

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİNİN SINIRLI
ÇÖZÜMLERİ

KORAY TÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. DENİZ AĞIRSEVEN

II. Tez Danışmanı: Prof. Dr. ALLABEREN ASHYRALYEV

EDİRNE-2017

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı



Prof. Dr. Murat YURTCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. M. Hülya İŞCAN

Anabilim Dalı Başkanı (v.)

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV
İkinci Tez Danışmanı



Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Doç. Dr. Mehmet SEZGİN

Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN

Yrd. Doç. Dr. Vedat TAŞKIN

İmza



Tarih:31/07/2017

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

31/07/2017

KORAY TÜRK



Yüksek Lisans Tezi

Zaman Gecikmeli Telegraf Denkleminin Sınırlı Çözümleri

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, H Hilbert uzayında, self-adjoint pozitif tanımlı A operatörüne sahip zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, \quad v'(0) = \psi \end{cases}$$

başlangıç değer problemi incelenmiştir. Bu problemin çözümünün sınırlılığı için kararlılık kestirimleri üzerine teorem kurulmuştur. Çözümün sınırlılığı için test problemi olarak Dirichlet sınır koşullu bir boyutlu gecikmeli telegraf denklem alınmıştır. Bu problemin çözümünün sınırlılığı, birinci ve ikinci mertebeden doğruluklu fark şemalarıyla desteklenmiştir.

Yıl : 2017

Sayfa Sayısı : 71

Anahtar Kelimeler : Başlangıç ve sınır değer problemi, fark şemaları, gecikmeli telegraf denklem.

Master's Thesis

Bounded Solutions of The Telegraph Equation with Time Delay

Trakya University Institute of Natural Sciences

Mathematics

ABSTRACT

In this study, the initial value problem for telegraph equation with time delay,

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, \quad v'(0) = \psi \end{cases}$$

in a Hilbert space H with a self-adjoint positive definite operator A , where $A \geq \delta I$ is considered. Here φ and ψ are elements of $D(A)$. The main theorem on stability estimates for the bounded solution of this problem is established. As a test problem, for boundedness of solution, one-dimensional delay telegraph equation with Dirichlet boundary conditions is considered. Boundedness of the solution of this problem is supported by the first and second order of accuracy difference schemes.

Year : 2017

Number of Pages : 71

Keywords : Initial and boundary value problems, difference schemes, delay telegraph equations.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecimde başından itibaren destek olan, yardımlarını esirgemeyen ve her problemde doğru yolu gösteren hocalarım Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN ve Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e gönülden teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen TÜBİTAK 2210-A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Burs Programı'na ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
TABLolar LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2	
ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ.....	6
BÖLÜM 3	
ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN KARARLILIK TEOREMİ.....	27
5.1. Kararlılık Üzerine Teorem.....	28
BÖLÜM 4	
SAYISAL SONUÇLAR.....	35
4.1. (4.1) Probleminin Tam Çözümünü Fourier Serileriyle Yöntemiyle Elde Etme.....	35
4.2. (4.1) Probleminin Yaklaşık Çözümünü Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Etme.....	36
4.3. (4.1) Probleminin Yaklaşık Çözümünü İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Etme.....	42
4.4. Birinci ve İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemalarıyla Elde Edilen Sonuçların Hatalarının Karşılaştırılması.....	46
BÖLÜM 5	
SONUÇLAR.....	48

EKLER.....	50
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	60
TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER	61

TABLolar LİSTESİ

Tablo 4.1. M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1], [1,2], [2,3]$ İçin (4.6) Fark Şeması İçin Hatalar.....	42
Tablo 4.2. M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1], [1,2], [2,3]$ İçin (4.9) Fark Şeması İçin Hatalar.....	46
Tablo 4.3. M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $[0,1], [1,2], [2,3]$ Aralıklarında Maksimum Hataların Karşılaştırması.....	47

ŞEKİLLER LİSTESİ

(4.6) Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Edilen Tam ve Sayısal Çözümler İçin MATLAB ile Elde Edilen Grafikler

Şekil 4.1 $M = N = 120$ İken $t \in [2,3]$ İçin Tam Çözüm.....41

Şekil 4.2 $M = N = 120$ İken $t \in [2,3]$ İçin Sayısal Çözüm.....41

(4.9) İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Edilen Tam ve Sayısal Çözümler İçin MATLAB ile Elde Edilen Grafikler

Şekil 4.3 $M = N = 120$ İken $t \in [2,3]$ İçin Tam Çözüm.....45

Şekil 4.4 $M = N = 120$ İken $t \in [2,3]$ İçin Sayısal Çözüm.....45

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu çalışmada ele alınacak olan telegraf denklem esas olarak bir kablo üzerinde elektriksel iletimle ilgilidir. Bir elektrik devresinde voltaj ve akım devredeki konuma ve zamana bağlı olarak ifade edilebilir. x değişkeni kablonun sonuna olan mesafe ve t değişkeni de zamanı göstermek üzere; $v(x, t)$ ve $i(x, t)$ fonksiyonları herhangi bir noktada herhangi bir anda sırasıyla voltaj ve akımı temsil etsin. R, C, L, G sırasıyla direnç, sığa, indüksiyon, iletkenlik olmak üzere aralarındaki ilişki, Ohm kanunu ile

$$v = i.R$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int idt$$

şeklinde verilmektedir. Bu ifadeler kullanılarak

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv \quad (1.2)$$

denklemleri elde edilebilir [1-2]. Burada sabitleri $2\beta = \frac{R}{L} + \frac{G}{C}$, $c^2 = \frac{1}{LC}$, $\alpha = \frac{RG}{CL}$ şeklinde tanımlayarak

$$v_{tt}(x, t) + 2\beta v_t(x, t) + \alpha v(x, t) = c^2 v_{xx}(x, t) \quad (1.3)$$

denklemini yazılabilir [3].

(1.1), (1.2) ve (1.3) ile verilen denklemler telegraf denklemleridir.

