansiyel denklemi eğer;

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.1.15}$$

üreteçli bir simetri kabul ederse, bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\varphi(x,y) = \int \frac{dy - w(x,y)\,dx}{\eta(x,y) - w(x,y)\,\xi(x,y)} = \varphi_0 = sabit \tag{3.1.16}$$

şeklinde bir çizgi integrali ile verilir.

Burada bir integrasyon çarpanı yardımıyla diferansiyel denklemin integre edilmesi işlemi ile Teorem 1. arasında yakın bir ilişki vardır. Eğer bir $M(x,y)$ fonksiyonu, φ' nin

$$dy - w(x,y)\,dx = 0 \tag{3.1.17}$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı ise,

$$d\varphi = M(x,y)[dy - w(x,y)dx] \tag{3.1.18}$$

olur. (3.1.12) ile (3.1.18) denklemleri karşılaştırıldığında, (3.1.12)' deki

$$\frac{1}{\eta(x,y) - w(x,y)\,\xi(x,y)} = [\eta(x,y) - w(x,y)\,\xi(x,y)]^{-1} \tag{3.1.19}$$

ifadesinin bir integrasyon çarpanı olduğu görülür.

$$Xw = \eta' \tag{3.1.20}$$

bağıntısından,

$$\xi\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial \xi}{\partial x} + w^2\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + w\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.1.21}$$

idi. Dikkat edilirse, bu ifadenin tam olarak (3.1.18) ifadesinin

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(M\,w) \quad ,\left(M = \frac{1}{\eta - w\xi}\right) \tag{3.1.22}$$

şeklindeki integrallenebilme şartına denk olduğu görülür. Gerçekten de,

$$M = \frac{1}{(\eta - w\xi)} \tag{3.1.23}$$

olup, buradan

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\eta-w\xi}\right)=\frac{1}{(\eta-w\xi)^2}\left\{-\frac{\partial \eta}{\partial x}+\xi\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial \xi}{\partial x}\right\} \tag{3.1.24}$$

ve

$$-\frac{\partial}{\partial y}(Mw)=\frac{w}{(\eta-w\xi)^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{w\xi}{(\eta-w\xi)^2}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{w^2}{(\eta-w\xi)^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{1}{(\eta-w\xi)}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.1.25}$$

bulunur.

$$\frac{\partial M}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}(M\,w) \tag{3.1.26}$$

denkleminde de

$$\frac{1}{(\eta-w\xi)^2}\left\{-\frac{\partial \eta}{\partial x}+\xi\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial \xi}{\partial x}\right\}=w\frac{\partial \eta}{\partial y}-\eta\frac{\partial w}{\partial y}-w^2\frac{\partial \xi}{\partial y} \tag{3.1.27}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$w\frac{\partial \xi}{\partial x}+\xi\frac{\partial w}{\partial x}+w^2\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}+w\frac{\partial \eta}{\partial y}-\eta\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3.1.28}$$

şeklinde (3.1.21) ifadesi elde edilmiş olur. Sonuç olarak (3.1.21) ile (3.1.22) bağıntılarının birbirlerine denk olduğu görülür. Bu durumda Teorem 1. yeniden aşağıdaki gibi düzenlenir.

Teorem 2. :

Eğer (3.1.14) diferansiyel denklemi

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.1.29}$$

üreteçli bir simetri kabul ederse,

$$M=\frac{1}{(\eta-w\xi)} \tag{3.1.30}$$

ifadesi, diferansiyel denklemin bir integrasyon çarpanı olur.

3.2 Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklemler

n. mertebeden bir diferansiyel denklemin

$$y^{(n)} = w(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.2.1}$$

veya

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + y''' \frac{\partial}{\partial y''} + ... + w \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \right) f = 0 \tag{3.2.2}$$

şeklinde verildiğini ve bu denklemin

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta'(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} + ... + \eta^{(n-1)}(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \frac{\partial}{\partial y^{(n-1)}} \tag{3.2.3}$$

şeklinde bir simetri kabul ettiğini farzedelim.

Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, benzer yolla, bu simetri ifadesi diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasında kullanalım.

Bunun için, X simetri üretecinin

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial s}$$

şeklinde normal forma dönüştürülebildiğini varsayalım. (x, y) uzayında böyle bir dönüşüm yapmak daima mümkündür. Örneğin,

$$\widetilde{x} = t(x, y) \quad , \quad \widetilde{y} = s(x, y) \tag{3.2.4}$$

seçilerek,

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial s} \tag{3.2.5}$$

elde edilir. (3.2.1) ile verilen diferansiyel denklem bu koordinatlara geçildiğinde, $s(t)$ fonksiyonu için,

$$s^{(n)} = \widetilde{w}(t, s, s', s'', ..., s^{(n-1)}) \tag{3.2.6}$$

şeklini alır. Fakat

$$Xw = \eta^{(n)} \qquad (\text{mod } y^{(n)} = w) \tag{3.2.7}$$

olduğundan, simetri bileşenlerinin

$$\xi = \frac{\partial \overline{x}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{ve} \quad \eta = \frac{\partial \overline{y}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{3.2.8}$$

şeklinde olduğu göz önüne alınırsa, buradan

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} = 0 \ , \ \eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx} = 0 \ , \ \eta''' = \eta^{(iv)} = \ldots = \eta^{(n)} = 0 \tag{3.2.9}$$

bulunur.

$$X\,w = \eta^{(n)} \quad , \quad \widetilde{X}\,\widetilde{w} = \widetilde{\eta}^{(n)} \tag{3.2.10}$$

olup, $n \geq 1$ için tüm $\widetilde{\eta}^{(n)}$' lerin sıfır oldukları görülür. $Xw = 0$ ' a karşılık

$$\widetilde{X}\,\widetilde{w} = 0 = \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial s}$$

olacağından, $\widetilde{w}$ ' nın s 'den bağımsız olduğu anlaşılır. Yani,

$$s^{(n)} = \widetilde{w}(t, s', s'', \ldots, s^{(n-1)}) \tag{3.2.11}$$

olur. Dolayısıyla (3.2.11) ifadesi $s'(t)$ fonksiyonu için (n-1).mertebeden bir diferansiyel denklem olur. Böylece, eğer (t,s) şeklinde uygun koordinatlar bulunursa, denklem n. mertebeden diferansiyel denkleme indirgenmiş olur ve

$$s = \int s'(t)\,dt \quad , \quad (s' = \frac{ds}{dt}) \tag{3.2.12}$$

bulunur. Burada akla gelebilecek ilk soru, $s(x,y)$ ve $t(x,y)$ fonksiyonlarının nasıl bulunacağıdır. Üretecin istenen $\partial/\partial s$ formunu elde etmek için, $s(x,y)$ ve $t(x,y)$ fonksiyonlarının

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s}$$

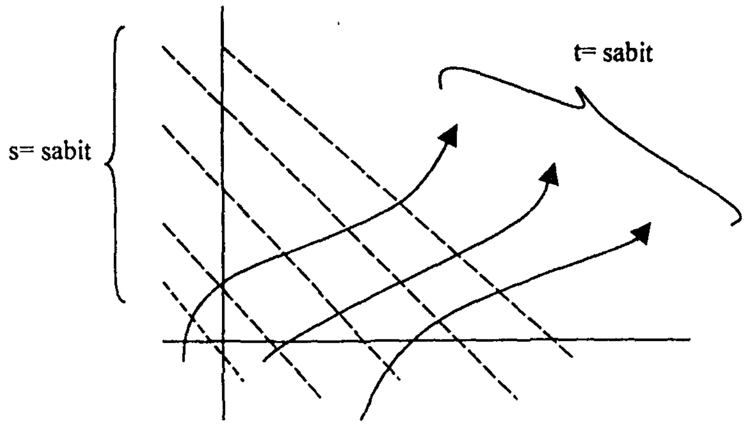
için,

$$X\,s = \xi\frac{\partial s}{\partial x} + \eta\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \qquad ,(Xs = \frac{\partial}{\partial s}s = 1) \tag{3.2.13}$$

$$X\,t = \xi\frac{\partial t}{\partial x} + \eta\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \qquad ,(Xt = \frac{\partial}{\partial s}t = 0) \tag{3.2.14}$$

ifadeleri sağlanması gerektiği görülebilir.

Geometrik olarak, (3.2.13) ve (3.2.14) ifadelerinden çözümlenebilen $s(x,y)$ ve $t(x,y)$ fonksiyonları, koordinat çizgileri gibi olan $s = sabit$ çizgileri ile birlikte, grubun $t = sabit$ yörüngeleri olarak ortaya konan koordinatları anlamındadır.



$t(x,y)$ ve $s(x,y)$ koordinatları $X=\xi\dfrac{\partial}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial s}$ *üreteçli bir gruba uyarlanmıştır..*

Doğal olarak $s(x,y)$ fonksiyonu (3.2.13) ifadesinden tek şekilde belirlenemez. Bu durumda

$$\hat{s}=s+s_0(t) \tag{3.2.15}$$

şeklinde bir dönüşüm yapmak daima mümkündür. Yani s değişkeninin orjini (merkezi), keyfi olarak herhangi bir yörünge üzerinde seçilebilir. Aynı şekilde t' de (3.2.14) ifadesinden tek şekilde belirlenemez. Dolayısıyla

$$\hat{t}=f(t) \tag{3.2.16}$$

şeklinde bir dönüşüm yapmak daima mümkündür.

(3.2.14) denklemini çözmek için, ilk olarak herhangi bir $t=sabit$ yörüngesi için

$$dt=0=\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy \tag{3.2.17}$$

ifadesi sağlanır. Bu bağıntı ile (3.2.14) ifadesinden $\partial t/\partial x$, $\partial t/\partial y$ ifadeleri yok edilirse,

$$\xi(x,y)\,dy-\eta(x,y)\,dx=0 \tag{3.2.18}$$

şeklindeki 1.mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu durumda t' nin (3.2.18) ifadesinin çözümünde bir integrasyon sabiti olacağı aşikardır. Çözüm, örneğin, $y=y(x,t)$ formunda olup, yörüngeleri verir. Burada her bir yörünge t' nin kendi değerleri ile sınıflandırılır. Tersi alınarak, $t=t(x,y)$ elde edilir.

(3.2.13) denklemini çözmek için, yeni bir koordinat olarak t' yi alalım. Bu t koordinatını y ile birlikte kullanabiliriz. Eğer t, x' e bağlı değil ise, t ve x' i birlikte koordinat olarak alabiliriz. Böylece (3.2.14)' den $X_t = 0$ olup,

$$X = (Xy)\frac{\partial}{\partial y} + (Xt)\frac{\partial}{\partial t} = (Xy)\frac{\partial}{\partial y} = \eta(y,t)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.13) 'deki $Xs = 1$ denklemi

$$\eta\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{3.2.20}$$

şeklinde olur. Buradan $s(y,t)$ fonksiyonu

$$s(y,t) = \int\frac{dy}{\eta(y,t)} \qquad ,\eta \neq 0 \tag{3.2.21}$$

şeklinde bulunur. Burada integral alınırken t sabit olarak göz önüne alınır. Böylece $s(y,t)$ bulunur. t ile $t = t(x,y)$ yer değiştirilerek , $s(x,y)$ elde edilir.

$\eta = 0$ olduğunda, s fonksiyonu için en uygun formül

$$s(x,t) = \int\frac{dx}{\xi(x,t)} \qquad ,\xi(x,t) \neq 0 \tag{3.2.22}$$

olur.

Böylece, eğer n. mertebeden bir diferansiyel denklemin bir Lie nokta simetrisi kabul ettiği bilinirse, bu durumda problem, (3.2.18) ile verilen ve grup yörüngelerini ifade eden 1.mertebeden bir diferansiyel denkleme; veya (3.2.12) ve (3.2.21) veya (3.2.22) ile verilen iki adet quadratüre; veya (3.2.11) ile verilen (n-1). mertebeden bir diferansiyel denkleme indirgenir.

Yöntemin örneklerle açıklaması EK-B de verilmiştir.

3.3 Çok Parametreli Grupların Üreteçleri ve Bu Üreteçlerin Lie Cebirleri

$G \neq \phi$ bir küme olmak üzere $*: GXG \to G$ bir işlem $(G,*)$ bir grub olsun. Bu grubun $\forall g$ elamanı belli bir aralıkta değişen parametre ya da parametrelerin bir fonksiyonu ile ifade ediliyor ve bu fonksiyonlar parametre ya da parametrelere göre sürekli ise bu gruba Lie grubu denir . Her Lie grubuna bir Lie cebri karşı getirilebilir. Lie cebri grubun yapısını korur.

Bir K cismi üzerinde bilineer dönüşüm ile aşağıdaki özellikleri sağlayan bir V vektör uzayına Lie cebri denir.

$$[\ ,\ ]: VXV \to V$$
$$(x_1, x_2) \to [x_1, x_2] \qquad \text{bilineerdir. Yani}$$

1-$\forall a, b \in K$ ve $X_1, X_2, X_3 \in V$ için

$$[a X_1 + b X_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3]$$

ve

$$[X_3, a X_1 + b X_2] = a[X_3, X_1] + b[X_3, X_2]$$

2-$\forall X_1, X_2, X_3 \in V$ için

$$[[X_1, X_2], X_3] + [[X_3, X_1], X_2] + [[X_2, X_3], X_1] = 0 \qquad \text{(jocobi özdeşliği)}$$

3- $\forall X \in V$ için $[X, X] = 0$ dır.

1.ve 3. Özellikleri $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$ anti simetri özelliğini sağlar. Ayrıca Lie cebri ile tanımlanan çarpma genelde

$$[[X_1, X_2], X_3] \neq [X_1, [X_2, X_3]]$$

dir. Eğer;

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x, y; \varepsilon_N) \quad , \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \varepsilon_N) \quad , \quad N = 1,2,3,\ldots, r \qquad (3.3.1.)$$

simetri dönüşümlerinin grubu birden fazla ε_N parametresine bağlı ise, bu grubun genel infinitesimal üreteci

$$X = a^N X_N \quad , \quad a^N = sabit \quad , \quad N = 1,2,3,\ldots, r \qquad (3.3.2)$$

şeklinde, ε_N grub parametrelerinin her birine karşı gelen r tane lineer bağımsız X_N taban üreteçlerinin lineer kombinasyonu olur. Grubun parametrizasyonu değiştirilirse,

$$\hat{X}_N = B_N^M X_M \quad , \quad B_N^M = sabit \quad , \quad \left|B_N^M\right| \neq 0 \tag{3.3.3}$$

şeklinde, taban üreteçlerinin bir lineer dönüşümü elde edilir. Sonlu grub dönüşümleri yerine üreteçlerin kullanılmasının sağladığı avantaj, üreteçlerin lineer operatörler olmalarından kaynaklanmaktadır. (3.3.2) ile verilen süper-pozisyon kuralı daima lineer olduğu için hangi mertebeden üreteçler eklenirse eklensin sonuç değişmeyecektir. X_N üreteçleri için değişme özelliği söz konusu olduğundan grub teoriden bilinen komütatör kavramı ön plana çıkar. X_N ve X_M gibi iki üretecin komütatörü

$$[X_N, X_M] = X_N X_M - X_M X_N = -[X_M, X_N] \tag{3.3.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer X_N ve X_M üreteçleri lineer ise, onların komütatörü olan

$$\begin{aligned}[X_N, X_M] &= \left[\xi_N \frac{\partial}{\partial x} + \eta_N \frac{\partial}{\partial y} + \ldots + \xi_M \frac{\partial}{\partial x} + \eta_M \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right] \\ &= \{(X_N \xi_M) - (X_M \xi_N)\}\frac{\partial}{\partial x} + \ldots\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

operatörü de yine lineer bir operatör olur.

Komütatör tanımından dolayı, komütatörler için (3.3.9)' e benzer olarak

$$[X_N, [X_M, X_p]] + [X_M, [X_p, X_N]] + [X_p, [X_N, X_M]] = 0 \tag{3.3.6}$$

şeklindeki Jocabi özdeşliği daima geçerlidir.