Telegraf denklem birçok çalışmaya konu olmuştur. Bu çalışmaların çoğunda analitik çözümlerin yanında sayısal çözümler için farklı yollar ortaya konmuştur. V. K. Srivastava, M. K. Awasthi, R. K. Chaurrasia ve M. Tasmir, "The Telegraph Equation and Its Solution by Reduced Differential Transform Method" adlı çalışmalarında Ohm Kanunu ile telegraf denklemin elde edilmesinin yanı sıra yarı-analitik çözümü indirgenmiş diferansiyel metoduyla sunmuşlardır [4]. S. Goldstein de çalışmasında [5] süresiz hareket ile difüzyon ve telegraf denklem arasında ilişki kurmuştur. M. J. Golay bir tüpün içinden geçirilen gazın tahlili üzerine yaptığı çalışmada [6], başkaca yollardan elde edilen sonuçları daha kolay ve kullanışlı bir biçimde telegraf denklemden yararlanarak elde etmiştir. B. Gopinath ve M. M. Sondhi 1971 yılında yaptıkları bir çalışmada [7], düzgün olmayan (nonuniform) hatta elektrik akımını ele alarak telegraf denklem üzerinde değişikliğe gitmişler ve bazı yeni sonuçlar ortaya koymuşlardır. Aynı yıl başka bir çalışmada [8], A. Okubo telegraf denklemi, okyanuslarda yayılım ile ilgili bir matematiksel model olarak sunmuştur. P. Drabek ve D. Lupo

$$\beta u_t + u_{tt} - u_{xx} - \psi(t, x, u(t, x), u(t_0, x)) = g(t, x)$$

tipinde bazı nonlinear telegraf denklemler için t ve x değişkenlerine göre 2π periyodlu periyodik $u(t, x)$ çözümlerini sunmuşlardır [9]. P. L. Felmer ve R. F. Manasevich benzer şekilde

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t - f(u) = h$$

formundaki telegraf-dalga denklemlerinin periyodik çözümlerini ve çözümlerin sağladığı bazı özellikleri vermişlerdir [10]. E. Feireisl, tamamen nonlinear telegraf denklem için yine periyodik çözümü ama sadece x değişkenine göre periyodik olan,

her $t \in \mathbb{R}$ için geçerli ve sınırlı çözümleri, $u = u(x, t)$, $x \in (0, L)$, $t \in \mathbb{R}$ ve $\mathcal{L}u = u_{tt} + du_t - au_{xx}$, $a, d > 0$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + F(u_{xx}, u_x, u, u_{xt}, u_t) = f(x, t), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

şeklindeki problemi ele aldığı çalışmasında [11] incelemiştir. S. Chang ve V. H. Weston ise telegraf denklem için ters problemi incelemiştir [12]. F. Gao ve C. Chi lineer telegraf denklemin çözümü için sayısal algoritma geliştirmişlerdir [13]. J. Biazar, H. Ebrahimi ve Z. Ayati çalışmalarında [14], telegraf denklem için varyasyonel iterasyon metot ile yaklaşık çözümler bulmuşlardır. A. Saadatmandi ve M. Dehghan ise çalışmalarında [15], telegraf denklemin sayısal çözümü için Chebyshev Tau metodunu kullanmıştır. A. Ashyralyev ve M. Modanli, telegraf denklem üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır [16,17,18]. Bunlardan [16]'da telegraf denklem için Cauchy problemini

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha \frac{du(t)}{dt} + Au(t) + \beta u(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \\ u(0) = \varphi, \quad u'(0) = \psi \end{cases} \quad (1.4)$$

Hilbert uzayında ele almışlardır. Burada A self-adjoint pozitif tanımlı operatör ve $A \geq \delta I$, $\alpha > 0$, $\beta + \alpha \geq \frac{\delta}{4}$ koşulları vardır. (1.4) probleminin çözümü için kararlılık kestirimini kurmuşlar, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarıyla yaklaşık çözümleri elde etmişlerdir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda ele alınan problemlerde gecikme terimi ele alınmamıştır. Gerçeklikte gecikme kaçınılmaz olarak mevcuttur. Gerçeğe daha yakın matematiksel modelleme yapmak için gecikme dikkate alınmak zorundadır. Bu nedenle büyük bir öneme sahiptir. Gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalar 20. yüzyılın ilk çeyreğinden sonra başlar. “İlk olarak 1942 yılında Minorsky [1], kendinden uyarımlı salınımlı dinamik sistemleri modellemek için histerodiferansiyel denklemler fikrini ortaya atmıştır.” [19]. Sonrasında da bu konuyla ilgili birçok çalışma literatüre kazandırılmıştır.

G. Birkhoff ve L. Kotin 1966 yılında, yapmış oldukları çalışmada [20], birinci mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelemişler ve sonuçlarını da başka bir çalışmada [21]

genelleştirmişlerdir. L. J. Grimm ve K. Schmitt 1968 yılında yaptıkları makalede [22], gecikmeli diferansiyel denklemler için belli tipte başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı için yeterli koşulları vermişlerdir. E. Winston 1971’de yapmış olduğu çalışmada [23], gecikmeli diferansiyel denklemin çözümünü her $t > 0$ için araştırmıştır. Bu çalışmasını belli formdaki gecikmeli diferansiyel denklem sistemi üzerine yapmıştır. A. S. C. Sinha 1973 yılında yaptığı çalışmada [24], bazı üç ve dördüncü mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığını incelemiştir. J. L. Kaplan ve J. A. Yorke yaptıkları çalışmalarda [25,26], gecikmeli diferansiyel denklemin periyodik çözümünün kararlılığıyla ilgili sonuçlar çıkarmışlar, sonra da bu sonuçları nonlinear gecikmeli diferansiyel denklemler için genişletmişlerdir. P. Chocholaty ve L. Slahor çalışmalarında [27], ikinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denkleminin başlangıç değer problemi için çözümünün varlık ve tekliğini ele aldıktan sonra sayısal çözüm de ortaya koymuşlardır. S. Nababan ve K. L. Teo [28]’de gecikmeli parabolik kısmi diferansiyel denklem sistemiyle ifade edilen Cauchy probleminin optimizasyonu için gerekli koşulları ele almışlardır. Parabolik tipte gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili birçok çalışma da [29-37] A. Ashyralyev ve D. Ağırseven tarafından yapılmıştır. A. N. Al-Mutib 1984 yılında yapmış olduğu çalışmada [38], gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümleri için sayısal yöntemlerin kararlılığının özelliklerini incelemiştir. 1991 yılında E. Feireisl yapmış olduğu çalışmada [39], tüm pozitif t ’ler için çözümün olduğunu zaman gecikmeli operatör içeren lineer olmayan telegraf denklem için ispatlamıştır. Bazı hiperbolik tipte gecikmeli diferansiyel denklemler için tam çözümleri de A. V. Vyazmin ve V. G. Sorokin’in sundukları çalışmada [40] bulmak mümkündür. Nonlinear zaman gecikmeli telegraf denklemin pozitif iki değişkenine göre periyodik çözümlerini Y. Li ve H. Zhang 2015’de yapmış oldukları çalışmada [41] vermişlerdir.

Literatür taraması derinleştirildikçe birçok çalışma bulmak mümkündür. Ancak zaman gecikmeli lineer telegraf denklemle ilgili az sayıda çalışma [42,43] mevcuttur. Bu tezin konusu da zaman gecikmeli telegraf denkleminin sınırlı çözümleridir.