Bu özdeşlik, A operatörü ile temsil edilen bir diferansiyel denklem ve bu denklemin X_1 , X_2 gibi iki simetrisine uygulanırsa,

$$[X_1, [X_2, A]] + [X_2, [A, X_1]] + [A, [X_1, X_2]] = 0 \tag{3.3.7}$$

elde edilir.

X_1 ve X_2 birer simetri oldukları için ,

$$[X_1, A] = \lambda_1 A \quad , \quad [X_2, A] = \lambda_2 A \qquad (\lambda_i = \lambda_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \ , i = 1,2,) \tag{3.3.8}$$

olup, (3.3.7) ' den

$$
\begin{aligned}
[[X_1,X_2],A] &= [X_1,\lambda_2 A]-[X_2,\lambda_1 A] \\
&= (X_1 \lambda_2) A + \lambda_1 \lambda_2 A - (X_2 \lambda_1) A - \lambda_1 \lambda_2 A \\
&= \lambda_2 \lambda_1 A + (X_1 \lambda_2) A - \lambda_2 \lambda_1 A - (X_2 \lambda_1) A \\
&= \rho A \qquad , \qquad \rho = \rho(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})
\end{aligned} \tag{3.3.9}
$$

bulunur. Yani $[X_1, X_2]$ komütatörü de yine bir simetri olur. Tüm simetrilerin, r tane taban üretecinin bir lineer kombinasyonu gibi olduğu farzedilirse,

$$[X_1,X_2]=C^N X_N \tag{3.3.10}$$

veya, daha genel olarak

$$[X_N,X_M]=C^P_{NM}\, X_p \tag{3.3.11}$$

elde edilir. C^P_{NM} sabitlerine, grubun "Yapı sabitleri" denir. Komütatör tanımından dolayı, yapı sabitleri

$$C^P_{NM}=-C^P_{MN} \tag{3.3.12}$$

şeklinde anti simetriktir. Aynı zamanda (3.3.6) ile verilen Jocabi özdeşliği'nden dolayı da, yapı sabitleri

$$C^Q_{MP}\; C^R_{NQ}+C^Q_{PN}\; C^R_{MQ}+C^Q_{NM}\; C^R_{PQ}=0 \tag{3.3.13}$$

şeklindeki "Lie özdeşliği" ni sağlarlar.

Yapı sabitleri bir koordinat dönüşümü altında değişmezler. Eğer,

$$X_1=b_1^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad X_2=b_2^k\,\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.3.14}$$

olursa,

$$x^{i'}=x^{i'}(x^i) \quad , \quad b_1^{i'}=b_1^i\,\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad , \quad b_2^{k'}=b_2^k\,\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \tag{3.3.15}$$

şeklinde verilen dönüşüm kurallarından da görüleceği üzere, komütatörün $(X_1\, b_2^1)-(X_2\, b_1^1)$ şeklindeki bileşenleri bir vektörün bileşenleri gibi dönüşür. Yapı sabitleri hiçbir şekilde bu dönüşümden etkilenmezler. Yapı sabitleri tabanda yapılacak bir dönüşüm ile değişirler,

$$[\hat{X}_N,\hat{X}_M]=\hat{C}^P_{NM}\,\hat{X}_P \tag{3.3.16}$$

ifadesine (3.3.3) ifadesi de katıldığında,

$$B^R_N\; B^S_M\; C^Q_{RS}=B^Q_P\;\hat{C}^P_{NM} \tag{3.3.17}$$

şeklinde dönüşüm kuralı elde edilir.

(3.3.3) ile verilen taban dönüşümleri, verilen bir grubun yapı sabitlerinin belirlenmesinde kullanılabilir. Komütatörler (yapı sabitleri) ile birlikte tüm $\{X_N\}$ 'lerin kümesi, göz önüne alınan grubun " Lie Cebri " ni oluşturur.

IV. BÖLÜM

4. LİE NOKTA SİMETRİLERİNİN KULLANIMI

4.1 Genel Bilgiler ve İnvaryant Haller

Eğer;

$$y'' = w(x,y,y') \Leftrightarrow Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial y'} \right) f = 0 \qquad (4.1.1)$$

şeklinde ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem iki parametreli bir G_2 grubu kabul ederse, bu durumda bir Lie cebri teşkil eden X_1 ve X_2 gibi iki üreteci vardır. X_1 ve X_2' nin bir Lie cebri teşkil etmesi demek, bu üreteçlerin komütatörünün

$$[X_1, X_2] = C_{12}^P X_p = C_1 X_1 + C_2 X_2 \qquad (4.1.2)$$

şeklinde üreteçlerin bir lineer kombinasyonu şeklinde olması demektir.

Burada iki farklı durum ön plana çıkar. Ya C_1 ve C_2 ile verilen yapı sabitlerinin her ikisi de sıfırdır ve dolayısıyla grup abelian bir grup olur. Bu grup $G_2 I$ ile gösterilirse

$$G_2 I : [X_1, X_2] = 0 \qquad (4.1.3)$$

olur. Ya da yapı sabitlerinin en az biri, örneğin C_1, sıfırdan farklıdır. Bu durumda yapı sabitlerinin basitleştirilmesi için tabanda

$$\hat{X}_N^M = B_N^M X_M \quad , \quad B_N^M = sabit \quad , \quad \left| B_N^M \right| \neq 0 \qquad (4.1.4)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılabilir. Örneğin, $\hat{X}_1 = C_1 X_1 + C_2 X_2$ ve $\hat{X}_2 = X_2 / C_1$ ile $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_1$ olur. Yani değişmeli (abelian) olmayan durum da söz konusu olabilir. Bu durum

$$G_2 II : [X_1, X_2] = X_1 \qquad (4.1.5)$$

ile ifade edilir.

Özetlemek gerekirse, burada iki parametreli G_2 grubunun (4.1.3) ve (4.1.5) ile verilen iki farklı tipi vardır. Bu durumda verilen bir diferansiyel denklemin integrasyonunda, iki simetrinin kullanabildiği bir metot geliştirilmelidir. Böylece, simetri üreteçlerinin bazı basit normal formlara dönüştürülmesi ve yeni koordinatlardaki diferansiyel denklemin çözümlenmeye çalışılması oldukça kullanışlı bir yol olarak ortaya çıkar.

İlk olarak değişmeli iki üretecin olduğu durumu inceleyelim. $s(x,y)$ ve $t(x,y)$ şeklinde koordinatlar ele alınarak X_1 üreteci daima $X_1 = \frac{\partial}{\partial s}$ şeklindeki kendi normal formuna dönüştürülebilir. İkinci bir X_2 üretecinin s ve t koordinatlarındaki genel formu

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad X_2 = a(t)\frac{\partial}{\partial s} + b(t)\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.6}$$

şeklinde olmalıdır. X_1' i invaryant bırakıp, X_2' yi değişikliğe uğratan dönüşümler

$$u(s,t) = s + h(t) \quad , \quad v = v(t) \tag{4.1.7}$$

şeklindedir. Bu dönüşümlere göre üreteçler $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ olmak üzere

$$X_1 = (X_1 u)\frac{\partial}{\partial u} + (X_1 v)\frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial s}[s + h(t)]\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial s} v(t)\right)\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \tag{4.1.8}$$

$$X_2 = (X_2 u)\frac{\partial}{\partial u} + (X_2 v)\frac{\partial}{\partial v} = (a + b h')\frac{\partial}{\partial u} + b v' \frac{\partial}{\partial v} \tag{4.1.9}$$

şeklinde olur.

$b = 0$ ve $v = a$ seçilirse,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad X_2 = v\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.1.10}$$

elde edilir.

$b \neq 0$ için $v' = 1/b$, $h' = -a/b$ seçilirse,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial v} \tag{4.1.11}$$

bulunur.

(4.1.10) ve (4.1.11)' u simetri olarak kabul eden ikinci mertebeden diferansiyel denkleme geçmek için, u ve v' nin bağımsız değişken gibi alınıp alınmayacağı problemi ile karşılaşırız.

Eğer (4.1.10) için diferansiyel denklemin

$$v''(u) = w(u, v, v') \tag{4.1.12}$$

şeklinde bir forma sahip olduğu düşünülürse, bu durumda

$$X_N\, w = \eta''_N \quad (\operatorname{mod} v'' = w)$$

simetri şartları $\partial w/\partial u = 0$, $v'\,\partial w/\partial v' = 3w$ olmasını gerektirir. Bu durumda diferansiyel denklem

$$v'' = v'^3\, \hat{w}(v) \tag{4.1.13}$$

şeklini alır.

Diğer taraftan, eğer diferansiyel denklem u ve v değişkenlerinde

$$u''(v) = \widetilde{w}(v, u, u') \tag{4.1.14}$$

şeklinde seçilirse, bu durumda $X_N\, w = \eta''_N$ $(\operatorname{mod} u'' = \widetilde{w})$ simetri şartları bizi

$$u''(v) = \widetilde{w}(v) \tag{4.1.15}$$

diferansiyel denklemine götürür. (4.1.11) durumu, yani $(G_2 II)$ içinde benzer işlemler yapılır.

G_2 gurubunun (4.1.3) ve (4.1.5) ile verilen farklı tipleri için $\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$ ve $s = s(t)$ olmak üzere diferansiyel denklemin alacağı belirgin şekilleri araştıralım.

<u>**I-a :**</u> $G_2 I : [X_1, X_2] = 0$ olması halinde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.16}$$

olup,diferansiyel denklemin $s'' = \hat{w}(t, s, s')$ formunda olduğu göz önüne alınırsa

$$X_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial s} + \eta'_1 \frac{\partial}{\partial s'} \tag{4.1.17}$$

ifadesinden

$$\xi_1 = 0 \ , \ \eta_1 = 1 \ ; \ \eta'_1 = \frac{d\eta_1}{dt} - s'\frac{d\xi_1}{dt} = 0 \ ; \ \eta''_1 = \frac{d\eta'_1}{dt} - s''\frac{d\xi_1}{dt} = 0 \tag{4.1.18}$$

olup, genişletilmiş üreteç

$$X_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial s} + \eta_1' \frac{\partial}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.19}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$X_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial s} + \eta_2' \frac{\partial}{\partial s'} \tag{4.1.20}$$

denkleminden,

$$\xi_2 = 1 \ , \ \eta_2 = 0 \ ; \ \eta_2' = \frac{d\eta_2}{dt} - s' \frac{d\xi_2}{dt} = 0 \ ; \ \eta_2'' = \frac{d\eta_2'}{dt} - s'' \frac{d\xi_2}{dt} = 0 \tag{4.1.21}$$

olup, genişletilmiş üreteç de

$$X_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial s} + \eta_2' \frac{\partial}{\partial s'} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.22}$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

olup,

$$X_1 \hat{w} = \eta_1'' \quad (\operatorname{mod} s'' = \hat{w}) \quad , \quad X_2 \hat{w} = \eta_2'' \quad (\operatorname{mod} s'' = \hat{w})$$

simetri şartlarından

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial s} = 0 \quad ; \quad \hat{w} = \hat{w}(t, s') \tag{4.1.23}$$

ve

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \hat{w} = \hat{w}(s, s') \tag{4.1.24}$$

bulunur. Bu iki durum birlikte göz önüne alınırsa, $\hat{w} = \hat{w}(s')$ olur. $s'' = \hat{w}$ ' dan da, diferansiyel denklemin

$$s'' = \hat{w}(s') \tag{4.1.25}$$

formunda olması gerektiği ortaya çıkar.

<u>**I-b**</u> : $G_2 I : [X_1, X_2] = 0$ olması halinde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad X_2 = t \frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.26}$$

olup, diferansiyel denklemin $s''=w(t,s,s')$ formunda olduğu göz önüne alınırsa (4.1.17) ve (4.1.18) den genişletilmiş üreteç

$$X_1=\frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.27}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde (4.1.20) ifadesinden

$$\xi_2=0\ ,\ \eta_2=t\ ;\ \eta_2'=\frac{d\eta_2}{dt}-s'\frac{d\xi_2}{dt}=1\ ;\ \eta_2''=\frac{d\eta_2'}{dt}-s''\frac{d\xi_2}{dt}=0 \tag{4.1.28}$$

olup, genişletilmiş üreteç de

$$X_2=t\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s'} \tag{4.1.29}$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada

$$\delta=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & t\end{vmatrix}=0$$

olup,

$$X_1\hat{w}=\eta_1''\quad (\operatorname{mod} s''=\hat{w})\quad ,\quad X_2\hat{w}=\eta_2''\quad (\operatorname{mod} s''=\hat{w})$$

simetri şartlarından

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial s}=0\quad ;\quad \hat{w}=\hat{w}(t,s') \tag{4.1.30}$$

ve

$$t\frac{\partial\hat{w}}{\partial s}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial s'}=0\quad ,\quad \frac{\partial\hat{w}}{\partial s'}=0\quad ,\quad \hat{w}=\hat{w}(t,s) \tag{4.1.31}$$

olup, bu iki durum birlikte göz önüne alınırsa; $\hat{w}=\hat{w}(t)$ olur. $s''=\hat{w}$' dan da diferansiyel denklemin

$$s''=\hat{w}(t) \tag{4.1.32}$$

formunda olması gerektiği bulunur.

II-a : $G_2 II:[X_1,X_2]=X_1$ olması halinde

$$X_1=\frac{\partial}{\partial s}\quad ,\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+s\frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.33}$$

olup. Diferansiyel denklemin $s''=w(t,s,s')$ formunda olduğu göz önüne alınırsa (4.1.17) ve (4.1.18) ifadelerinden genişletilmiş üreteç

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.34}$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde (4.1.20) dan

$$\xi_2 = t \ , \ \eta_2 = s \ ; \ \eta_2' = \frac{d\eta_2}{dt} - s'\frac{d\xi_2}{dt} = 0 \ ; \ \eta_2'' = \frac{d\eta_2'}{dt} - s''\frac{d\xi_2}{dt} = -s'' \tag{4.1.35}$$

olup, genişletilmiş üreteç de

$$X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.36}$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & s \end{vmatrix} = -t \neq 0$$

olup

$$X_1\hat{w} = \eta_1'' \quad (\operatorname{mod} s'' = \hat{w}) \quad , \quad X_2\hat{w} = \eta_2'' \quad (\operatorname{mod} s'' = \hat{w})$$

simetri şartlarından

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial s} = 0 \quad ; \quad \hat{w} = \hat{w}(t, s') \tag{4.1.37}$$

ve

$$t\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + s\frac{\partial \hat{w}}{\partial s} = -s'' \quad , \quad t\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} = -s'' \quad , \quad s'' = \hat{w} \tag{4.1.38}$$

olduğu göz önüne alınırsa $\dfrac{\partial \hat{w}}{\hat{w}} = -\dfrac{\partial t}{t}$; $\hat{w} = \dfrac{C}{t}$ olup, $C = \hat{w}(s')$ seçilirse

$$\hat{w} = \frac{\hat{w}(s')}{t}$$

olur. $s'' = \hat{w}$ ' dan da, diferansiyel denklemin

$$s'' = \frac{\hat{w}(s')}{t} \tag{4.1.39}$$

formunda olması gerektiği ortaya çıkar.

<u>II-b</u> : $G_2 II : [X_1, X_2] = X_1$ olması halinde

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial s} \quad , \quad X_2 = s\frac{\partial}{\partial s} \tag{4.1.40}$$

olup. Diferansiyel denklemin $s''=w(t,s,s')$ formunda olduğu göz önüne alınırsa (4.1.17) ve (4.1.18) ifadelerinden genişletilmiş üreteç

$$X_1=\frac{\partial}{\partial s} \qquad (4.1.41)$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde (4.1.20) dan

$$\xi_2=0\ ,\ \eta_2=s\ ;\ \eta_2'=\frac{d\eta_2}{dt}-s'\frac{d\xi_2}{dt}=s'\ ;\ \eta_2''=\frac{d\eta_2'}{dt}-s''\frac{d\xi_2}{dt}=s'' \qquad (4.1.42)$$

olup, genişletilmiş üreteç de

$$X_2=s\frac{\partial}{\partial s}+s'\frac{\partial}{\partial s'} \qquad (4.1.43)$$

şeklinde bulunmuş olur. Burada

$$\delta=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{vmatrix}=0$$

olup,

$$X_1\hat{w}=\eta_1''\quad(\mathrm{mod}\, s''=\hat{w})\quad ,\quad X_2\hat{w}=\eta_2''\quad(\mathrm{mod}\, s''=\hat{w})$$

simetri şartlarından

$$\frac{\partial\hat{w}}{\partial s}=0\quad ;\quad \hat{w}=\hat{w}(t,s') \qquad (4.1.44)$$

ve

$$s\frac{\partial\hat{w}}{\partial s}+s'\frac{\partial\hat{w}}{\partial s'}=s''\quad ;\quad s'\frac{\partial\hat{w}}{\partial s'}=s''\quad ,\quad s''=\hat{w} \qquad (4.1.45)$$

olduğu göz önüne alınırsa $\frac{\partial\hat{w}}{\hat{w}}=\frac{\partial s'}{s'}$; $\hat{w}=s'C$ olup, $C=\hat{w}(t)$ seçilirse, diferansiyel denklemin

$$s''=s'\,\hat{w}(t) \qquad (4.1.46)$$

formunda olması gerektiği ortaya çıkar. Bu dört durum

(I-a) $G_2I:[X_1,X_2]=0$, $\delta\neq 0$, $X_1=\frac{\partial}{\partial s}$, $X_2=\frac{\partial}{\partial t}$ $\quad s''=\hat{w}(s')$ (4.1.47)

(I-b) $G_2I:[X_1,X_2]=0$, $\delta=0$, $X_1=\frac{\partial}{\partial s}$, $X_2=t\frac{\partial}{\partial s}$ $\quad s''=\hat{w}(t)$ (4.1.48)

(II-a) $G_2II:[X_1,X_2]=X_1$, $\delta\neq 0$, $X_1=\frac{\partial}{\partial s}$, $X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+s\frac{\partial}{\partial s}$ $\quad s''=\frac{\hat{w}(s')}{t}$ (4.1.49)

(II-b) $G_2 II : [X_1, X_2] = X_1$, $\delta = 0$, $X_1 = \frac{\partial}{\partial s}$, $X_2 = s\frac{\partial}{\partial s}$ $\qquad s'' = s'\hat{w}(t)$ (4.1.50)

şeklinde özetlenir.

İncelenen bu dört durumda diferansiyel denklemlerin quadratürlere (s ve t'ye) geçilerek kolaylıkla çözülebileceği görülmektedir. O halde, Lie nokta simetrilerinin bir G_2 grubunu kabul eden ikinci mertebeden diferansiyel denklemler üzerinde çalışmak için en uygun teknik, ilk olarak üreteçleri kendi normal formlarına dönüştürmek ve sonra bu forma uyan diferansiyel denklemleri çözümleyip, quadratürleri integre etmekten ibarettir. Fakat burada simetrilerin kullanılmasında farklı bir yolun daha olduğu görülmektedir. Buradaki esas fikir, üreteçleri bağımlı ve bağımsız değişkenlerin uzayındaki temsillerinde (realizasyonlarında) değil de, ilk integrallerin uzayındaki temsillerinde bazı normal formlarına dönüştürebilmektir.

4.2 Birinci İntegrasyon Tekniği : Üreteçlerin Değişkenler Uzayındaki Normal Formları

Eğer X_1 ve X_2 gibi iki simetri varsa, bunların değişmeli olup olmadıkları ve bunların (x, y) veya (s, t) şeklinde bağımlı ve bağımsız değişkenlerin uzayında lineer bağımsız olup olmadıklarının incelenmesi gerekir. Bunun sonucunda normal form belirlenebilir. İntegrasyon işlemi ortaya çıkan her bir durum için biraz farklı olur. Her bir durumda ilk olarak t ve s değişkenleri belirlenir ve sonuçta $s(t)$ için ortaya çıkan diferansiyel denklem çözülür.

(4.1)' de verilen (4.1.47) , (4.1.48) , (4.1.49) , (4.1.50) ile özetlenen durumlar için çözüm tiplerinin nasıl belirleneceğini inceleyelim.

(4.1.47) durumunda

$$X_1 t = \xi_1(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta_1(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \qquad (4.2.1)$$

$$X_2 t = \xi_2(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta_2(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 1 \qquad (4.2.2)$$

ve

$$X_1 s = \xi_1(x,y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \qquad (4.2.3)$$

$$X_2 s = \xi_2(x,y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta_2(x,y)\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \qquad (4.2.4)$$

denklemlerini sağlayan $t(x,y)$ ve $s(x,y)$ fonksiyonları vardır ve $\delta \neq 0$ olduğundan (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4)' den t ve s değişkenleri belirlenebilir.

(4.2.1) ve (4.2.2) den

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\eta_1}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \quad ve \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\xi_1}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \qquad (4.2.5)$$

olup, $d\,t(x,y) = \frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy$ ifadesinden integrasyonla

$$t(x,y) = \int\left[\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy\right] = \int \frac{-\eta_1\,dx + \xi_1\,dy}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \qquad (4.2.6)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2.3) ve (4.2.4)' ten

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\eta_2}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \quad ve \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\xi_2}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \qquad (4.2.7)$$

olup, $ds(x,y) = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy$ ifadesinden integrasyonla

$$s(x,y) = \int\left[\frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy\right] = \int \frac{\eta_2\,dx - \xi_2\,dy}{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2} \qquad (4.2.8)$$

bulunur.

Şimdi $y'' = w(x,y,y')$ diferansiyel denkleminin (t,s) uzayında nasıl dönüştüğünü inceleyelim. (4.1.47)' dan bu diferansiyel denklemin $s''(t) = \hat{w}(s')$ formunda olabileceği bilinmektedir. Fakat yine de $\hat{w}$ fonksiyonu belirlenmelidir. $\hat{w}$'yı belirlemek için (4.2.6) ifadesinde, s''yü belirlemek için de (4.2.8) ifadesi kullanılır. Burada $s' = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy\right)\Big/\left(\frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy\right)$ olup, $\partial s/\partial x$, $\partial s/\partial y$, $\partial t/\partial x$, $\partial t/\partial y$ değerleri kullanılırsa,

$$s' = \frac{y'\xi_2 - \eta_2}{\eta_1 - y'\xi_1} \qquad (4.2.9)$$

elde edilir. Buradan

$$y' = \frac{\eta_2 + s'\eta_1}{\xi_2 + s'\xi_1} \tag{4.2.10}$$

bulunur. Benzer şekilde y'' ifadesini elde etmek için $s'' = \dfrac{ds'}{dt}$ kullanılırsa,

$s'' = \dfrac{ds'}{dx} = (\dfrac{\partial s'}{\partial x}dx + \dfrac{\partial s'}{\partial y}dy + \dfrac{\partial s'}{\partial y'}dy') \Big/ (\dfrac{\partial t}{\partial x}dx + \dfrac{\partial t}{\partial y}dy)$ olur. Buradaki $\partial s'/\partial x$, $\partial s'/\partial y$, $\partial s'/\partial y'$, $\partial t/\partial x$, $\partial t/\partial y$; terimleri hesaplanır ve s'' ifadesinde yerine yazılırsa (4.2.10) ifadesi ile birlikte $\delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y'' = -\frac{1}{2\delta}\Bigg\{ & s'' + \eta_1\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + (\frac{\eta_2 + s'\eta_1}{\xi_2 + s'\xi_1})(\xi_2\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_1\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \\ & + \eta_1\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \eta_2\frac{\partial \eta_1}{\partial y}) + (\frac{\eta_2 + s'\eta_1}{\xi_2 + s'\xi_1})^2(\xi_1\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \xi_2\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \xi_2\frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \eta_1\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \eta_2\frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ & - \xi_1\frac{\partial \eta_2}{\partial y}) + (\frac{\eta_2 + s'\eta_1}{\xi_2 + s'\xi_1})^3(\xi_1\frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2\frac{\partial \xi_1}{\partial y})\Bigg\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan uygun bir yok etme işlemi yapılarak, $y'' = w(x, y, y')$ şeklindeki diferansiyel denklemden $s'' = \hat{w}(s')$ şeklindeki diferansiyel denkleme gelinir. Bu basit diferansiyel denklem

$$dt = \frac{ds'}{\hat{w}(s')} \quad , \quad t + \varphi_0 = \int \frac{ds'}{\hat{w}(s')} \tag{4.2.11}$$

şeklinde olduğu için rahatlıkla integre edilebilir ve bu terim $s' = f(t + \varphi_0)$ şeklinde ifade edilir. Tekrar integrasyonla

$$s(t, \varphi_0, \psi_0) = \int f(t + \varphi_0)\,dt + \psi_0 \tag{4.2.12}$$

olarak bulunur.

$s(x, y)$, $t(x, y)$ ve $s(t, \varphi_0, \psi_0)$'dan s ve t yok edilerek $y'' = w(x, y, y')$ diferansiyel denkleminin $y = y(x, \varphi_0, \psi_0)$ şeklindeki genel çözümü elde edilmiş olur.

(4.1.48) durumunda, $X_2 = t(x, y)X_1$ olduğundan, s fonksiyonuna geçmek için x yerine yeni bir değişken olarak t (veya $\partial t/\partial x = 0$ ise y yerine t) alınır ve böylece

$$X_1 s(y, t) = (X_1 y)\frac{\partial s}{\partial y} + (X_1 t)\frac{\partial s}{\partial t} = \eta_1(y, t)\frac{\partial s}{\partial y} = 1 \tag{4.2.13}$$

yani,

$$s(y,t)=\int\frac{dy}{\eta_1(y,t)} \tag{4.2.14}$$

elde edilir.

(4.1.48)'den, dönüşmüş diferansiyel denklem $s''(t)=\hat{w}(t)$ şeklinde olup, bu denklem integre edilirse, $s(t)$ fonksiyonu

$$s(t)=\iint\hat{w}(t)\,d\tilde{t}\,dt+\varphi_0 t+\psi_0 \tag{4.2.15}$$

şeklinde bulunur. (4.2.14) ve (4.2.15)'den s yok edilirse, $t=f(y,\varphi_0,\psi_0)$ elde edilir. Benzer şekilde $X_2=tX_1$' deki $t=t(x,y)$ ile $t=f(y,\varphi_0,\psi_0)$'dan t yok edilirse, diferansiyel denklemin $y=y(x,\varphi_0,\psi_0)$ şeklindeki genel çözümü elde edilir.

(4.1.49) durumunda $t(x,y)$'i belirlemek için $t=e^u \Rightarrow u=\ln t$ dönüşümü yapılırsa, (4.1.49)' den

$$X_1u(x,y)=\xi_1\frac{\partial u}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{4.2.16}$$

$$X_2u(x,y)=\xi_2\frac{\partial u}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial u}{\partial y}=1 \tag{4.2.17}$$

elde edilir. (4.2.16) ve (4.2.17) sisteminin çözümü $u_x=-\dfrac{\eta_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}$ ve $u_y=\dfrac{\xi_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}$ şeklinde olup, $du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ ifadesinden

$$du(x,y)=-\frac{\eta_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}dx+\frac{\xi_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}dy$$

bulunur. Bu ifade integre edilirse, dönüşümdeki u

$$u(x,y)=\ln t(x,y)=\int\frac{\xi_1\,dy-\eta_1\,dx}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1} \tag{4.2.18}$$

şeklindeki bir çizgi integrali ile verilir.

Şimdi x'in yerine (veya $\partial t/\partial x=0$ ise y'nin yerine) t'yi koordinat gibi kullanalım ve s için $s=t\,v(y,t)$ ansatz'ını oluşturalım. Bu durumda v fonksiyonu için $v=s/t$ ve $X_1=\partial/\partial s$ olduğundan $X_1v=\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{s}{t}\right)=\dfrac{1}{t}$ veya $t\,X_1v=1$ olup,

$X_1v(y,t)=(X_1y)\dfrac{\partial v}{\partial y}+(X_1t)\dfrac{\partial v}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial y}{\partial s}=X_1y=\eta_1(y,t)$ ifadesinden

$$t\,X_1 v = t\,\eta_1(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad ; \quad (X_1 t = 0) \tag{4.2.19}$$

bulunur. Aynı şekilde $X_2 v = t\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s}{t}\right) + s\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{t}\right) = t\,s\left(-\frac{1}{t^2}\right) + s\frac{1}{t} = 0$ olup,

$X_2 v(y,t) = (X_2 t)\frac{\partial v}{\partial t} + (X_2 y)\frac{\partial v}{\partial y}$ ifadesinden

$X_2 t = t\frac{\partial}{\partial t}(t) + s\frac{\partial}{\partial s}(t) = t$ *ve* $X_2 y = t\frac{\partial y}{\partial t} + s\frac{\partial y}{\partial s} = t\xi_1(y,t) + s\eta_1(y,t) = \eta_2(y,t)$

bağıntıları kullanılırsa,

$$X_2 v = t\frac{\partial v}{\partial t} + \eta_2(y,t)\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.2.20}$$

olur. (4.2.19) ve (4.2.20)'den oluşan sistemin çözümü $v_y = \frac{1}{t\eta_1(y,t)}$ ve

$v_t = -\frac{\eta_2(y,t)}{t^2\eta_1(y,t)}$ şeklinde olup, $d\,v(y,t) = \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial t}dt$ ifadesinden

$dv(y,t) = \frac{dy}{t\eta_1(y,t)} - \frac{\eta_2(y,t)}{t^2\eta_1(y,t)}$ olur. Bu ifade integre edilirse,

$$v(y,t) = \int\left(\frac{dy}{t\eta_1(y,t)} - \frac{\eta_2(y,t)\,dt}{t^2\,\eta_1(y,t)}\right)$$

ve buradan $s(y,t)$ ansatz fonksiyonu

$$s(y,t) = t\,v(y,t) = t\,v(y,t) = \int\left(\frac{dy}{t\eta_1(y,t)} - \frac{\eta_2(y,t)dt}{t^2\eta_1(y,t)}\right) \tag{4.2.21}$$

şeklinde bulunur.

(4.1.49)'de s ve t koordinatlarına geçildiğinde, $y'' = w(x,y,y')$ diferansiyel denklemini $s'' = \hat{w}(s')/t$ şeklini aldığı görülür. Bu diferansiyel denklemde,

$s'' = \frac{ds'}{dt} = \frac{\hat{w}(s')}{t}$, $\frac{ds'}{\hat{w}(s')} = \frac{dt}{t}$ den

$$s'' = \int\frac{ds'}{\hat{w}(s')} = \ln t + \varphi_0 \tag{4.2.22}$$

şeklinde kolaylıkla çözülür. Ayrıca, $s' = g(t,\varphi_0)$' dan da

$$s(t) = \int g(t,\varphi_0)\,dt + \psi_0 \tag{4.2.23}$$

olur. (4.2.18) , (4.2.21) ve (4.2.23)'dan s ve t yok edilirse, $y'' = w(x, y, y')$ diferansiyel denkleminin $y = y(x, \varphi_0, \psi_0)$ şeklindeki genel çözümü elde edilir.

(4.1.50) durumunda $X_2 = s(x, y)X_1$ dir ve bu lineer bağıntıdan $s(x, y)$ fonksiyonunun belirlenebileceği görülür. $t(x, y)$ fonksiyonu belirlemek için, ise

$$X_1 t = \xi_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial t}{\partial y} = \xi_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\eta_1}{\xi_1} \frac{\partial}{\partial y} \right) t = 0 \qquad (\frac{\partial t}{\partial s} = 0 = X_1 t) \tag{4.2.24}$$

denkleminin çözülmesi gerekir. Bu kısmi diferansiyel denklem; $y = y(x, t_0)$ için $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\eta_1 \xi_1}$ ve $y = y(x, t_0)$ olup

$$y' = \frac{\eta_1}{\xi_1} \tag{4.2.25}$$

şeklindeki birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denkleme denktir. $y = y(x, t_0)$ bulunabilirse, buradan $t = t_0(x, y)$ elde edilir.