2. Bölüm’de zaman gecikmeli sabit katsayılı telegraf denklem için başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerini analitik olarak elde etmek için Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleri kullanılmıştır. Çözümde adım-adım çözüm yönteminden yararlanılmıştır.

3. Bölüm’de, zaman gecikmeli değişken katsayılı telegraf denklem için başlangıç-sınır değer probleminin abstract formu

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi \end{cases}$$

ele alınmış ve çözümünün kararlılık kestirimleri üzerine teorem kurulmuştur.

4. Bölüm’de ise çözümün sınırlılığını gösteren test problem olarak zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,001 \frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2}, \\ 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0, x) = \sin x, & u_t(0, x) = -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

incelenmiş ve öncelikle tam çözümler elde edilmiştir. Daha sonra birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları verilip, yaklaşık çözümleri elde etmek için MATLAB programlama dilini kullanarak program yazılmıştır. Diferansiyel ve fark denklemlerinin sınırlılığı grafikler ve tablo ile gösterilmiştir.

5. Bölüm Sonuçlar bölümü olup yapılan çalışmaların sonucu ifade edilmiştir.

BÖLÜM 2

ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİNİN ANALİTİK YÖNTEMLERLE ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde zaman gecikmeli telegraf denklemlerin çözümleri Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleri kullanılarak analitik olarak elde edilecektir. İlk başta, Fourier serileri yöntemi kullanılarak analitik çözümleri bulmak için örnekler ele alınacaktır.

Örnek 2.1. Zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) \\ = 0.1[u_{xx}([t], x) + e^{-[t]} \sin x], \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Çözüm. (2.1) probleminin çözümü için Fourier serileri yöntemi kullanılacaktır.

$D(A) = \{u : u, u'' \in C[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$, A 'nın tanım kümesi olmak üzere $Au(x) = -u''(x)$ biçiminde tanımlanan A operatörü için, $Au(x) + \lambda u(x) = 0$, $u(x) \neq 0$ Sturm-Liouville problemi

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad u(x) \neq 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

biçiminde sınır değer problemi olarak yazılabilir. Bu probleme ait karakteristik denklem, $-m^2 + \lambda = 0$ 'dır.

i. $\lambda \geq 0$ ise (2.2) probleminin tek çözümü aşikar çözüm $u(x) \equiv 0$ dır.

ii. $\lambda < 0$ ise $m_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ için, (2.2) probleminin

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

genel çözümüne başlangıç koşulları uygulanırsa

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(\pi) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

olduğundan

$$c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

bulunur. Aşikâr çözüm dışında çözüm bulabilmek için $c_2 \neq 0$ olarak kabul edilirse

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = k\pi, k = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. $\lambda_k = -k^2, k = 1, 2, 3, \dots$ için (2.2) probleminin çözümleri

$$u_k(x) = \sin kx, k = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde elde edilir.

(2.1) problemi, $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklindedir. O halde Fourier serileri çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$$

olacaktır. Burada $A_k(t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. Bu durumda bu seri çözüm (2.3)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \sin kx + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) (-k^2) \sin kx = 0, & 0 < x < \pi, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin kx = \sin x, & \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(0) \sin kx = -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

elde edilir. Burada $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\sin kx$ 'lerin katsayılarını eşitlenirse

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(0) = 0, \quad A_k'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(0) = 1, \quad A_1'(0) = -1 \end{cases} \quad (2.5)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.4) başlangıç değer probleminin tek çözümü, aşıkâr çözüm $A_k(t) \equiv 0$ dır. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t} \quad (2.6)$$

çözümü elde edilir. (2.5)'de verilen başlangıç şartları $A_1(0) = 1$, $A_1'(0) = -1$, (2.6) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.1) probleminin $[0,1]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx = A_1(t) \sin x = e^{-t} \sin x \quad (2.7)$$

olarak elde edilir.

(2.1) problemini $[1,2]$ aralığında incelenmesi için başlangıç şartları (2.7)'de elde edilen $[0,1]$ aralığı için geçerli olan çözümden elde edilecektir. O halde, (2.1) probleminin $[1,2]$ aralığı için yeniden yazılmasıyla

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(1, x) = e^{-1}\sin x, & u_t(1, x) = -e^{-1}\sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. Aranılan

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$$

biçimindeki seri çözümünü (2.8)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \sin kx + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) (-k^2) \sin kx = 0, & 0 < x < \pi, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k(1) \sin kx = e^{-1} \sin x, & \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(1) \sin kx = -e^{-1} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

bulunur. Burada $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\sin kx$ 'lerin katsayıları eşitlenirse

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(1) = 0, & A_k'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(1) = e^{-1}, & A_1'(1) = -e^{-1}, \end{cases} \quad (2.10)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.9) başlangıç değer probleminin tek çözümü aşıkâr çözüm $A_k(t) \equiv 0$ çözümüdür. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t} \quad (2.11)$$

çözümü elde edilir. (2.10)'da verilen $A_1(1) = e^{-1}$, $A_1'(1) = -e^{-1}$ başlangıç şartları, (2.11) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.1) probleminin $[1,2]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx = A_1(t) \sin x = e^{-t} \sin x \quad (2.12)$$

olarak elde edilir.

(2.1) probleminin $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $[n, n + 1]$ aralığında çözümün $u(t, x) = e^{-t} \sin x$ olduğu gösterilecektir. Bu aralıkta çözüm araştırılması için, $[n - 1, n]$ aralığında çözümün $u(t, x) = e^{-t} \sin x$ olduğu kabul edilsin. $[n, n + 1]$ aralığında (2.1) problemi başlangıç şartları düzenlenerek tekrar yazılırsa

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(n, x) = e^{-n} \sin x, \quad u_t(n, x) = -e^{-n} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. Aranana

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$$

biçimindeki seri çözümü (2.13)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \sin kx + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) (-k^2) \sin kx = 0, & 0 < x < \pi, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sin kx = \sin x, \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(n) \sin kx = -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

elde edilir. Burada $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\sin kx$ 'lerin katsayılarını eşitlenerek

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(n) = 0, \quad A_k'(n) = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(n) = e^{-n}, \quad A_1'(n) = -e^{-n} \end{cases} \quad (2.15)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.14) başlangıç değer problemin tek çözümü aşikar çözüm $A_k(t) \equiv 0$ çözümüdür. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} \quad (2.16)$$

çözümü elde edilir. (2.15)'de verilen $A_1(n) = e^{-n}$, $A_1'(n) = -e^{-n}$ başlangıç şartları, (2.16) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.1) probleminin $[n, n + 1]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx = A_1(t) \sin x = e^{-t} \sin x$$

olarak elde edilir. O halde (2.1) probleminin $t > 0$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x$$

olarak bulunmuş olur.