(4.1.50)' dan $y'' = w(x, y, y')$ diferansiyel denkleminin, s ve t koordinatlarına geçildiğinde $s'' = s' \hat{w}(t)$ şeklinde bir diferansiyel denkleme dönüşür. Bu diferansiyel denklemde $s'' = \frac{ds'}{dt} = s' \hat{w}(t)$, $\ln s' = \int \hat{w}(t)\, dt + \ln \varphi_0$, $s' = \varphi_0 e^{\int \hat{w}(t) dt}$ olup ve tekrar integral alınırsa

$$s(t) = \int \varphi_0 \left(\exp \int \hat{w}(t')\, dt' \right) dt + \psi_0 \tag{4.2.26}$$

bulunur. $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$ ve $s(t, \varphi_0, \psi_0)$'dan s ve t yok edilirse, $y'' = w(x, y, y')$ diferansiyel denkleminin $y = y(x, \varphi_0, \psi_0)$ şeklindeki genel çözümü elde edilir.

Genel olarak incelenen bu durumlara bakıldığında, tipik olarak, çizgi integralleri ile çözülebilen (4.2.1) , (4.2.2) , (4.2.3) , (4.2.4) veya (4.2.16) , (4.2.17) denklemleri ile ifade edilen, iki kısmi diferansiyel denklemden oluşan sistemler ile karşılaşılır. Burada bir çözümün varlığı, diferansiyel denklemin bir simetri grubu kabul ettiği farz edilmesi ile işe başlanıp sağlandığı için, integrallenebilirlik şartlarının göz önüne alınması gerekmez.

II-b durumu hariç tüm durumlarda, üreteçlerin ve normal formları ve bunların çizgi integralleri, bazı eliminasyonlar ve değişken dönüşümleri ile elde edilir. Orijinal diferansiyel denklem s ve t değişkenlerine geçildiğinde basit hale dönüştüğü için bu diferansiyel denklem quadratürler ile de çözülebilir.

4.2 İkinci İntegrasyon Tekniği : İlk İntegraller Uzayında Üreteçlerin Normal Formları

$$Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + w(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} \right) f = 0 \tag{4.3.1}$$

diferansiyel denklemi, çözülebiliyorsa, çözüm $\varphi(x, y, y')$ ve $\psi(x, y, y')$ şeklinde iki bağımsız çözümdür.

Eğer x, y, y' yerine φ , ψ ve $A\chi = 1$'i sağlayan üçüncü bir χ bağımsız değişkeni kullanılırsa, A'nın bileşenleri ve genişletilmiş X_1 ve X_2 üreteçleri, bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned} &A \sim (0,0,1) \\ &X_1 \sim (X_1\varphi \text{ , } X_1\psi \text{ , } X_1\chi) \\ &X_2 \sim (X_2\varphi \text{ , } X_2\psi \text{ , } X_2\chi) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

şeklinde ifade edilir. X_N'ler simetri olduklarından N=1,2 için $[X_N, A] = \lambda_N A$ yazılabilir. Buradan da $X_N\varphi$ ve $X_N\psi$ χ'den bağımsızdırlar. Çünkü $X_N\varphi$ ve $X_N\psi$ yine çözüm olacaklarından yanlızca φ ve ψ' nin fonksiyonları olurlar. Eğer çözümlerin uzayında, $\phi = \phi(\varphi, \psi)$ ve $\Psi = \Psi(\varphi, \psi)$ koordinat dönüşümleri yapılırsa, $X_N\varphi$ ve $X_N\psi$ bileşenleri değişecektir. Bu uzay iki boyutlu olup, x-y değişkenlerinin uzayı olacaktır ve X_N genişletilmiş üreteçleri, genişletilmemiş X_N üreteçleri gibi aynı komütatörlere sahip oldukları için, çözümlerin uzayında normal formların sınıflandırılması (4.2) ' de yapıldığı gibi yapılır.

Sınıflandırma ile ilgili olarak öncelikle (4.1.47) I-a ve (4.1.49) II-a durumları üzerinde duralım. Her iki durum da, iki boyutlu bir uzayı geren üreteçler tarafından ifade edilirler. Yani, bu üreteçler (s,t) veya (x, y) uzayında geçişken olurlar ve $X_1u = 0$, $X_2u = 1$ olacak şekilde bir $u(t)$ fonksiyonu daima vardır. Burada I-a için $u=t$ ve II-a için $u=\ln t$ olur. Bunu çözümler uzayındaki notasyona çevirmek için,

$$A\phi=\phi_x+y'\phi_y+\ldots+w\phi_{y^{(n-1)}}=0$$

$$X_N\phi=\xi_N\phi_x+\eta_N\phi_y+\ldots+\eta_N^{(n-1)}\phi_{y^{(n-1)}}=0 \qquad N=1,2,\ldots,n$$

sisteminin çözüm uzayındaki geçişkenliğin, A, X_1 ve X_2 gibi üç vektörün bileşenlerinin determinantı olan Δ' nın sıfırdan farklı olması ile mümkündür. Bu durum, koordinatların bağımsızlığını ifade etmekte olup (x,y,y') koordinatlarında olduğu gibi, (φ,ψ,χ) koordinatlarında da doğrudur.

Eğer $\Delta\neq 0$ ise, $X_1\varphi=0$, $X_2\varphi=1$ olacak şekilde bir φ çözümü daima bulunabilir. Bu durumda, (4.1.3) veya (4.1.5) bağıntılarını sağlayan X_1 ve X_2 gibi genişletilmiş üreteçli iki simetri çözüm uzayında geçişken ise, yani

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & y' & w\\ \xi_1 & \eta_1 & \eta_1'\\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2'\end{vmatrix}\neq 0 \tag{4.3.3}$$

ise,

$$A\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=0 \tag{4.3.4}$$

$$X_1\varphi=\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\eta_1'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=0 \tag{4.3.5}$$

$$X_2\varphi=\xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\eta_2'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=1 \tag{4.3.6}$$

sistemi daima $\varphi(x,y,y')$ şeklinde tek bir çözüme sahip olur.

Diğer taraftan (4.3.4) , (4.3.5) , (4.3.6) sisteminin Δ determinantı sıfırdan farklı olduğu için (geçişkenlikten), sistem φ_x , φ_y ve $\varphi_{y'}$'e göre çözülebilir ve φ fonksiyonu

$$\varphi(x,y,y')=\int\left(\varphi_x\,dx+\varphi_y\,dy+\varphi_{y'}\,dy'\right)=\int\frac{\begin{vmatrix}dx & dy & dy'\\ 1 & y' & w\\ \xi_1 & \eta_1 & \eta_1'\end{vmatrix}}{\Delta} \tag{4.3.7}$$

şeklinde bir çizgi integral formunda da yazılabilir.

(4.3.1) denkleminin ikinci çözümü olan ψ için nelere gerek olduğunu araştıralım. Eğer y' yerine yeni bir değişken olarak φ ele alınırsa, sabit olmayan φ için, $A\varphi = 0$ ifadesi $\partial\varphi/\partial y' \neq 0$ bağıntısını sağlar ve $A\psi = 0$ denklemi de

$$A\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y'(x,y,\varphi)\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0\right) \tag{4.3.8}$$

şeklini alır. Bu denklemin kabul ettiği simetri de ,

$$X_1 = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.3.9}$$

şeklindedir. Buradan (4.3.8) denklemi tam olarak

$$y' = w(x,y) \quad , \quad Af = \left(\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y}\right)f = 0$$

şeklindeki 1. mertebeden bir denklemin formuna sahip olur. Burada φ yanlızca toplamsal bir parametre rolü oynar ve (4.3.8) ifadesi (4.3.9) simetrisini kabul ettiği için (3.1)' deki sonuçlar kullanılabilir ve (3.1.13)' den ψ çözümü

$$\psi = \psi(x,y,\varphi) = \int \frac{dy - y'(x,y,\varphi)\,dx}{\eta_1 - \xi_1\, y'} \tag{4.3.10}$$

şeklinde bir çizgi integral formunda verilebilir.

Şimdi, elde edilen φ ve ψ integralleri ile $\psi(x,y,\varphi_0) = \psi_0$' dan yok etme ile $y = y(x,\varphi_0,\psi_0)$ genel çözümü elde edilebilir. Böylece (4.3.7) ve (4.3.10) şeklindeki çizgi integrallerine bağlı olarak, çözüm uzayında geçişken olarak hareket eden simetrilerin bir G_2 grubu ile 2.mertebeden bir diferansiyel denklem çözülmüş olur.

Eğer X_1 ve X_2 üreteçleri değişmeli iseler, yani $[X_1, X_2] = 0$ ise (4.3.4) (4.3.5) , (4.3.6)' te X_1 ile X_2 ve φ ile ψ yer değiştirilerek tekrar aynı işlemler yapılabilir. Böylelikle

$$A\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} + y'\frac{\partial\psi}{\partial y} + w\frac{\partial\psi}{\partial y'} = 0 \tag{4.3.11}$$

$$X_2\psi = \xi_2\frac{\partial\psi}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \eta_2'\frac{\partial\psi}{\partial y'} = 0 \tag{4.3.12}$$

$$X_1\psi = \xi_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial\psi}{\partial y} + \eta'_1\frac{\partial\psi}{\partial y'} = 1 \tag{4.3.13}$$

ifadeleri elde edilir. (4.3.7) çizgi integrali çözümü temsil etmekle birlikte, buradan

$$\psi(x,y,y')=\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial y'}dy'\right)=\int\frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dy' \\ 1 & y' & w \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2' \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{4.3.14}$$

bulunur.

Eğer genişletilmiş üreteçler, çözüm uzayında geçişken değillerse, yani $\Delta=0$ ise, bu integrasyon tekniği bırakılarak ilk integrasyon tekniği olan (4.2)' ye geri dönülür.

$\Delta=0$ olması durumunu incelersek;

Örneğin I-a durumunda

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & s' & \hat{w} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\hat{w} \tag{4.3.15}$$

dır. Böylece $\Delta=0$ olması yanlızca $\hat{w}=0$ olmasıyla mümkün olmaktadır. I-b ve II-b durumlarında $\Delta=0$ olması mümkün değildir. Fakat II-a durumunda $\hat{w}=0$ için $\Delta=0$ olacaktır. Üreteçler, çözüm uzayında yalnız bu durumların küçük bir alt kümesinde geçişken olmayabilirler. Burada üreteçler (s,t) koordinatlarından oluşan uzayda geçişkendirler. Fakat aynı zamanda $\hat{w}=0$ için simetrilerin 8- parametreli bir grubu söz konu olur.

Çözüm uzayında üreteçler geçişken oldukları zaman, A, X_1 ve X_2 operatörleri arasında lineer bir bağıntı olmalıdır. Bu bağıntı daima, sabit olmayan ψ ve υ ile,

$$X_2=\psi X_1+\upsilon A \tag{4.3.16}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(4.3.16) ifadesinin her iki tarafının A ile komütatörü alındığında, $[X_2,A]=\lambda_2 A$ olup, $[X_2,A]=-[A,X_2]$' den

$$[A,X_2]=(A\psi)X_1-\psi\lambda_1 A+(A\upsilon)A \tag{4.3.17}$$

elde edilir.

A , X_1 ve X_2 operatörlerinin yalnız ikisi arasında lineer bir bağıntı olması mümkün olmadığı için, (4.3.17)' den yani $(A\psi)X_1-\psi\lambda_1 A+(A\upsilon)A=-\lambda_2 A$ bağıntısından

$$A\psi=0 \tag{4.3.18}$$

olduğu anlaşılır.

Burada $\psi(x, y, y')$ ifadesi bir ilk integral olup, $Af = 0$'ın çözümüdür. Böylece (4.1.48) veya (4.1.50)' den $t(x, y)$ ve $s(x, y)$'nin belirlenmesi ile bir ψ çözümü elde edilebilir.

V. BÖLÜM

5. BELLİ TÜRDEN NON-LİNEER BİR DENKLEM SINIFININ LİNEER DENKLEM VE SİMETRİLER YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ

5.1 $2\,y\,y'' = y'^2 - 4\,q(x)\,y^2 + c$ denkleminin çözümleri

c bir sabit ve $q(x)$ x'in herhangi bir fonksiyonu olmak üzere

$$2\,y\,y'' = y'^2 - 4\,q(x)\,y^2 + c \tag{5.1.1}$$

tipinde belli türden lineer olmayan bir denklem sınıfının çözümlerini ancak c üzerinde bazı kısıtlamalar yaparak ve c' ye özel değerler vererek bulunabilir.

Bilindiği gibi ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \tag{5.1.2}$$

şeklindeki herhangi bir lineer homojen diferansiyel denklem

$$u'' + q(x)u = 0 \tag{5.1.3}$$

şeklinde kanonik forma indirgenebilir. $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları (5.1.3) denkleminin çözümleri ise

$$y = u_1(x)\,u_2(x) \tag{5.1.4}$$

fonksiyonu da c ' nin farklı değerleri için (5.1.1) denkleminin çözümüdür.

Gerçekten,

$$y' = u'_1 u_2 + u_1\,u'_2 \tag{5.1.5}$$

$$y'' = u''_1\,u_2 + 2\,u'_1\,u'_2 + u_1\,u''_2 \tag{5.1.6}$$

değerleri ve (5.1.4) ifadesi (5.1.1) denkleminde yerine konulursa

$$[\,u_1\,u'_2 - u'_1\,u_2\,]^2 + c = 0 \tag{5.1.7}$$

ifadesi elde edilir.

Buradan (5.1.4) ifadesinin (5.1.1) denkleminin bir çözümü olabilmesi için

$$c = -[u_1\,u'_2 - u'_1\,u_2\,]^2 \tag{5.1.8}$$

olması gerektiği sonucuna varırız

Diğer taraftan (5.1.8) ifadesi

$$w(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}=w_0 \tag{5.1.9}$$

olmak üzere

$$c=-w_0^2 \tag{5.1.10}$$

şeklinde ifade edildiğinde (5.1.4)' nın (5.1.1) denkleminin bir çözümü olması (5.1.10) eşitliğinin olması ile mümkündür.

Bu yöntemi (5.1.1) denklemine uygulayarak denklemde bulunan $q(x)$ in reel değerli olması halinde c' nin farklı değeri için denklemin iki paramatreli çözümlerini araştıralım.

c=0 olması durumu:

$u_1(x)$ ve $u_2(x)$, (5.1.3) denkleminin bağımsız çözümleri, c_1 , c_2 keyfi sabitler ve

$$u(x)=c_1\,u_1(x)+c_2\,u_2(x) \tag{5.1.11}$$

de (5.1.3) denkleminin genel çözümü olmak üzere, u ve u (5.1.3) 'in bağımlı çözümleridir ve

$$w_1(u,u)=(c_1\,c_2-c_1\,c_2)\,w_0=0 \tag{5.1.12}$$

dır. Buna göre

$$2yy''=y'^2-4q(x)y^2 \tag{5.1.13}$$

denkleminin iki parametreli çözümü

$$y=u(x)\,u(x)=[\,u(x)\,]^2=[c_1\,u_1(x)+c_2\,u_2(x)]^2 \tag{5.1.14}$$

şeklindedir.

Gerçekten (5.1.3) denkleminde (5.1.14) ifadesi ile verilen dönüşüm yapılırsa (5.1.13) denklemi elde edilir.

$c<0$ ve $c=-w_0^2$ olması durumu :

a_1 , a_2 , b_1 , b_2 keyfi sabitler olmak üzere (5.1.1) denkleminin çözümleri

$$y=\left[\,a_1\,u_1+a_2\,u_2\,\right]\left[\,b_1\,u_1+b_2\,u_2\,\right] \tag{5.1.15}$$

şeklindedir. (5.1.15) çözümündeki çarpanların bağımsız olması

$$(a_1\,b_2-a_2\,b_1)^2\,[u_1\,u_2'-u_1'\,u_2\,]^2+c=0 \tag{5.1.16}$$

veya

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{5.1.17}$$

olması ile eşdeğerdir.

(5.1.17) ifadesinden a_1 , a_2 ya da b_1 , b_2 nin her ikisinin birden sıfır olmayacağı görülür. Bu yüzden genelliği bozmaksızın $a_1 = 1$ alınabilir. Bu durumda (5.1.15) ifadesi

$$y = [u_1 + a_2\, u_2][b_1\, u_1 + b_2\, u_2] \tag{5.1.18}$$

veya $a_2 = c_1$, $b_1 = c_2$, $b_2 = c_3$ seçilirse

$$y = [u_1 + c_1\, u_2][c_2\, u_1 + c_3\, u_2] \tag{5.1.19}$$

olur.

$u_1 + c_2\, u_2$ ve $c_2\, u_1 + c_3\, u_2$' nin wronskiyenini w_2 ile gösterilirse

$$w_2 = (c_3 - c_1\, c_2)\, w_0 \tag{5.1.20}$$

olur. Buradan (5.1.18) çözümünün (5.1.1) denklemini sağlaması için

$$(c_3 - c_1c_2)^2 w_0^2 + c = 0 \tag{5.1.21}$$

yada

$$w_2^2 + c = 0 \tag{5.1.22}$$

olması gerektiği sonucuna varılır. (5.1.20) ve (5.1.22) dan

$$w_2^2 = -(c_3 - c_1\, c_2)^2\, c = -c \tag{5.1.23}$$

bulunur. Buradan

$$(c_3 - c_1\, c_2)^2 = 1 \tag{5.1.24}$$

yada

$$c_3 = c_1\, c_2 \pm 1 = k_1 \tag{5.1.25}$$

elde edilir.

Buradan (5.1.1) denkleminin iki parametreli çözümünü (5.1.19) ifadesinde (5.1.25) ile verilen c_3 değerini kullanarak

$$y = c_2\, u_1^2 + (k_1 + c_1\, c_2)\, u_1\, u_2 + c_1\, k_1\, u_2^2 \tag{5.1.26}$$

formuna dönüştürürüz.

$c < 0$ ve $c \neq -(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))^2 = -w_0^2$ olması durumu :

(5.1.20) ve (5.1.21) dan

$$w_2^2 = (c_3 - c_1 c_2)^2 w_0^2 = -c \tag{5.1.27}$$

yazılarak

$$c_3 = c_1 c_2 \pm \frac{\sqrt{-c}}{w_0} = k_2 \tag{5.1.28}$$

bulunur. Böylece (5.1.1) denkleminin çözümü c_3'ün (5.1.28) ile bulunan ifadesinden yararlanarak (5.1.26) çözümüne benzer şekilde

$$y = c_2 u_1^2 + (k_2 + c_1 c_2) u_1 u_2 + c_1 k_2 u_2^2 \tag{5.1.29}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan

$$u_1 = \frac{v_1}{\alpha} \quad , \quad u_2 = \frac{v_2}{\beta} \quad , \quad |\alpha| + |\beta| \neq 0 \tag{5.1.30}$$

seçilirse bu dönüşümle $w(v_1, v_2) = 1$ olacak şekilde α , β seçilebilir. Bu seçim sonucu c_3 sabiti

$$c_3 = c_1 c_2 \pm \sqrt{-c} = k_3 \tag{5.1.31}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (5.1.1) denkleminin iki parametreye bağlı çözümü u_1 , u_2 yerine v_1 , v_2 alınmak sureti ile

$$y = c_2 v_1^2 + (k_3 + c_1 c_2) v_1 v_2 + c_1 k_3 v_2^2 \tag{5.1.32}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$c > 0$ olması durumu:

$c > 0$ olması durumunda (5.1.1) denkleminin reel çözümünün varlığını araştıralım. (5.1.20) ve (5.1.21) bağıntılarından

$$w_2^2 = (c_3 - c_1 c_2)^2 w_0^2 = -c \quad , \quad c > 0 \tag{5.1.33}$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan (5.1.19) ifadesindeki c_3

$$c_3 = c_1 c_2 \pm \frac{\sqrt{-c}}{w_0} = k_4 \tag{5.1.34}$$

veya

$$c_3 = c_1 c_2 \pm i \frac{\sqrt{c}}{w_0} = k_4 \tag{5.1.35}$$

şeklinde olması gerekir.

Böylece (5.1.1) denkleminin iki parametreli çözümü

$$y = c_2\, u_1^2 + (k_4 + c_1\, c_2)\, u_1\, u_2 + c_1\, k_4\, u_2^2 \qquad (5.1.36)$$

şeklinde ifade edilebilir. (5.1.36) ifadesi α_1 , α_2 , β_1 , β_2 reel değerler olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_1 + i\beta_1 \\ c_2 &= \alpha_2 + i\beta_2 \end{aligned} \qquad (5.1.37)$$

için

$$\begin{aligned} y &= \alpha_2 u_1^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)u_1u_2 + \left[\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \beta_1(2\alpha_1\beta_1 \pm \frac{\sqrt{c}}{w_0})\right]u_2^2 \\ &+ i\left\{\beta_2 u_1^2 + \left[2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \pm \frac{\sqrt{c}}{w_0}\right]u_1u_2 + \left[\beta_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + \alpha_1(2\alpha_2\beta_1 \pm \frac{\sqrt{c}}{w_0})\right]u_2^2\right\} \end{aligned} \qquad (5.1.38)$$

şeklinde yazılır. (5.1.38) ifadesindeki sanal kısmın sıfır olması için

$$\begin{aligned} &\beta_2 = 0 \\ &2\alpha_2\, \beta_1 \pm \frac{\sqrt{c}}{w_0} = 0 \end{aligned} \qquad (5.1.39)$$

olması gerekir. Buradan

$$\alpha_1 \ \textit{keyfi} \ , \ \alpha_2 \neq 0 \ , \ \beta_1 = \mp\frac{\sqrt{c}}{2\alpha_2 w_0} \ , \ \beta_2 = 0 \qquad (5.1.40)$$

olmak üzere reel çözüm

$$y = \alpha_2\, u_1^2 + 2\,\alpha_1\, \alpha_2\, u_1\, u_2 + (\alpha_1^2\, \alpha_2 + \frac{c}{4\alpha_2 w_0^2})\, u_2^2 \qquad (5.1.41)$$

şeklinde bulunur.

$\mathrm{Im}\, c \neq 0$ olması durumu

Eğer y gerçel ise (5.1.1) denkleminden $\mathrm{Im}\, c \neq 0$ olması gerektiği sonucuna varırız. Bu durumda (5.1.1) denkleminin $\mathrm{Im}\, c \neq 0$ için gerçel değerli çözümünün olmadığı sonucunu varırız.

(5.1.1) Non lineer diferansiyel denkleminin (5.1) de incelenen c' nin özel değerleri ve q(x)' nin belirli şekilleri için elde edilen çözümleri simetriler yardımı ile elde edilebilir mi? Bu sorunun cevabı son yıllarda birçok uygulama alanı bulan ve non lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine katkısı bulunan bu çalışmanın 3. Bölüm de incelenen 2. ci mertebeden diferansiyel denklemlerin simetrileri ve bulunan simetriler yardımı ile denklemlerin çözümleri (5.1.1) denklemine uygulanarak verilebilir.

Gerçekten (5.1.1) denkleminin simetrisi (2.6.3) de verilen simetri şartlarından elde edilebilir . Eğer (5.1.1) denkleminden elde edilen türev değerleri (2.6.3) ifadesinde yazılırsa

$$\begin{aligned}&-(2y^2\xi_{yy}+y\xi_y)y'^3-(y\eta_y-\eta-2y^2\eta_{yy}+4y^2\xi_{xy})y'^2+(12q(x)y^3\xi_y-3cy\xi_y\\&-2y\eta_x+4y^2\eta_{xy}-2y^2\xi_{xx})y'+4q'(x)y^3\xi+(4y^2\eta-4y^3\eta_y+8y^3\xi_x)q(x)\\&+cy(\eta_y-2\xi_x)+c\eta+2y^2\eta_{xx}=0\end{aligned} \tag{5.1.42}$$

denklemi elde edilir. (5.1.42) sağlanması için

$$2y\xi_{yy}+\xi_y=0 \tag{5.1.43}$$

$$y\eta_y-\eta-2y^2\eta_{yy}+4y^2\xi_{xy}=0 \tag{5.1.44}$$

$$12q(x)y^2\xi_y-3c\xi_y-2\eta_x+4y\eta_{xy}-2y\xi_{xx}=0 \tag{5.1.45}$$

$$\begin{aligned}&+4y^3\xi q'(x)+(-4y^3\eta_y+8y^3\xi_x+4y^2\eta)q(x)\\&\qquad+cy(\eta_y-2\xi_x)+c\eta+2y^2\eta_{xx}=0\end{aligned} \tag{5.1.46}$$

olmalıdır.

Sırası ile bu denklemleri çözelim

(5.1.43) 'de

$$\xi_y=p \tag{5.1.47}$$

dönüşümü yapılırsa

$$2y\frac{dp}{dy}+p=0 \tag{5.1.48}$$

lineer denklemi elde edilir. (5.1.48) denkleminden; $A(x)$ x' in bir keyfi fonksiyonu olmak üzere

$$p = A(x)\, y^{-\frac{1}{2}} \tag{5.1.49}$$

elde edilir. (5.1.47) denkleminden; $B(x)$ x ' in keyfi fonksiyonu olmak üzere

$$\xi(x,y) = 2A(x)y^{\frac{1}{2}} + B(x) \tag{5.1.50}$$

bulunur.

(5.1.44) denkleminde (5.1.50) kullanılırsa $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$\eta(x,y) = C_1(x)\, y + C_2(x)\, y^{\frac{1}{2}} + 4\, A'(x)\, y^{\frac{3}{2}} \tag{5.1.51}$$

elde edilebilir.

Benzer şekilde (5.1.45) ' den, (5.1.50) ve (5.1.51) kullanılırsa

$$[12\, q(x)\, A(x) + 12\, A''(x)\,]\, y^{\frac{3}{2}} + (2\, C_1'(x) - 2\, B''(x))\, y - 3\, c\, A(x)\, y^{-\frac{1}{2}} = 0 \tag{5.1.52}$$

ifadesi elde edilir.

(5.1.52) ifadesi sağlanması; $y \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğundan

$$q(x)\, A(x) + A''(x) = 0 \tag{5.1.53}$$

$$C_1'(x) - B''(x) = 0 \tag{5.1.54}$$

$$A(x) = 0 \tag{5.1.55}$$

olması ile mümkündür. (5.1.55) ifadesi (5.1.50) , (5.1.51) de yerine yazılırsa

$$\xi = B(x) \tag{5.1.56}$$

$$\eta = C_1(x)y + C_2(x)y^{\frac{1}{2}} \tag{5.1.57}$$

bulunur. ξ ve η ' nın (5.1.56) ve (5.1.57) ile bulunan değerleri (5.1.46) ifadesinde yazılırsa

$$\begin{aligned} &[\,4\, B(x)\, q'(x) + 8\, B'(x)\, q(x) + 2\, C_1'''(x)\,]\, y^3 + [2\, C_2(x)\, q(x) + 2\, C_2''(x)\,]\, y^{\frac{5}{2}} \\ &+ [2\, c\, C_1(x) - 2\, c\, B'(x)]\, y + \frac{3}{2} c\, C_2(x)\, y^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \tag{5.1.58}$$

bulunur. (5.1.58)' nin sağlanması için $y \neq 0$, $c \neq 0$ olduğundan,

$$2\, B(x)\, q'(x) + 4\, B'(x)\, q(x) + C_1'''(x) = 0 \tag{5.1.59}$$

$$C_2(x) q(x) + C_2''(x) = 0 \tag{5.1.60}$$

$$C_1(x) - B'(x) = 0 \tag{5.1.61}$$

$$C_2(x) = 0 \tag{5.1.62}$$

denklemi elde edilebilir. (5.1.61) ve (5.1.62) dan

$$\eta = B'(x)\, y \tag{5.1.63}$$

bulunur. Böylece ξ ve η için elde edilen (5.1.56) ve (5.1.63) den simetri

$$X = B(x)\frac{\partial}{\partial x} + B'(x)\, y \frac{\partial}{\partial y} \tag{5.1.64}$$

şeklinde bulunur.

Bulunan bu simetriden yararlanarak $B(x)$ fonksiyonunun şekline göre (5.1.1) denkleminin çözümlerini araştıralım.

Özel Durumlar:

$B(x)$; a ve b herhangi reel sabitler olmak üzere

$$B(x) = ax + b \tag{5.1.65}$$

şeklinde birinci dereceden bir polinom olması durumu (5.1.59) 'de $C_1''(x) = B'''(x) = 0$ olduğundan

$$4\, B'(x)\, q(x) + 2\, B(x)\, q'(x) = 0 \tag{5.1.66}$$

veya

$$4\, a\, q(x) + 2\,(ax + b)\, q'(x) = 0 \tag{5.1.67}$$

ifadesi elde edilir. (5.1.67) ' den K bir sabit olmak üzere

$$q(x) = \frac{K}{(ax + b)^2} \tag{5.1.68}$$

bulunur.

3. Bölüm'de detaylarını verdiğimiz yöntemi kullanarak (3.2.21) , (3.2.17) , (3.2.18) bağıntılarından yararlanarak

$$y = e^{as} \tag{5.1.69}$$

$$t = \frac{e^{as}}{ax + b} \tag{5.1.70}$$

elde ederiz. (5.1.69) ve (5.1.70)' den

$$dy = a\, e^{as}\, ds \tag{5.1.71}$$

$$dx = e^{as}\left(\frac{1}{t}ds - \frac{1}{a\,t^2}dt\right) \tag{5.1.72}$$

bulunur. Bu ifadelerden y' ve y'' için

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{a^2 t^2}{at - \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}} \tag{5.1.73}$$

$$y'' = \frac{dy'}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d}{ds}\left(\frac{a^2 t^2}{at - \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}}\right)\frac{ds}{dx} \tag{5.1.74}$$

değerleri elde edilir.

Diğer taraftan (5.1.69) ifadesinden

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{ay}\frac{dy}{dx} = \frac{at^2}{e^{as}\left(at - \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}\right)} \tag{5.1.75}$$

ve (5.1.74) ' ın

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} \tag{5.1.76}$$

şeklindeki ifadesi göz önüne alınarak y'' için

$$y'' = \left\{a^3 t^2 - 2a^2 t\,(s')^{-1} - a^2 t^2 s''(s')^{-2}\right\}(s')^{-1}\frac{at^2}{e^{as}}(at - (s')^{-1})^{-3} \tag{5.1.77}$$

bulunur. (5.1.68) , (5.1.69) , (5.1.73) , (5.1.77) değerleri (5.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$2t\,s'' + \left[(a\,t\,s' - 1) - 2\right]a\,t\,(s')^2 + 4s' + (c - 4Kt^2)\left(\frac{a\,t\,s' - 1}{a\,t}\right)^3 = 0 \tag{5.1.78}$$

denklemi bulunur. (5.1.78) denkleminde $U(t)$ t' nin bir fonksiyonu olmak üzere

$$s = U + \frac{\ln t}{a} \tag{5.1.79}$$

dönüşümünü yapılırsa

$$s' = U' + \frac{1}{at} \tag{5.1.80}$$

ve

$$s'' = U'' - \frac{1}{at^2} \tag{5.1.81}$$

olur. Bu değerler (5.1.78) ' de yerine yazılırsa

$$2tU'' + U' + [c + (a^2 - 4K)t^2]\,[U']^3 = 0 \tag{5.1.82}$$

denklemi bulunur. (5.1.82) ' de

$$U' = \frac{dU}{dt} = V \tag{5.1.83}$$

dönüşümü yapılırsa

$$V'(t) + \frac{1}{2t}V(t) = -\frac{\lfloor c + (a^2 - 4K)t^2 \rfloor}{2t}[V(t)]^3 \tag{5.1.84}$$

denklemine ulaşılır.

Bu denklem

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \qquad n \neq 0 \tag{5.1.85}$$

şeklinde bir Bernoulli denklemidir.