Aşağıda verilecek olan zaman gecikmeli telegraf denklem lineer olmamasına rağmen, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $[n, n + 1]$ aralığında incelendiğinde denklemin lineerleştiği ve dolayısıyla Fourier serileri yöntemiyle çözülebileceği gösterilecektir.

Örnek 2.2. Lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) \\ = 0.1u(t, x)[u([t], x) - e^{-[t]} \cos x], \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos x, \quad u_t(0, x) = -\cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Çözüm. (2.17) problemi $t \in [0, 1]$ için tekrar yazılırsa

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \cos x, & u_t(0, x) = -\cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

lineer telegraf denklem için başlangıç-sınır değer problemi elde edilir.

$D(A) = \{u : u, u'' \in C[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$, A 'nın tanım kümesi olmak üzere $Au(x) = -u''(x)$ biçiminde tanımlanan A operatörü için, $Au(x) + \lambda u(x) = 0$, $u(x) \neq 0$ Sturm-Liouville problemi

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < \pi, & u(x) \neq 0, \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

biçiminde sınır değer problemi olarak yazılabilir. (2.2) problemindekine benzer yöntemle

$$\lambda_k = -k^2, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

için çözümler

$$u_k(x) = \cos kx, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda (2.18) probleminin

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx$$

biçimindeki seri çözümü aranacaktır. Bu seri çözüm (2.18)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} A_k''(t) \cos kx + 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(t) \cos kx + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) k^2 \cos kx = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \cos kx = \cos x, & \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(0) \cos kx = -\cos x \end{cases}$$

elde edilir. Burada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $\cos kx$ 'lerin katsayıları eşitlenirse

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2A_k(t) = 0, \\ A_k(0) = 0, \quad A_k'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(0) = 1, \quad A_1'(0) = -1, \end{cases} \quad (2.20)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.19) başlangıç değer probleminin tek çözümü aşikar çözüm $A_k(t) \equiv 0$ dır. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t} \quad (2.21)$$

çözümü elde edilir. (2.20)'de verilen başlangıç şartları $A_1(0) = 1$, $A_1'(0) = -1$, (2.21) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.17) probleminin $[0,1]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx = A_1(t) \cos x = e^{-t} \cos x \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. (2.17) ile verilen problemi $[1,2]$ aralığı için yeniden yazarken (2.22) çözümünden yararlanılarak, başlangıç-sınır koşulları düzenlenir ve

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(1, x) = e^{-1} \cos x, \quad u_t(1, x) = -e^{-1} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. (2.23) başlangıç-sınır değer probleminin aranan seri çözümü ise

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx$$

biçimindedir. Bu seri çözüm (2.23)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} A_k''(t) \cos kx + 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(t) \cos kx + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) k^2 \cos kx = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} A_k(1) \cos kx = e^{-1} \cos x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(1) \cos kx = -e^{-1} \cos x, \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Burada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $\cos kx$ 'lerin katsayıları eşitlenerek $k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(1) = 0, \quad A_k'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(1) = e^{-1}, \quad A_1'(1) = -e^{-1} \end{cases} \quad (2.25)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.24) başlangıç değer probleminin tek çözümü aşikar çözüm $A_k(t) \equiv 0$ dir. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t} \quad (2.26)$$

çözümü elde edilir. (2.25)'de verilen başlangıç şartları $A_1(1) = 1$, $A_1'(1) = -1$, (2.26) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.17) probleminin $[1, 2]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx = A_1(t) \cos x = e^{-t} \cos x$$

olarak elde edilir.

(2.17) ile verilmiş lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer probleminin, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $t \in [n - 1, n]$ için çözümünün $u(t, x) = e^{-t} \cos x$ olduğu kabul edilip, bu çözümün $t \in [n, n + 1]$ için de geçerli olduğu aşağıda gösterilecektir.

(2.17) problemi, $[n - 1, n]$ aralığındaki çözümünden yararlanılarak başlangıç koşulları düzenlenirse, $[n, n + 1]$ aralığı için yeniden yazılmasıyla

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(n, x) = e^{-n} \cos x, & u_t(n, x) = -e^{-n} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. Bu başlangıç-sınır değer problemin aranan seri çözümü ise

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx$$

biçimindedir. Bu seri çözüm (2.27)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} A_k''(t) \cos kx + 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(t) \cos kx + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) k^2 \cos kx = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} A_k(n) \cos kx = e^{-n} \cos x, & \sum_{k=0}^{\infty} A_k'(n) \cos kx = -e^{-n} \cos x \end{cases}$$

elde edilir. Burada $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $\cos kx$ 'lerin katsayıları eşitlenerek

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(n) = 0, & A_k'(n) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = 0, \\ A_1(n) = e^{-n}, & A_1'(n) = -e^{-n} \end{cases} \quad (2.29)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (2.28) başlangıç değer problemin tek çözümü aşıkâr çözüm $A_k(t) \equiv 0$ dir. $k = 1$ durumunda ise karakteristik denklemin köklerinden yararlanılarak

$$A_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t} \quad (2.30)$$

çözümü elde edilir. (2.29)'daki başlangıç şartları $A_1(n) = e^{-n}$, $A_1'(n) = -e^{-n}$, (2.30) ile verilen çözümde sağlatılarak çözümdeki sabitler $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla $A_1(t) = e^{-t}$ biçiminde belirlenir. Bu durumda, (2.17) probleminin $[n, n + 1]$ aralığında çözümü

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos kx = A_1(t) \cos x = e^{-t} \cos x$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak (2.17) probleminin $t > 0$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} \cos x$$

olarak bulunur.

Benzer mantığı kullanarak, çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(t, x) \\ = \beta \left[\sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x_r^2} - \delta u([t], x) \right] + f(t, x), \quad t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t < \infty \text{ veya} \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

başlangıç-sınır değer probleminin çözümü bulunabilir. Burada $\Omega, S, \bar{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırları verilen n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n (0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$ 'de birim açık küp ve $a_r > 0, \delta > 0$ olmak üzere $\varphi(x), \psi(x)$ ve $f(t, x)$ verilen düzgün fonksiyonlardır. $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ dış normal türevidir.

Bununla beraber, Fourier serileri yöntemi, yalnızca, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Oysaki operatörler yöntemi ise değişken katsayılı durumlarda da geçerlidir.

Şimdi, Laplace dönüşümü yöntemi kullanarak analitik çözümleri bulmak için örnekler ele alınsın.

Örnek 2.3. Lineer zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) \\ \quad = 0.1[u_{xx}([t], x) - e^{-[t]}e^{-x}], & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, & t > 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Çözüm. $t \in [m, m + 1], m = 0, 1, 2, \dots$ için (2.31) problemi adım-adım çözülecektir. (2.31) problemi $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) = 0, & x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t} \end{cases} \quad (2.32)$$

elde edilir. Şimdi, (2.32)'de verilen başlangıç-sınır değer problemine ve başlangıç şartlarına $L\{u(t, x)\} = U(s, x)$ olacak şekilde t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulanarak ve Laplace dönüşümünün özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(s, x) - (s^2 + 2s + 2)U(s, x) = -(s + 1)e^{-x} \\ U(s, 0) = \frac{1}{s + 1}, \quad U_x(s, 0) = -\frac{1}{s + 1} \end{cases} \quad (2.33)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Dikkat edilirse, (2.33)'de bilinmeyen fonksiyon $U(s, x)$ iki değişkene bağlı olmasına rağmen diferansiyel denklem sadece x değişkene bağlıdır. Dolayısıyla, (2.33)'ün diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklemler için bilinen yöntemlerle çözümlenir

$$U(s, x) = c_1 e^{-\sqrt{s^2+2s+2}x} + c_2 e^{\sqrt{s^2+2s+2}x} + \frac{1}{s+1} e^{-x} \quad (2.34)$$

olarak bulunur. Genel çözümde olan keyfi sabitler c_1 ve c_2 'nin belirlenmesi için (2.33)'de verilen başlangıç koşulları (2.34)'de sağlatılarak $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (2.33)'ün çözümü

$$U(s, x) = \frac{1}{s+1} e^{-x}$$

olarak belirlenir. Burada ters-Laplace dönüşümü uygulanarak

$$u(t, x) = L^{-1}\{U(s, x)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} e^{-x}\right\} = e^{-t} e^{-x}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (2.31) probleminin $t \in [0,1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-(t+x)} \quad (2.35)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (2.31) ile verilen problem $t \in [1,2]$ için, başlangıç koşullarının (2.35) ile verilen çözümden yararlanarak yeniden düzenlenmesiyle, tekrar yazılırsa

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) = 0, & x > 0, \\ u(1, x) = e^{-1}e^{-x}, & u_t(1, x) = -e^{-1}e^{-x}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, & u_x(t, 0) = -e^{-t} \end{cases} \quad (2.36)$$

biçimindeki başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. (2.36)'da elde edilen probleme t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulanarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(s, x) - (s^2 + 2s + 2)U(s, x) = -(s + 1)e^{-x}, \\ U(s, 0) = \frac{1}{s + 1}, & U_x(s, 0) = -\frac{1}{s + 1} \end{cases} \quad (2.37)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. (2.37)'de de bilinmeyen fonksiyon $U(s, x)$ iki değişkene bağlı olmasına karşın diferansiyel denklem sadece x değişkenine bağlıdır. Bundan dolayı, (2.37)'nin diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklemler için bilinen yöntemlerle çözümlenir

$$U(s, x) = c_1 e^{-\sqrt{s^2+2s+2}x} + c_2 e^{\sqrt{s^2+2s+2}x} + \frac{1}{s + 1} e^{-x} \quad (2.38)$$

bulunur. Genel çözümünde olan keyfi sabitler c_1 ve c_2 'nin belirlenmesi için (2.37)'de verilen başlangıç koşulları (2.38)'de sağlatılarak $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (2.37)'in çözümü

$$U(s, x) = \frac{1}{s + 1} e^{-x}$$

olarak belirlenir. Burada ters-Laplace dönüşümü uygulayarak

$$u(t, x) = L^{-1}\{U(s, x)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1} e^{-x}\right\} = e^{-t} e^{-x}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.31) probleminin $t \in [1,2]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-(t+x)}$$

şeklinde belirlenir.

(2.31) ile verilmiş zaman gecikmeli lineer telegraf denklem için başlangıç-sınır değer probleminin, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $t \in [n - 1, n]$ için

çözümünün $u(t, x) = e^{-(t+x)}$ olduğu kabul edilip, bu çözümün $t \in [n, n + 1]$ için de geçerli olduğu aşağıda gösterilecektir.

(2.31) problemi, $[n - 1, n]$ aralığındaki çözümden yararlanılarak başlangıç koşulları düzenlenirse, $[n, n + 1]$ aralığı için yeniden yazılmasıyla

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) = 0, & x > 0, \\ u(n, x) = e^{-(n+x)}, & u_t(n, x) = -e^{-(n+x)}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, & u_x(t, 0) = -e^{-t} \end{cases} \quad (2.39)$$

biçimindeki başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. (2.39) ile elde edilen probleme t 'ye göre Laplace dönüşümü uygulayarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(s, x) - (s^2 + 2s + 2)U(s, x) = -(s + 1)e^{-x}, \\ U(s, 0) = \frac{1}{s + 1}, & U_x(s, 0) = -\frac{1}{s + 1} \end{cases} \quad (2.40)$$

başlangıç-sınır değer problemi elde edilir. (2.40)'da bilinmeyen fonksiyon $U(s, x)$ iki değişkene bağlı olmasına rağmen diferansiyel denklem sadece x değişkenine bağlıdır. Dolayısıyla, (2.40)'ın diferansiyel denkleminin adi diferansiyel denklemler için bilinen yöntemlerle çözülmesiyle

$$U(s, x) = c_1 e^{-\sqrt{s^2+2s+2}x} + c_2 e^{\sqrt{s^2+2s+2}x} + \frac{1}{s + 1} e^{-x} \quad (2.41)$$

bulunur. Genel çözümde olan keyfi sabitler c_1 ve c_2 'nin belirlenmesi için (2.40)'da verilen başlangıç koşulları (2.41)'de sağlatılarak $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla, (2.40)'ın çözümü

$$U(s, x) = \frac{1}{s + 1} e^{-x}$$

olarak belirlenir. Burada ters Laplace dönüşümü uygulayarak

$$u(t, x) = L^{-1}\{U(s, x)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1} e^{-x}\right\} = e^{-t} e^{-x}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.31) probleminin $t \in [n, n + 1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-(t+x)}$$

şeklinde belirlenir.

Aşağıda verilecek olan zaman gecikmeli telegraf denklem lineer olmamasına rağmen, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $[n, n + 1]$ aralığında

incelendiğinde denklemin lineerleştiği ve dolayısıyla Laplace dönüşümü yöntemiyle çözülebileceği gösterilecektir.