(5.1.84) nin her iki yanı V^{-3} ile çarpılırsa

$$V^{-3}V' + \frac{1}{2t}V^{-2} = -\frac{\lfloor c + (a^2 - 4K)t^2 \rfloor}{2t} \tag{5.1.86}$$

bulunur. Bu denklemde

$$T = V^{-2} \tag{5.1.87}$$

dönüşümü yapılarak

$$T' = -2V^{-3}V' \tag{5.1.88}$$

ile birlikte

$$T' - \frac{1}{t}T = \frac{c + (a^2 - 4K)t^2}{t} \tag{5.1.89}$$

lineer denklemine ulaşılır. Bu denklemin çözümü ise C_1 bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$T = (a^2 - 4K)t^2 + C_1 t - c \tag{5.1.90}$$

dir. Buradan (5.1.87) göz önüne alınarak

$$V=[(a^2-4K)t^2+C_1t-c]^{-\frac{1}{2}} \tag{5.1.91}$$

elde edilir. (5.1.83) 'de V ' nin bu değeri kullanılırsa U için

$$U=\int[(a^2-4K)t^2+C_1t-c]^{-\frac{1}{2}}dt \tag{5.1.92}$$

bulunur. Bu integrali

$$U=\int\frac{dt}{\left\{(a^2-4K)\left[\left(t+\dfrac{C_1}{2(a^2-4K)}\right)^2-\dfrac{C_1^2+4c(a^2-4K)}{4(a^2-4K)^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{5.1.93}$$

şeklinde yazalım ve integrali $a^2-4K>0$ ve $a^2-4K<0$ olması durumlarına göre inceleyelim

1) $a^2-4K>0$ ise;

$C_1^2+4c(a^2-4K)$ nın işaretine bağlı olarak (5.1.93) ifadesinde

$$\frac{C_1^2+4c(a^2-4K)}{4(a^2-4K)^2}=\pm M^2 \tag{5.1.94}$$

$$t+\frac{C_1}{2(a^2-4K)}=\alpha \tag{5.1.95}$$

dönüşümünü yapalım. Bu durumda (5.1.93) integrali

$$U=\frac{1}{\sqrt{a^2-4K}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2\pm M^2}} \tag{5.1.96}$$

olur. (5.1.96) ' de gerekli hesaplamalar yapılırsa $\ln C_2$ integrasyon sabiti olmak üzere

$$U=\frac{1}{\sqrt{a^2-4K}}\log\left\{t+\frac{C_1}{2(a^2-4K)}+\sqrt{\left(t+\frac{C_1}{2(a^2-4K)}\right)^2\pm M^2}\right\}+\ln C_2 \tag{5.1.97}$$

bulunur. (5.1.69) , (5.1.70) , (5.1.79) kullanılarak (5.1.1) denklemlerinin çözümü olarak

$$y=-\frac{C_1}{2(a^2-4K)}(ax+b)+\frac{1}{2}C_2^{\sqrt{a^2-4K}}(ax+b)^{\frac{\sqrt{a^2-4K}}{a}+1}$$

$$\pm\frac{1}{2}\left(\frac{C_1^2+4c(a^2-4K)}{4(a^2-4K)^2}\right)C_2^{-\sqrt{a^2-4K}}(ax+b)^{-\frac{\sqrt{a^2-4K}}{a}+1} \qquad (5.1.98)$$

ifadesi bulunur.

2) $a^2-4K<0$ ise

(5.1.93) ifadesinin tanımlı olması için ifadenin karakök altındaki kısmının pozitif olması gerektiğini biliyoruz.

Bunun için de

$$\left(t+\frac{C_1}{2(a^2-4K)}\right)^2-\frac{C_1^2+4c(a^2-4K)}{4(a^2-4K)^2}<0 \qquad (5.1.99)$$

olmalıdır. Bunun sağlanması

$$C_1^2+4c(a^2-4K)>0 \qquad (5.1.100)$$

olması ile mümkündür.

Bu durumda (5.1.93) ifadesi (5.1.94), (5.1.95), (5.1.96), (5.1.100) dikkate alınırsa

$$U=\frac{1}{\sqrt{|a^2-4K|}}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{M^2-\alpha^2}} \qquad (5.1.101)$$

şeklinde yazılır. (5.1.101) integrali için

$$\alpha=M\sin\theta \qquad (5.1.102)$$

dönüşümü yapılırsa

$$U=\frac{1}{\sqrt{|a^2-4K|}}\arcsin\frac{2t(a^2-4K)+C_1}{\sqrt{C_1^2+4c(a^2-4K)}}+C_2 \qquad (5.1.103)$$

bulunur.

(5.1.103) ifadesinde (5.1.69), (5.1.70), (5.1.79) kullanılırsa (5.1.1) denkleminin

$$y=\left\{\sqrt{C_1^2+4c(a^2-4K)}\sin\left(\sqrt{|a^2-4K|}\left[\frac{\ln(ax+b)}{a}-C_2\right]\right)-C_1\right\}\frac{ax+b}{2(a^2-4K)}$$

(5.1.104)

şeklindeki çözümü elde edilir.

3) $a^2 - 4K = 0$ ise;

Bu durumda (5.1.82) denklemi

$$2t\,U'' + U' + c\left[U'\right]^3 = 0 \tag{5.1.105}$$

şeklini alır. Bu ise (5.1.83) dönüşümü yardımı ile

$$V' + \frac{1}{2t}V = -\frac{c}{2t}\left[V\right]^3 \tag{5.1.106}$$

veya

$$2t\,V' + V + c\left[V\right]^3 = 0 \tag{5.1.107}$$

şeklinde yazılır. (5.1.107) denkleminin çözümü C_1 bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$V(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{C_1 t - c}} \tag{5.1.108}$$

olarak bulunur. Buradan (5.1.83) kullanılarak C_2 bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$U(t) = \pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 t - c} + C_2 \tag{5.1.109}$$

bulunur. Böylece (5.1.1) denkleminin genel çözümü (5.1.69) , (5.1.70) , (5.1.79) ifadeleri yardımı ile

$$y = \frac{ax+b}{c}\left\{\frac{C_1^2}{4}\left[\frac{1}{a}\ln(ax+b) - C_2\right]^2 + c\right\} \tag{5.1.110}$$

olarak bulunur.

5.2 Karşılaştırma

(5.1.3) kanonik denkleminin çözümleri ile (5.1.1) denkleminin çözümleri arasında kurulan ilişki incelendiğinde (5.1.1) denkleminin çözümünün c' nin bazı özel ve sınırlı değerleri için yapılabildiğini gösterir. Bu şekilde yapılan çözümler (5.1.1) tipinde bir denkleminin tam çözümlerinin bulunması için sınırlamalar getirmekte, bulunan çözümlerin belli koşulları sağlaması istenmektedir. Bu nedenle bu çözüm şekli en genel (5.1.1) denkleminin en genel çözümlerini veren bir yöntem değildir.

(5.1.1) denkleminin $q(x)$ 'in belli formları ve c' nin tüm değerleri için denklemin simetrisi bulunarak yapılan çözümü denklemin lineerleştirilerek yapılan çözümünden farklılıklar göstermektedir.

Simetriler yardımı ile yapılan ve irdelemesi yapılan çözüm, c' nin tüm değerleri içindir. Bu nedenle bu yöntem $q(x)=\dfrac{K}{(ax+b)^2}$ olması durumunda ilk yöntemine göre daha genel bir yöntem olarak gözükmektedir.

Örneğin;

(5.1.1) denkleminde $q(x)=\dfrac{1}{4(x+1)^2}$, $c=-1$ alınırsa denklem

$$2\,y\,y''=y'^2-(x+1)^{-2}\,y^2-1 \tag{5.2.1}$$

olur. Bu denkleme karşı gelen lineer denklem

$$u''+\frac{1}{4(x+1)^2}u=0 \tag{5.2.2}$$

dir ve denklemin iki bağımsız çözümü

$$u_1=(x+1)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad u_2=(x+1)^{\frac{1}{2}}\ln(x+1) \tag{5.2.3}$$

ve wronski determinantın değeri

$$w_0=1 \tag{5.2.4}$$

dir. Bu durumda (5.2.1) denkleminin çözümü C_1 , C_2 keyfi sabit ve $k_1=C_1C_2\pm 1$ olmak üzere

$$y=C_2\,(x+1)+(k_1+C_1\,C_2)\,(x+1)\ln(x+1)+C_1\,k_1\,(x+1)\ln^2(x+1) \tag{5.2.5}$$

olarak bulunur.

Aynı denklemin simetriler yardımı ile çözümü ise

$$X = (x+1)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.2.6}$$

(5.2.1) denkleminin simetrisi, C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = \left(\frac{C_1 C_2^2}{4} - \frac{1}{C_1}\right)(x+1) + \frac{C_1}{4}(x+1)\ln^2(x+1) - \frac{C_1 C_2}{2}(x+1)\ln(x+1) \tag{5.2.7}$$

olarak bulunur.

(5.2.1) denkleminin (5.2.5) ve (5.2.7) çözümleri benzer çözümlerdir. (5.1.1) denkleminin simetriler yardımı ile yapılan çözümlerinde $q(x)$ ' nin değişik formları için benzer çözümlerin nasıl olacağı incelenmesi gereken konulardandır.

VI. BÖLÜM

6.1 TARTIŞMA

Genel olarak n. mertebeden bir diferansiyel denklem Lie nokta simetrilerinin en küçük n-parametreli bir grubunu içerir ve simetriler yardımı ile çözülür . n yada daha fazla simetriye sahip non- lineer bir diferansiyel denklemde bulunan simetriler bunların gizlenmiş formda bir lineer denklemle ilgili olduğunu gösterir. Bu durumda diferansiyel denklemin lineer forma dönüştürülmesi çözüm için oldukça yararlıdır.

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem daima sonsuz sayıda simetriye sahiptir. n.ci mertebeden bir diferansiyel denklem için bulunan Lie nokta simetrilerinin r sayısı $r \leq n+4$ ile sınırlıdır. Eğer n. mertebeden bir diferansiyel denklemin bir Lie nokta simetrisi kabul ettiği bilinirse bu durumda bu simetriden yararlanarak denklemin çözümü; ayrıntıları Bölüm III de verilen grup yörüngelerini ifade eden birinci mertebeden bir diferansiyel denkleme veya iki quadratüre veya (n-1). mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümüne indirgenir.

Bu çalışmada bazı denklemlerin simetriler yardımı ile yapılan çözümlerinin çözümü yapılan denkleme bazı kısıtlamalar getirilerek yapılan çözümlerinden daha genel olduğu, belli türden bir diferansiyel denklem sınıfının çözümü yapılarak gösterilmiştir.

Litaratür çalışması şeklinde yapılan bu çalışmada birinci ve ikinci mertebeden sıradan diferansiyel denklemlerin simetriler yardımı ile çözümleri incelenmiştir.

Daha ileri çalışmalarda çok parametreli gruplar bu gruplarla ilişkili simetriler ve üreteçler, kısmi türevli denklemler incelenebilir.

EK-A

1) (2.6) ' da ayrıntısı verilen işlemleri

$$y'' = w(x,y,y') = x^n\, y^2 \quad , \quad n \neq 0 \tag{A.1}$$

diferansiyel denklemine uygulayalım.

Denklemden $w_x = n\,x^{n-1} y^2$, $w_y = 2\,x^n\, y$, $w_{y'} = 0$ olup, simetri şartı

$$\begin{aligned} &x^n y^2 (\eta_y - 2\xi_x) - n\,x^{n-1} y^2\, \xi - 2\,x^n\, y\,\eta - + \eta_{xx} \\ &\quad + (2\,\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\,x^n\, y^2\, \xi_y)\, y' + (\eta_{yy} - 2\,\xi_{xy})\, y'^2 - \xi_{yy}\, y'^3 = 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

olarak bulunur. Bu bağıntıda y'^2 ve y'^3 terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$\xi_{yy} = 0 \quad , \quad \eta_{yy} = 2\xi_{xy} \tag{A.3}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin birincisinden integral ile

$$\xi(x,y) = \alpha(x)\, y + \beta(x) \tag{A.4}$$

ve ikincisinin integrali ile

$$\eta(x,y) = \alpha'(x)\, y^2 + \gamma(x)\, y + \delta(x) \tag{A.5}$$

ifadeleri bulunur. Buradan ξ ve η fonksiyonlarının y' nin birer polinomları oldukları görülür. (A.2) denkleminde y' teriminin katsayısını sıfıra eşitlemekle, (A.4) ve (A.5)'i kullanarak

$$-3\,x^n\, y^2\, \alpha(x) + 3\,y\,\alpha''(x) + 2\gamma'(x) - \beta''(x) = 0 \tag{A.6}$$

ifadesi elde edilir. (A.6) ifadesinde $\alpha(x) = 0$ için, $2\gamma'(x) = \beta''(x)$ dır. Böylece ξ ve η fonksiyonları

$$\xi = \beta(x) \quad , \quad \eta = y\left\{\frac{\beta'(x)}{2} + c\right\} + \delta(x) \quad \text{(c:integral sabiti)} \tag{A.7}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler (A.2)' te yerlerine yazılır ve

$$x^n\, y^2\, (\eta_y - 2\,\xi_x) - n\,x^{n-1}\, y^2\, \xi - 2\,y\,x^n\, \eta + \eta_{xx} = 0$$

şeklindeki y' süz terimlerin bulunduğu ifade göz önüne alınırsa

$$-y^2\left\{x^n\left(\frac{5}{2}\beta' + c\right) + n\,x^{n-1}\,\beta\right\} + y\left\{\frac{1}{2}\beta''' - 2\,x^n\,\delta\right\} + \delta'' = 0 \tag{A.8}$$

denklemine ulaşılır. Buradaki tüm terimler sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{5}{2}x\beta' + cx + n\beta = 0 \tag{A.9}$$

$$\delta = \frac{1}{4}x^{-n}\beta''' \tag{A.10}$$

$$\delta'' = 0 \tag{A.11}$$

denklemleri elde edilir. İlk denklemden $\beta(x)$ belirlenebilir. Bulunan bu $\beta(x)$ değeri kullanılarak ikinci denklemden $\delta(x)$ hesaplanabilir. Son denklem, ilk denklemden bulunan $\beta(x)$ çözümünün sağlaması gereken şartı verir. Bu doğrultuda gidildiğinde, n değerine karşı gelen birçok durumla karşılaşılır. Yani, (A.9) denkleminden,

$$\beta' + \frac{2n}{5x}\beta = -\frac{2c}{5} \quad , \quad (x \neq 0)$$

şeklinde 1.mertebeden lineer bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem çözülürse, çözüm k bir integral sabiti olmak üzere

$$\beta(x) = kx^{-\frac{2n}{5}} - \frac{2c}{2n+5}x \tag{A.12}$$

şeklinde bulunur. (A.12) ifadesi kullanılarak (A.10) denkleminden

$$\delta(x) = -\frac{n(2n+5)(n+5)}{5^3}k\,x^{-\frac{7n+15}{5}} \tag{A.13}$$

olarak bulunur. Burada $\delta''(x) = -\frac{n(2n+5)(n+5)(7n+15)(7n+20)}{5^5}k\,x^{-\frac{7n+25}{5}}$ dır.

Bu ifade (A.11) den $-\frac{n(2n+5)(n+5)(7n+15)(7n+20)}{5^5}k\,x^{-\frac{7n+25}{5}} = 0$ şeklinde yazılırsa bu eşitliğin sağlanması için $k = 0$ veya $n = 0$ veya $n = -5/2$ veya $n = -5$ veya $n = -15/7$ veya $n = -20/7$ olması gerektiği sonucuna varılır. Burada $n \neq 0$ olduğu dikkate alınır ve k>0 seçilirse eşitliğin sağlanması için $n = -5/2$ veya $n = -5$ veya $n = -15/7$ veya $n = -20/7$ olduğu görülür. (A.5) de bulunan $\gamma(x)$ ifadesinin değeri $\gamma(x) = \frac{1}{2}\beta'(x) + c$ olduğu dikkate alınarak gerekli düzenleme yapılırsa $\gamma(x)$ için

$$\gamma(x) = -\frac{n}{5}k\,x^{-\frac{2n+5}{5}} + \frac{2n+4}{2n+5}c \tag{A.14}$$

bulunur. Simetri bileşenleri ise $\beta(x)=kx^{-\frac{2n}{5}}-\dfrac{2c}{2n+5}x$, $\alpha(x)=0$,

$\gamma(x)=-\dfrac{n}{5}kx^{-\frac{2n+5}{5}}+\dfrac{2n+5}{2n+4}c$, $\delta(x)=-\dfrac{n(2n+5)(n+5)}{5^3}kx^{-\frac{7n+15}{5}}$ olduğu göz önüne

alınarak, $\xi=\beta(x)$, $\eta=y\gamma(x)+\delta(x)$' den

$$\xi=k\,x^{-\frac{2n}{5}}-\frac{2c}{2n+5}x \tag{A.15}$$

$$\eta=y\left\{-\frac{n}{5}k\,x^{-\frac{2n+5}{5}}+\frac{2n+4}{2n+5}c\right\}-\frac{n(2n+5)(n+5)}{5^3}kx^{-\frac{7n+15}{5}} \quad , \quad (n\neq-\frac{5}{2}) \tag{A.16}$$

olarak bulunur. n sayıları gözden geçirilirse, sonuç olarak $n=-5$ veya $n=-15/7$ veya $n=-20/7$ olduğu görülür.