Örnek 2.4. Lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) \\ = 0.1u(t, x)[u([t], x) - e^{-[t]}e^{-x}], & t > 0, \quad x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t}, & t > 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Çözüm. $t \in [0,1]$ aralığında (2.42) problemi tekrar yazılırsa

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + 2u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) = 0, & x > 0, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x}, & x > 0, \\ u(t, 0) = e^{-t}, \quad u_x(t, 0) = -e^{-t} \end{cases} \quad (2.43)$$

problemi elde edilir. Burada, problemin diferansiyel denklemine ve başlangıç koşullarına, $L\{u(t, x)\} = U(s, x)$ olacak şekilde t değişkenine göre Laplace dönüşümü uygulanarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} U(s, x) - (s^2 + 2s + 2)U(s, x) = -(s + 1)e^{-x}, \\ U(s, 0) = \frac{1}{s + 1}, \quad U_x(s, 0) = -\frac{1}{s + 1} \end{cases} \quad (2.44)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Bilinen yöntemlerle (2.44) probleminde diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$U(s, x) = c_1 e^{-\sqrt{s^2+2s+2}x} + c_2 e^{\sqrt{s^2+2s+2}x} + \frac{1}{s+1} e^{-x}$$

olarak belirlendikten sonra, (2.44)'ün başlangıç koşulları genel çözümde sağlatılarak $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla, (2.44)'ün çözümü

$$U(s, x) = \frac{1}{s+1} e^{-x} \quad (2.45)$$

şeklinde bulunur. (2.45)'e ters-Laplace dönüşümü uygulanmasıyla

$$u(t, x) = L^{-1}\{U(s, x)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} e^{-x}\right\} = e^{-t} e^{-x}$$

elde edilir. Bu durumda, (2.42) probleminin $t \in [0,1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-(t+x)} \quad (2.46)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, $t \in [1,2]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t \in [n, n + 1]$ için de (2.42) probleminin çözümü (2.46) şeklinde bulunabilir.

Benzer mantıkla, çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemler Laplace dönüşümü yöntemiyle ele alınabilir. Örneğin

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(t, x) \\ = \beta \left[\sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x_r^2} - \delta u([t], x) \right] + f(t, x), \quad t > 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^+, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}^+, \\ u(t, x) = 0, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_r} = 0, \quad r = 1, \dots, n, \quad x \in S^+, \quad 0 \leq t < \infty \end{array} \right.$$

problemi ele alınabilir. Burada Ω^+ , S^+ , $\bar{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$ ile sınırları verilen n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n(0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n)$ 'de açık küp ve $a_r > 0$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ve $f(t, x)$ verilen düzgün fonksiyonlardır.

Bununla beraber, Laplace dönüşümü yöntemi, yalnızca, denklemin tüm katsayıları sabit ya da özel tipte polinomlar olması durumunda kullanılabilir. Oysaki operatörler yöntemi ise değişken katsayılı durumlarda da geçerlidir.

Şimdi, Fourier dönüşümü yöntemi kullanarak analitik çözümleri bulmak için örnekler ele alınsın.

Örnek 2.5. Zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) \\ = 0.1[u_{xx}([t], x) - u([t], x) - e^{-[t]}(4x^2 - 3)e^{-x^2}] \\ - (4x^2 - 3)e^{-t}e^{-x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x^2} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

Çözüm. $t \in [m, m + 1], m = 0, 1, 2, \dots$ için (2.47) problemi adım-adım çözülecektir. (2.47) problemi $t \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) \\ \quad = -(4x^2 - 3)e^{-t}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x^2} \end{cases} \quad (2.48)$$

başlangıç değer problemi şeklindedir. Burada $\mathcal{F}\{u(t, x)\} = U(t, s)$ olacak şekilde x değişkenine göre Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}U(t, s) + \frac{d}{dt}U(t, s) + s^2U(t, s) + U(t, s) = (s^2 + 1)e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \\ U(0, s) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \quad U_t(0, s) = -\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \end{cases} \quad (2.49)$$

elde edilir. (2.49) başlangıç değer problemi t değişkenine göre çözümlerse genel çözüm

$$U(t, s) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2}t\right) \right) + e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.50)$$

şeklindedir. (2.50) genel çözümünde (2.49)'da verilen başlangıç koşulları sağlatılırsa genel çözümdeki keyfi sabitler $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. O halde çözüm

$$U(t, s) = e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.51)$$

olarak elde edilir. (2.51) ile verilen çözüme ters-Fourier dönüşümü uygulayarak (2.47) probleminin $t \in [0, 1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-t}e^{-x^2} \quad (2.52)$$

olarak elde edilir.

(2.47) ile verilen problemin $t \in [1, 2]$ aralığı için yeniden yazılırken başlangıç koşulları (2.52) çözümünden elde edilmesiyle

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) \\ \quad = -(4x^2 - 3)e^{-t}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(1, x) = e^{-1}e^{-x^2}, \quad u_t(1, x) = -e^{-1}e^{-x^2} \end{cases} \quad (2.53)$$

problemi elde edilir. (2.53) problemine x 'e göre Fourier dönüşümü uygulayarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}U(t, s) + \frac{d}{dt}U(t, s) + s^2U(t, s) + U(t, s) = (s^2 + 1)e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \\ U(1, s) = e^{-1}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \quad U_t(1, s) = -e^{-1}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \end{cases} \quad (2.54)$$

bulunur. (2.54) başlangıç değer problemi t değişkenine göre çözümlerse genel çözüm

$$U(t, s) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2} t \right) \right) + e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.55)$$

olarak elde edilir. (2.55) genel çözümünde (2.54)'de verilen başlangıç koşulları sağlatılarak genel çözümdeki keyfi sabitler $c_1 = c_2 = 0$ şeklinde bulunur. O halde çözüm

$$U(t, s) = e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.56)$$

dır. (2.56) ile elde edilen çözüme ters-Fourier dönüşümü uygulayarak (2.47) ile verilen problemin $t \in [1, 2]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} e^{-x^2} \quad (2.57)$$

olarak elde edilir.

Dikkat edilirse, (2.47) ile verilen problemin $t \in [0, 1]$ ve $t \in [1, 2]$ aralıkları için çözüm $u(t, x) = e^{-t} e^{-x^2}$ şeklinde belirlenmiştir. Şimdi herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $t \in [n - 1, n]$ aralığında çözümün (2.57) çözümüne eşit olduğu kabul edilip $t \in [n, n + 1]$ için de çözümün (2.57)'ye eşit olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla çözüm her $t > 0$ için belirlenmiş olacaktır.

(2.47) problemin $t \in [n, n + 1]$ için yeniden yazımında başlangıç koşulları $t \in [n - 1, n]$ için çözümden elde edilmesiyle

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) \\ \quad = -(4x^2 - 3)e^{-t} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(n, x) = e^{-n} e^{-x^2}, \quad u_t(n, x) = -e^{-n} e^{-x^2} \end{cases} \quad (2.58)$$

problemi elde edilir. (2.58)'de x 'e göre Fourier dönüşümü uygulayarak

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} U(t, s) + \frac{d}{dt} U(t, s) + s^2 U(t, s) + U(t, s) = (s^2 + 1) e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}, \\ U(n, s) = e^{-n} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}, \quad U_t(n, s) = -e^{-n} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \end{cases} \quad (2.59)$$

bulunur. (2.59) başlangıç değer problemi t değişkenine göre çözümlerse genel çözüm

$$U(t, s) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2} t \right) \right) + e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.60)$$

olarak elde edilir. (2.60) genel çözümünde (2.59)'da verilen başlangıç koşulları sağlatılarak genel çözümdeki keyfi sabitler $c_1 = c_2 = 0$ şeklinde bulunur. O halde çözüm

$$U(t, s) = e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.61)$$

dir. (2.61) ile elde edilen çözüme ters-Fourier dönüşümü uygulayarak (2.47) ile verilen problemin $t \in [n, n + 1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-t} e^{-x^2}$$

olarak elde edilir.

Aşağıda verilecek olan zaman gecikmeli telegraf denklem lineer olmamasına rağmen, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere herhangi bir $[n, n + 1]$ aralığında incelendiğinde denklemin lineerleştiği ve dolayısıyla Fourier dönüşümü yöntemiyle çözülebileceği gösterilecektir.

Örnek 2.6. Lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklem için

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) = -(4x^2 - 3)e^{-(t+x^2)} \\ 0.1u(t, x)[u([t], x) - e^{-([t]+x^2)}], \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x^2} \end{cases} \quad (2.62)$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

Çözüm. (2.62) problemi $t \in [0, 1]$ için yeniden yazılırsa ve başlangıç koşulu olarak verilen $u(0, x) = e^{-x^2}$ koşulu (2.62) denkleminde kullanılarak

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + u(t, x) \\ = -\frac{d^2}{dx^2}(e^{-(t+x^2)}) + e^{-(t+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u_t(0, x) = -e^{-x^2} \end{cases} \quad (2.63)$$

biçiminde yazılabilir. $\mathcal{F}\{u(t, x)\} = U(t, s)$ olacak şekilde (2.63)'e x değişkenine göre Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}U(t, s) + \frac{d}{dt}U(t, s) + s^2U(t, s) + U(t, s) \\ = s^2e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} + e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \\ U(0, s) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}}, \quad U_t(0, s) = -\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \end{cases} \quad (2.64)$$

başlangıç değer problemi elde edilir. (2.64) problemi t 'ye göre çözümlürse

$$U(t, s) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4s^2 + 3}}{2}t\right) \right) + e^{-t}\sqrt{\pi}e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.65)$$

genel çözümleri elde edilir. (2.64)'de verilen başlangıç koşulları (2.65)'de sağlatılarak keyfi sabitler $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. O halde (2.64)'ün çözümü

$$U(t, s) = e^{-t} \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \quad (2.66)$$

olarak elde edilir. (2.66) çözümüne ters Fourier dönüşümü uygulanmasıyla (2.62) ile verilen lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç değer probleminin $t \in [0, 1]$ için çözümü

$$u(t, x) = e^{-(t+x^2)} \quad (2.67)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $t \in [1, 2]$ için de aynı çözüm bulunduğu rahatlıkla gösterilebilir ve (2.47) problemin çözümünde yapıldığı gibi bu çözümün herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in [n, n + 1]$ için de geçerli olduğu görülebilir. Dolayısıyla (2.67) çözümü her $t > 0$ için geçerli olan çözümdür.

Benzer mantıkla, çok boyutlu zaman gecikmeli telegraf denklemler Fourier dönüşümü yöntemiyle ele alınabilir. Örneğin

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(t, z) \\ = \beta \left[\sum_{r=1}^n a_r \frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x_r^2} - \delta u([t], z) \right] + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

problemi ele alınabilir. Burada $a_r > 0$, $\varphi(x), \psi(x)$ ve $f(t, x)$ verilen düzgün fonksiyonlardır.

Bununla beraber, Fourier dönüşümü yöntemi, denklemin tüm katsayılarının sabit olması durumunda kullanılabilir. Operatörler yöntemi ise değişken katsayılı durumlarda da geçerlidir.

Bu bölümde ele alınan zaman gecikmeli telegraf denklemlerin çözümleri Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü gibi analitik yöntemlerle elde edilmiştir. Bu yöntemler ancak sabit katsayılı veya özel tipte polinom katsayılı denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılabilirler. Değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için bu bölümde verilen analitik yöntemleri kullanmamız mümkün değildir. Bu durumda operatörler yöntemine ihtiyaç duyulur. Operatörler yöntemiyle tam çözüm açık biçimde

verilemeyeceğinden öncelikle 3. Bölüm’de çözümün sınırlı olduğunu gösteren kararlılık teoremi verilecek ve elde edilen teorik sonuçlar 4. Bölüm’de nümerik olarak desteklenecektir.

BÖLÜM 3

ZAMAN GECİKMELİ TELEGRAF DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN KARARLILIK TEOREMİ

Bu bölümde, parçalı sürekli zaman gecikmeli lineer telegraf denklemin çözümü için kararlılık kestirimi üzerine teorem, kanıtı ile birlikte verilecektir.

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi \end{cases} \quad (3.1)$$

ile verilen başlangıç değer problemi zaman gecikmeli telegraf denklemin abstract formudur. Burada tanım kümesi $D(A)$ olan A , H Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatör ve $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ koşulu ile birlikte $A \geq \delta I$ dır. Ayrıca, bilinen φ ve ψ fonksiyonları $D(A)$ 'nın elemanlarıdır. $[t]$ en büyük tamsayı fonksiyonu ile de gecikmeli terim ifade edilmektedir.

$v(t)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa $v(t)$ fonksiyonuna (3.1) probleminin çözümü denir.

- i. $v(t)$, $[0, \infty)$ aralığında iki kez sürekli türevlenebilirdir.
- ii. Her $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \in D(A)$ ve $Av(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında süreklidir.
- iii. $v(t)$, (3.1) problemindeki denklemi ve başlangıç koşullarını sağlar.