Sonuç olarak $y''=x^n y^2$, $(n\neq 0)$ diferansiyel denkleminin simetrileri

$$n=-5 \quad \text{için} \quad X=(ax^2+bx)\frac{\partial}{\partial x}+y(ax+3b)\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.17}$$

$$n=-\frac{15}{7} \quad \text{için} \quad X=\left(a\frac{7^3}{12}x^{\frac{6}{7}}+7bx\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left[a+y\left(b+\frac{49}{4}ax^{-\frac{1}{7}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.18}$$

$$n=-\frac{20}{7} \quad \text{için} \quad X=\left(a\frac{7^3}{12}x^{\frac{8}{7}}+\frac{6}{7}bx\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left[-ax+y\left(b+\frac{49}{3}ax^{\frac{1}{7}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.19}$$

ve diğer tüm n' ler için $X=b\,x\dfrac{\partial}{\partial x}-(n+2)\,b\,y\dfrac{\partial}{\partial y}$ dir.

Tüm bu durumlardan, $y''=x^n y^2$ diferansiyel denkleminin daima bir simetri ve istisnai durumlarda iki simetri (a ve b gibi iki parametreli) kabul ettiği görülür.

2) Benzer şekillerde; detaylarını verdiğimiz yöntemi

$$y''=(x-y)y'^3 \tag{A.20}$$

diferansiyel denklemine uygulayalým. Bu denklem için (2.6.3) simetri þartý; $w_x=y'^3$, $w_y=-y'^3$, $w_{y'}=3(x-y)y'^2$ türevleri kullanılırsa,

$$(x-y)y'^3\left[\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y\right]-y'^3\xi+y'^3\eta-3(x-y)y'^2\left[\eta_x+y'(\eta_y-\xi_x)-y'^2\xi_y\right]$$
$$+\eta_{xx}+y'(2\eta_{xy}-\xi_{xx})+y'^2(\eta_{yy}-2\xi_{xy})-y'^3\xi_{yy}=0$$

(A.21)

olarak bulunur. y' nün bulunmadığı ve y''e göre lineer olan terimler sıfıra eşitlenirse

$\eta_{xx}=0$, $2\eta_{xy}-\xi_{xx}=0$ olur. $\eta_{xx}=0$ ifadesinden

$$\eta(x,y)=\alpha(y)x+\beta(y) \tag{A.22}$$

ve $2\eta_{xy}-\xi_{xx}=0$ ifadesinden

$$\xi(x,y)=\alpha'(y)x^2+\gamma(y)x+\delta(y) \tag{A.23}$$

bulunur. (A.21) bağıntısında kalan diğer terimler

$[2(y-x)\eta_y+(x-y)\xi_x-\xi+\eta-\xi_{yy}]y'^3+[3(y-x)\eta_x+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})]y'^2=0$ olup. Bu ifade ise (A.22) ve (A.23) denklemlerinden yararlanılarak

$$-x^2y'^3(\alpha'''+\alpha')-xy'^3(2\beta'-\alpha+\gamma'')-y'^3\left[\delta''+\delta+y(\gamma-2\beta')-\beta\right]-3xy'^2(\alpha''+\alpha)$$
$$-y'^2(2\gamma'-\beta''-3\alpha y)=0$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\alpha''+\alpha=0\\
&2\gamma'-\beta''-3\alpha y=0\\
&2\beta'+\gamma''-\alpha=0\\
&\delta''+\delta+y(\gamma-2\beta')-\beta=0
\end{aligned} \tag{A.24}$$

denklem sistemi elde edilir. İlk denklemden başlanarak çözüm yapılırsa

$$\alpha(y)=\alpha_1\cos y+\alpha_2\sin y$$
$$\beta(y)=a_4+a_3\cos 2y+a_6\sin 2y-a_1y\cos y-a_2y\sin y$$
$$\gamma(y)=-a_5\sin 2y+a_6\cos 2y+a_1\cos y+a_2\sin y+2a_1y\sin y+2a_2y\cos y+a_3$$
$$\begin{aligned}
\delta(y)=&\,a_7\cos y+a_8\sin y-a_6y\cos 2y+a_5y\sin 2y+a_5\cos 2y+a_6\sin 2y\\
&-a_4y^2\sin y+a_2y^2\cos y-a_4y\cos y-a_2y\sin y-a_3y-a_4
\end{aligned} \tag{A.25}$$

çözümleri bulunur. Buradaki a_i , $i=1,...,8$ sabitleri integrasyon sabitleridir. Dolayısıyla (A.20) diferansiyel denklemi nokta simetrilerinin sekiz parametreli bir grubunu kabul eder.

(A.24) diferansiyel denklem sisteminin iki basit çözümü vardır. Bu çözümler,

$$\beta=a=sabit=\delta \qquad (\gamma=\alpha=0)$$
$$\gamma=sabit=-\delta' \qquad (\alpha=\beta=0) \tag{A.26}$$

olarak bulunabilir. Buna göre simetri bileşenleri, $\alpha=\beta=0$, $\gamma=b=-\delta'$ için, $-\delta'=b$, $\delta=-by+a$ olup, $\xi=\alpha'(x)x^2+\gamma(y)x+\delta(y)$ den $\xi=ax^2+bx-by+a$ veya $\xi=a+b(x-y)$ ve $\alpha=\gamma=0$, $\beta=a=\delta$ için, $\eta=\alpha(y)x+\beta(y)$, $\eta=a$ bulunur. Buna göre (A.20) diferansiyel denkleminin simetrileri

$$X=[\,a+b(x-y)\,]\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.27}$$

şeklinde elde edilir.

3) İkinci mertebeden en basit diferansiyel denklem

$$y''=0 \tag{A.28}$$

denklemidir. Bu denklemin birçok simetrisi olduğunu tahmin ediyoruz.

Gerçektende

$$y''=w(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{A.29}$$

için, (2.6.3) simetri koşulundan $w=y''=0$ alınırsa,

$$\eta_{xx}+y'(2\eta_{xy}-\xi_{xx})+y'^2(\eta_{yy}-2\xi_{xy})-y'^3\xi_{yy}=0 \tag{A.30}$$

denklemine ulaşılır. Bu da

$$\eta_{xx}=(2\eta_{xy}-\xi_{xx})=(\eta_{yy}-2\xi_{xy})=\xi_{yy}=0 \tag{A.31}$$

şeklinde ifade edilir. (3.3.40) denkleminin terimleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse üreteç

$$X=(a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2)\frac{\partial}{\partial x}+(a_6+a_7x+a_8y+a_5xy+a_4y^2)\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.32}$$

olarak bulunur. Bu X üreteci, x-y düzleminde

$$\tilde{x}=\frac{ax+by+c}{ex+fy+g} \quad , \quad \tilde{y}=\frac{hx+ky+1}{ex+fy+g} \tag{A.33}$$

ile verilen genel izdüşüm dönüşümünün sekiz parametreli bir simetri üretecidir.

4) $y''+y=0$ diferansiyel denkleminin simetrilerini bulalım.

(2.6.3) simetri koşulunda y'' yerine $-y$ koyarsak,

$$\begin{aligned}-y[\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y]-w_x\,\xi+w_y\,\eta-w_{y'}\,[\eta_x+y'(\eta_y-\xi_x)-y'^2\,\xi_y]\\ +\eta_{xx}+y'(2\eta_{xy}-\xi_{xx})+y'^2(\eta_{yy}-2\xi_{xy})-y'^3\,\xi_{yy}=0\end{aligned} \tag{A.34}$$

bulunur. Burada $w_x=w_{y'}=0$ ve $w_y=-1$ olup, ifade düzenlenirse,

$$-y\lfloor\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y\rfloor + \eta + \eta_{xx} + y'(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y'^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y'^3\xi_{yy} = 0 \tag{A.35}$$

denklemi bulunur. Bu denklemde y'^3' ün katsayısı sıfıra eşitlenirse, $\xi_{yy} = 0$ dan

$$\xi = \alpha(x)y + \beta(x) \tag{A.36}$$

olur. Aynı şekilde sadece y ' li terimin katsayısı sıfıra eşitlenerek,

$$\eta_y - 2\xi_x = 0 \quad , \quad \eta = \alpha'(x)y^2 + 2\beta'(x)y \tag{A.37}$$

bulunur. y'' nün katsayısının sıfıra eşitlenmesi ile, $2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0$ olup gerekli hesaplamalar yapılırsa, $\xi = \alpha(x)y + \beta(x)$; $\eta = \alpha'(x)y^2 + 2\beta'(x)y$ dan

$$\alpha(x) = -\frac{1}{y}\beta(x) \tag{A.38}$$

bulunur. Bulunan $\alpha(x)$ değeri yerine yazılırsa,

$$\xi = -\frac{1}{y}y\beta(x) + \beta(x) \quad , \quad \xi = 0 \tag{A.39}$$

$$\eta = -\frac{1}{y}\beta'(x)y^2 + 2\beta'(x)y \quad , \quad \eta = \beta'(x)y \tag{A.40}$$

olur. $\eta + \eta_{xx} = 0$' dan $\beta'(x)y + \beta'''(x)y = 0$ olup,

buradan $\beta''' + \beta = 0$ denklemi çözülürse, $\beta = a_1 + a_2\cos x + a_3\sin x$ bulunur. Bu ifade $\eta = \beta'(x)y$ denkleminde yerine yazılırsa $\eta = (-a_2\sin x + a_3\cos x)y$ olur. Bu durumda $y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin bir simetrisi

$$X = y(a_3\cos x - a_2\sin x)\frac{\partial}{\partial y} \tag{A.41}$$

olarak bulunur.

EK-B

1)

Eğer w , y ' den bağımsız ise

$$y^{(n)} = w(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{B.1}$$

diferansiyel denklemi daima (3.2.11) ile verilen denklemin yapısında olur. Yani y' değişkeni için (n-1). mertebeden bir diferansiyel denklem olur.

Eğer w , x ' ten bağımsız ise,

$$y^{(n)} = w(x, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{B.2}$$

olup,

$$t = y, \quad s = x, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}, \quad X = \frac{\partial}{\partial s}, ...vs \tag{B.3}$$

şeklindeki basit koordinat dönüşümleri problemin çözümünde oldukça faydalıdır.

$$X = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad ab \neq 0 \tag{B.4}$$

formunda simetri kabul eden bir diferansiyel denklem göz önüne alalım. Diferansiyel denklemler ve kabul ettikleri simetriler benzerlik özelliğine sahip olup, bu denklemler ve simetriler

$$\tilde{x} = \lambda^{a} x \ , \ \tilde{y} = \lambda^{b} y \ , \ \tilde{y}' = \lambda^{b+a} y', ... \tag{B.5}$$

dönüşümleri altında değişmezler,

Burada yörüngeler için diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{by}{ax} \tag{B.6}$$

şeklinde olup, bu denklem çözülürse,

$$a \ln y = b \ln x + \ln t, \qquad (t : \text{int}\, egral\ sabiti)$$

$$y^{a} = t\, x^{b} \tag{B.7}$$

veya

$$t(x,y)=\frac{y^a}{x^b} \tag{B.8}$$

olur.

$s(x,y)$ fonksiyonu belirlemek için, ilk olarak (3.2.21) ifadesi kullanılmalıdır. Burada, $\eta(y,t)=by$ olduğundan

$$s(y,t)=\int\frac{dy}{by}=\ln(y^{\frac{1}{b}}) \tag{B.9}$$

bulunur. Buradan, $s(x,y)$ ' nin tek şekilde tanımlı olmadığı ve dolayısıyla t' nin bir fonksiyonun daima s' e eklenebileceği kanısına varılır. Eklenecek ifade

$$-\frac{\ln t}{ab}$$

olarak seçilirse, $\hat{s}=s+s_0(t)$ olup, $s=\ln(y^{\frac{1}{b}})$ olduğu kullanılırsa,

$$\hat{s}=\frac{\ln x}{a} \tag{B.10}$$

elde edilir.

2) (3.1)' de açıklanan yöntemi ve elde edilen sonuçları (A.1) ile verilen denkleme uygularsak $a=1$, $b=-(n+2)$ olmak üzere

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}-(n+2)\,y\frac{\partial}{\partial y} \tag{B.11}$$

şeklinde simetri üretecini buluruz. Diğer taraftan,

$$t=y\,x^{(n+2)}\quad,\quad s=\ln x\quad,\quad x=e^s\quad,\quad y=t\,e^{-(n+2)s} \tag{B.12}$$

olup, diferansiyel denklemdeki türevler hesaplanırsa,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx}=e^{-s}\,\frac{dy}{ds}=e^{-s}\,\frac{d}{ds}\left(t\,e^{-(n+2)s}\right)$$

$$y'=e^{-(n+3)s}\left\{\frac{dt}{ds}-(n+2)\,t\right\}=e^{-(n+3)s}\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}-(n+2)\,t\right\} \tag{B.13}$$

$$y''=-e^{-(n+4)s}\,(s')^{-3}\,s''-(2n+5)\,e^{-(n+4)s}\,s'^{\,-1}+(n+2)(n+3)\,e^{-(n+4)s}\,t \tag{B.14}$$

değerleri $y''=x^n\,y^2$ diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{-(n+4)s}\left\{-\frac{s''}{s'^3}-(2n+5)\frac{1}{s'}+(n+2)(n+3)t\right\}=e^{ns}\,t^2\,e^{-2(n+2)s} \qquad \text{(B.15)}$$

bulunur. Bu bağıntı $e^{(n+4)s}$ ile çarpılırsa, diferansiyel denklem

$$s''=-t^2\,s'^3+\{(n+2)(n+3)t\,s'-(2n+5)\}s'^2 \qquad ,(s'=\frac{ds}{dt}) \qquad \text{(B.16)}$$

olarak elde edilir.

3) Ek – A Örnek (2) ' de genel simetrisi bulunan (A.20) denkleminin

$$X=(x-y)\frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad (X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}) \qquad \text{(B.17)}$$

simetrisini göz önüne alalım . (3.2.18) ve (3.2.22)' ten,

$$s=\int\frac{dx}{\xi(x,t)}=\int\frac{dx}{x-t}=\ln(x-t) \quad , \quad t=y \quad , \quad x=t+e^s \qquad \text{(B.18)}$$

elde edilir. (A.20) diferansiyel denklemini s ve t değişkenlerine bağlı olarak yazalım; $y=x-e^s$ olup, x ' e göre türev alınırsa,

$$y'=1-e^s\frac{ds}{dx}=1-e^s\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}$$

veya

$$y'=\frac{1}{1+e^s\,(ds/dt)} \qquad \text{(B.19)}$$

ve

$$y''=\frac{d\,y'}{d\,x}=\frac{d\,t}{d\,x}\frac{d}{d\,t}y'=-\frac{e^s\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+e^s\,\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(1+e^s\,\frac{ds}{dt}\right)^3} \qquad \text{(B.20)}$$

bulunur.

Bu ifadeler $y''=(x-y)y'^3$ diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$s''+s'^2+1=0 \qquad \text{(B.21)}$$

denklemi elde edilir. (B.21) ' de $s'=p$ dönüşümü yapılırsa denklem

$$\frac{dp}{dt}+p^2+1=0 \qquad \text{(B.22)}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denkleme dönüşür.

$$p = \tan(c_1 - t) \tag{B.23}$$

bulunur. Buradan da

$$s = \ln\cos(c_1 - t) + \ln c_2 \tag{B.24}$$

elde edilir. (B.18) kullanılarak diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = x - c_2 \cos(c_1 - y) \tag{B.25}$$

ifadesi bulunur.

EK-C

Lie cebrine ait bazı örnekler

x-y düzlemindeki ötelemelerin

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

üreteçleri için,

$$[X_1, X_2] = 0 \quad , \quad [X_2, X_1] = 0 \tag{C.1}$$

dır. Yapı sabitleri sıfıra eşit olan gruplara " Abelian Gruplar " denir. Bir diğer örnek ise, diferansiyel denklemlerin simetrileri gibi olan ve

$$X = \eta(x)\frac{\partial}{\partial y} = \sum_{k=1}^{n} a^k U_k(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

ile verilen

$$X_N = U_N(x)\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad [X_N, X_M] = 0 \tag{C.2}$$

şeklindeki üreteçlerdir. Şimdi $y'' = x^{-5}y^2$ diferansiyel denkleminin simetrilerinin komütatörüne bakalım.

$y'' = x^{-5}y^2$ için $X = (ax^2 + bx)\frac{\partial}{\partial x} + y(ax + 3b)\frac{\partial}{\partial y}$ olup $n = -5$; $a = 1$; $b = 0$ ve $a = 0$, $b = 1$ için

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde olup,

$$[X_1 . X_2] = (x^2 - 2x^2)\frac{\partial}{\partial x} - (3xy - xy - 3xy)\frac{\partial}{\partial y} \tag{C.3}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $2y'y''' - 3(y'')^2 = 0$, $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + cy\frac{\partial}{\partial y}$

ifadesinden. (a=1 , b=0 , c=0) ; (a=0 , b=1 , c=0) ve (a=0 , b=0 , c=1) için sırasıyla

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y} \tag{C.4}$$

üreteçlerinden oluşan grup elde edilir. Bu üreteçlerin komütatörleri

$$[X_1, X_2] = 0 \quad , \quad [X_1, X_3] = 0 \quad , \quad [X_1, X_3] = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} = X_2 \tag{C.5}$$

şeklindedir. x- yönündeki bir ötelemeye, x-y düzleminde bir dönme eklenirse, Lie cebrini oluşturmak için,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad X_2 = -y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{C.6}$$

olup,

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x}(-y\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y}) - (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{C.7}$$

elde edilir. Bu komütatörün sağ tarafı X_1 ve X_2' nin (sabit bileşenlerle beraber) bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılamaz. Bu da X_1 ve X_2' nin yalnız başlarına bir lie cebrinin tabanını oluşturamadıklarını gösterir. Dolayısıyla, bu tabanı oluşturmak için üçüncü bir

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial y} \tag{C.8}$$

üretecine ihtiyaç vardır. Bu durumda,

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad , \quad [X_1, X_3] = 0 \quad , \quad [X_2, X_3] = X_1 \tag{C.9}$$

olarak bulunur.

Geometrik olarak, bir dönmenin x- yönünden y-yönüne doğru bir öteleme ürettiği açıkça görülür. Diferansiyel denklemlerin simetrileri çerçevesinde bu örneklere bakıldığında, eğer denklemin birkaç simetrisi bulunabiliyorsa, bu simetrilerin komütatörlerinin yeni simetriler belirtikleri görülür.

EK-D

(4.1) ile detaylarını verilen iki simetri ile çözüm yöntemi

$$y'' = (x-y)\,y'^3 \tag{D.1}$$

diferansiyel denklemine uygulayalım. Denklemin simetrileri

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad X_2 = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + y'(y'-1)\frac{\partial}{\partial y'} \tag{D.2}$$

dir . Şimdi (D.1) denkleminin $y = y(x, \varphi_0, \psi_0)$ şeklindeki genel çözümünü arayalım.

Burada $w = y''(x-y)\,y'^3$ olup, simetri üreteçlerinin komütasyonundan, $[X_1, X_2] = 0$ dir. Genişletilmiş üreteçler, $X_1 = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta_1' \dfrac{\partial}{\partial y'}$

$\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 1$ olup, $\eta_1' = \dfrac{d\,\eta_1}{d\,x} - y'\dfrac{d\,\xi_1}{d\,x} = 0$ kullanılarak

$$X_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_1' \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tag{D.3}$$

ve $X_2 = \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta_2' \dfrac{\partial}{\partial y'}$, $\xi_2 = (x-y)$, $\eta_2 = 0$ olup,

$\eta_2' = \dfrac{d\,\eta_2}{d\,x} - y'\dfrac{d\,\xi_2}{d\,x} = y'(y'-1)$ olduğundan, genişletilmiş üreteç

$$X_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta_2' \frac{\partial}{\partial y'} = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + y'(y'-1)\frac{\partial}{\partial y'} \tag{D.4}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca burada

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x-y & 0 \end{vmatrix} = y - x \neq 0$$

ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y' & w \\ \xi_1 & \eta_1 & \eta_1' \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y' & (x-y)y'^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ x-y & 0 & y'(y'-1) \end{vmatrix} = -y'^3(x-y)^2 - y'(1-y')^2$$

dir. Burada ,

$$[X_1, X_2]=0 \quad , \quad \delta = y - x \neq 0 \quad , \quad \Delta = -y'^3 (x-y)^2 - y'(1-y')^2 \tag{D.5}$$

yazılabilir. İkinci integrasyon tekniği uygulanırsa, yani (4.3.7) ve (4.3.14) bağıntıları kullanılırsa, (4.3.7)' den

$$\varphi(x,y,y') = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dy' \\ 1 & y' & w \\ \xi_1 & \eta_1 & \eta_1' \end{vmatrix}}{\Delta} = \int \frac{-(x-y)\,y'^3\,dx + (x-y)\,y'^3\,dy + (1-y')\,dy'}{-y'^3 (x-y)^2 - y'(1-y')^2}$$

elde edilir. (D.3) bağıntısından

$$d\Delta = -2\left\{ y'^3 (x-y)\,dx + y'^3 (x-y)\,dy - \left[\frac{3}{2} y'^2 (x-y)^2 + \frac{1}{2}(1-y')^2 - y'(1-y') \right] dy' \right\}$$

bulunur. Buradan

$$\varphi(x,y,y') = \frac{1}{2}\int \frac{d\Delta}{\Delta} - \frac{3}{2}\int \frac{dy'}{y'} \tag{D.6}$$

veya

$$\varphi(x,y,y') = \frac{1}{2}\ln\left\{ (x-y)^2 + \frac{(1-y')^2}{y'^2} \right\} \tag{D.7}$$

bulunur. Öte yandan (4.3.14)' ten

$$\psi(x,y,y') = \int \frac{y'^2 (y'-1)\,dx + \left[y'^3 (x-y)^2 - y'(y'-1) \right] dy - y'(x-y)\,dy'}{-y'^3 (x-y)^2 - y'(1-y')^2}$$

elde edilir. Burada $d(x-y) = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\,dy = dx - dy$ olup, integralde kullanılırsa,

$$\psi(x,y,y') = -\int dy - \int \frac{y'(y'-1)\,d(x-y) - (x-y)\,dy'}{y'^2 (x-y)^2 + (1-y')^2} \tag{D.8}$$

olur. Buradan $u = \dfrac{y'(x-y)}{1-y'}$, $du = \dfrac{y'}{1-y'} d(x-y) + \dfrac{x-y}{(1-y')^2} dy'$ dönüşümü yapılırsa

$$\psi(x,y,y') = -y - \arctan\left\{\frac{y'(x-y)}{1-y'}\right\} \quad , \quad (\text{int}.sbt = 0) \tag{D.9}$$

elde edilir. $\psi = \psi_0$ alınarak, $\tan(\psi_0 + y) = \dfrac{y'(x-y)}{1-y'}$ ve

$\varphi(x,y,y') = \dfrac{1}{2}\ln\left\{(x-y)^2 + \dfrac{(1-y')^2}{y'^2}\right\}$ ifadesinden de $\varphi = \varphi_0$ alınarak

$$e^{2\varphi_0} = (x-y)^2 + \frac{(1-y')^2}{y'^2} \tag{D.10}$$

bulunur. Diğer taraftan

$\dfrac{y'(x-y)}{1-y'} = \tan(\psi_0 + y)$ *ve* $\dfrac{\sin^2(\psi_0 + y)}{\cos^2(\psi_0 + y)} = \dfrac{y'^2(x-y)^2}{(1-y')^2}$ olduğundan , buradan

$\dfrac{(1-y')^2}{y'^2} = \dfrac{(x-y)^2\cos^2(\psi_0 + y)}{\sin^2(\psi_0 + y)}$ olur.

(D.10) olduğu da göz önüne alınırsa, diferansiyel denklemin genel çözümü

$$x - y \mp e^{\varphi_0}\sin(\psi_0 + y) = 0 \tag{D.11}$$

şeklinde bulunur.

İki farklı yaklaşımı karşılaştırmak için, bu örneğe bir de ilk integrasyon tekniğini uygulayalım:

(D.5) olmasından dolayı I-a durumu geçerli olur. Bu durumda $t(x,y)$ ve $s(x,y)$ fonksiyonları için; (4.2.6) ' den

$$t(x,y) = \int\frac{-\eta_1\,dx + \xi_1\,dy}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}\int\frac{d(x-y)}{x-y} = \ln(x-y) \tag{D.12}$$

ve (4.2.8)' den

$$s(x,y) = \int\frac{\eta_2\,dx - \xi_2\,dy}{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1} = \int\frac{-(x-y)\,dy}{-(x-y)} = \int dy = y \tag{D.13}$$

değerleri bulunur. Burada integrasyon sabitleri sıfır olarak alınmıştır. Diferansiyel denklemi s ve t terimlerine bağlı olarak yazmak için, $y' = \dfrac{\eta_2 + s'\eta_1}{\xi_2 + s'\xi_1}$ den y' hesaplanırsa, $e^t = x - y$ olup,

$$y' = \frac{s'}{x-y+s'} = \frac{s'}{e^t+s'} \quad , \quad s' = \frac{(x-y)y'}{1-y'} \tag{D.14}$$

bulunur. Bu durumda $y'' = (x-y)y'^3$ diferansiyel denkleminin dönüştüğü $s'' = \hat{w}(s')$ diferansiyel denkleminin açık ifadesini bulmak için, (D.14) ve

$$s'' = \frac{y'(x-y)(1-y')}{(1-y)^2} + \frac{(x-y)^2}{(1-y)^3}y'' \quad \text{veya} \quad y'' = \frac{(1-y')^3}{(x-y)^2}\left\{s'' - \frac{y'(x-y)}{1-y'}\right\} \quad \text{bulunur.}$$

$y' = \dfrac{s'}{e^t+s'}$, $x-y = e^t$ ve $1-y' = \dfrac{e^t}{e^t+s'}$ bağıntıları kullanılırsa,

$$y'' = \frac{e^t}{(e^t+s')^3}\{s''-s'\} \tag{D.15}$$

elde edilir. Bulunun ifadeler $y'' = (x-y)\,y'^3$ diferansiyel denklem yerine yazılırsa,

$$s'' = \hat{w}(s') = s' + s'^3 \tag{D.16}$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemi çözmek için, (D.16) ifadesinin

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \tag{D.17}$$

şeklindeki yazılışı göz önüne alınırsa, $\dfrac{ds}{dt} = p$ olarak alınırsa,

$$\frac{dp}{dt} - p = p^3 \tag{D.18}$$

şeklinde bir diferansiyel denkleme ulaşılır. Bu denklem Bernouli diferansiyel denklemi olup, çözümü vardır. Başka bir çözüm yolu da, diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırıp çözmektir. (D.18) denkleminin çözümü φ_0 bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$p^2 = \frac{e^{2(t-\varphi_0)}}{(1-e^{2(1-\varphi_0)})}$$

bulunur.

$$s'^2 = \frac{e^{2(t-\varphi_0)}}{1-e^{2(t-\varphi_0)}} \tag{D.19}$$

olarak bulunur. Tekrar integral alınırsa, $s = \mp \int \dfrac{e^{2(t-\varphi_0)}}{\sqrt{1-e^{2(t-\varphi_0)}}}dt$ olup, $e^{(t-\varphi_0)} = u$

dönüşümü ile ψ_0 integrasyon sabiti olmak üzere

$$s+\psi_0 = \mp \arcsin(e^{t-\varphi_0}) \tag{D.20}$$

elde edilir. (D.6) ve (D.8)' e dikkat edilirse,

$$x-y=\mp e^{\varphi_0}\sin(y+\psi_0) \quad , \quad s=y \quad , \quad x-y=e^t$$

olup, buradan

$$s+\psi_0 = \mp arc\sin(e^{t-\varphi_0}) \tag{D.21}$$

bulunur. Böylelikle her iki yaklaşımdan da beklenildiği gibi aynı sonuçlar elde edilir.

KAYNAKLAR

1. AGNEW R , Differential Equations , Mc Graw-Hill , New York , 2 nd ed. , 1960

2. ALPAY Ş , AKYILDIZ E , AKYILDIZ Y , ERKİP A , YAZICI A , Lacture notes on DİFFERENTİAL EQUATİONS , 474 S , ODTÜ Prees , Ankara , TÜRKİYE , 1981

3. BLUMAN G , Symmetry Analysis of Differential Equations , Math. Comput Modelling Vol.25 , No 8/9 , p.p 25-37 , 1997

4. BLUMAN G , KUMEİ S , Symmetries and Differential Equations , Springer , New York , 1989

5. BLUMAN G , Integrating Factors and First İntegrals of Ordinary Differantial Equations Eur. Jour. Appl. Math. 9 , 245-259 , 1998

6. BLUMAN G , Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differantial Equation , J. Math. Appl. 145 , 52-62 , 1990

7. BLUMAN G.W , ANCO S.C , Symmetry and Integration Methods for Differantial Equations , 2. Baskı , 154 Sayfa , New York , USA , 2002

8. BRAUER F , NOHEL J , Ordinary Differential Equations Benjamin , New York , 1967

9. CAJORİ F , A History of Mathematics , London , 1901

10. CODDİNGTON E.A , An Introduction to ordinary Differantial Equations , New York , Dover , USA , 1989

11. FUSHCHİCH W.I , SHTELAN W.M , SEROV N.I , Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlineer Mathematical Physics , Kluwer Acad Publ , Boston-London , 1993

12. GARABEDİAN P.R , Partial Differantial Equations , New York , USA , 1964

13. GÜNGÖR F , Diferansiyel denklemler , 2.Baskı , 273 S , BETA Basım Yayım Dağıtım A.Ş , İstanbul , TÜRKİYE , 2000

14. HYDON P.E , Symmetry Methods for Differantial Equations , Combridge University Press , Combridge , 2000

15. IBRAGİMOV N.H , Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations , Wiley , New York , 1999

16. INCE E.L Ordinary Differential Equations , Longmans Reprinted , Dover , New York , USA , 1956

17. KAPLAN W , Ordinary Differential Equations , Addison Wesley Publishing Company , Reading , 1953

18. MURPHY G.M , Ordinary Differential Equations and Their Solutions , Van Nostrand , Princeton , 1960

19. OLVER P , Applications of Lie Groups to Differential Equations , New York , 1986

20. OVSYENNİKOV L , Group Analysis of Differential , Nauka , Moskow , 1978

21. ROSS S.L , Differential Equations , 2. Baskı .712 S , New York , USA , 1974

22. STEPHANİ H , Differential Equations Their Solution Using Syymmetries , 1.Baskı.256 S. , CAMBRIDGE UNIVERSITY Press , New York , USA , 1989

23. TUNCAR T , Diferansiyel denklemler , Araştırma Eğitim Ekin Yayınları , İstanbul , 1981

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kısmet KASAPOĞLU
Doğum Yeri : Çorum
Doğum Tarihi : 10.06.1977
Medeni Hali : Bekar

<u>Eğitim ve Akademik Durumu</u>

İlkokul : Cengiz Topel İlkokulu
Ortaokul : Cumhuriyet Ortaokulu
Lise : Çorlu Lisesi
Lisans : Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yabancı Dil : İngilizce

<u>İş Tecrübesi</u>

15 Kasım 2000 Tarihinden itibaren Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.