3.1. Kararlılık Üzerine Teorem

Yukarıda verilen (3.1) problemindeki A operatörü ile, $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$ koşulu altında H Hilbert uzayında pozitif tanımlı self-adjoint $B = A - \frac{\alpha^2}{4}I$ operatörü tanımlansın. Bu durumda $B > \left(\delta - \frac{\alpha^2}{4}\right)I$ eşitsizliği sağlandığı kolayca görülebilir. Ayrıca, bu bölümde kullanılacak olan $c(t)$ ve $s(t)$ operatör-fonksiyonları

$$c(t)u = \frac{e^{iB^{1/2}t} + e^{-iB^{1/2}t}}{2} u, \quad s(t)u = \int_0^t c(s)u ds$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi, (3.1) probleminin çözümünün kararlılık kestirimi üzerine olan teoremin ispatı için gerekli lemma aşağıda verilecektir.

Lemma 3.2. $B, c(t)$ ve $s(t)$ yukarıda tanımlanan operatörler olmak üzere $t \geq 0$ için aşağıdaki kestirimler sağlanır.

$$\|B^{-1/2}\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}},$$

$$\|c(t)\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \left\| B^{\frac{1}{2}}s(t) \right\|_{H \rightarrow H} \leq 1.$$

Lemma 3.2.'nin ispatı Hilbert uzayında self-adjoint pozitif tanımlı operatörlerin spektral gösterimi temeline dayanır [44].

Teorem 3.3. (3.1) probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimler sağlanır.

$$i. \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \|v(t)\|_H \leq b\|\varphi\|_H + \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H, \quad (3.2)$$

$$ii. \quad \max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H \leq c\|\varphi\|_H + d \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4}I\right)^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H, \quad (3.3)$$

$$iii. \quad \max_{n \leq t \leq n+1} \|v(t)\|_H \leq b \max_{n-1 \leq t \leq n} \|v(t)\|_H$$

$$+ \max_{n-1 \leq t \leq n} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

$$\text{iv.} \quad \max_{n \leq t \leq n+1} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H \leq c \max_{n-1 \leq t \leq n} \|v(t)\|_H \\ + d \max_{n-1 \leq t \leq n} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

Burada, $b = |a| + |1 - a|d$, $c = |1 - a| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}$, $d = 1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}}$ dir.

İspat. Verilen (3.1) problemi, $D = \frac{d}{dt}$ türev operatörü yardımıyla

$$\begin{cases} (D^2 + \alpha D + A)v(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada operatörlerin özelliklerden yararlanarak ve $B = A - \frac{\alpha^2}{4}$ şeklinde tanımlanan B operatörü ile (3.6)'nın denklem kısmı düzenlenerek

$$\left(D + \frac{\alpha}{2} - i \sqrt{A - \frac{\alpha^2}{4}} \right) \left(D + \frac{\alpha}{2} + i \sqrt{A - \frac{\alpha^2}{4}} \right) v(t) = aAv([t]) \\ \left(D + \frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}} \right) \left(D + \frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}} \right) v(t) = aAv([t])$$

denklemini elde edilir. $\left(D + \frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}} \right) v(t) = z(t)$ dönüşümü yapılarak (3.1) problemi birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi için başlangıç değer problemi olarak yazılabilir.

$$\begin{cases} \left(D + \frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}} \right) v(t) = z(t), & v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi, \\ \left(D + \frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}} \right) z(t) = aAv([t]), & z(0) = \psi + \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}} \right) \varphi. \end{cases} \quad (3.7)$$

Elde edilen (3.7) sisteminin $t \in [0, 1]$ için yeniden yazılmasıyla

$$\begin{cases} v'(t) + \frac{\alpha}{2}v(t) + iB^{\frac{1}{2}}v(t) = z(t), & v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi, \\ z'(t) + \frac{\alpha}{2}z(t) - iB^{\frac{1}{2}}z(t) = aA\varphi, & z(0) = \psi + \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right)\varphi \end{cases} \quad (3.8)$$

sistemi elde edilir. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için başlangıç değer probleminin genel çözüm formülünden yararlanılarak (3.8) sisteminin çözümü

$$\begin{cases} v(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right) ds} v(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right) du} z(s) ds, \\ z(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}}\right) ds} z(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t \left(\frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}}\right) du} aA\varphi ds \end{cases}$$

olarak bulunur. Böylece $v(t)$ çözümü $z(t)$ 'nin yerine yazılmasıyla

$$v(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} c(t)\varphi + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}t} s(t)\varphi + e^{-\frac{\alpha}{2}t} s(t)\psi + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-p)} s(t-p) aA\varphi dp$$

olarak bulunur. Buradan da

$$v(t) = (1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t} c(t)\varphi + \frac{\alpha}{2} (1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t} s(t)\varphi + a\varphi + e^{-\frac{\alpha}{2}t} s(t)\psi \quad (3.9)$$

elde edilir. Bundan sonra Lemma 3.1 kullanılarak (3.9) eşitliğinin her iki yanından norm alınır

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_H &\leq |1-a| \|\varphi\|_H + \frac{\alpha}{2} |1-a| \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi\|_H + |a| \|\varphi\|_H \\ &\quad + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \|\psi\|_H \\ &\leq \left[|a| + |1-a| + \frac{\alpha}{2} |1-a| \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \right] \|\varphi\|_H + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \|\psi\|_H \\ &\leq \left[|a| + |1-a| + \frac{\alpha}{2} |1-a| \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right] \|\varphi\|_H + \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \|\psi\|_H \\ &\leq \left[|a| + |1-a| \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right) \right] \|\varphi\|_H + \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \|\psi\|_H \quad (3.10) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.10) eşitsizliğinin her iki yanından da $t \in [0,1]$ için maksimum alınarak Teorem 3.2.'nin i. şikkında (3.2) ile verilen kestirim

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|v(t)\|_H \leq b \|\varphi\|_H + \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H$$

elde edilir.

Teorem 3.2.'nin ii. şıkkının doğruluğunu göstermek için (3.9) ile verilen $v(t)$ 'nin türevinin alınması gerekir. Bunun için, $c(t)$ ve $s(t)$ operatörlerin tanımlarından yararlanılarak $c'(t) = -Bs(t)$ ve $s'(t) = c(t)$ olduğu kolayca görülebilir. O halde

$$\begin{aligned} v'(t) = & \left[-(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t}Bs(t) - \frac{\alpha^2}{4}(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t) \right] \varphi \\ & + \left[-\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}t}s(t) + e^{-\frac{\alpha}{2}t}c(t) \right] \psi \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Yine, $B = A - \frac{\alpha^2}{4}I$ olduğunu hatırlayarak (3.11) eşitliğine iki taraftan $B^{-1/2}$ operatörü uygulanarak

$$\begin{aligned} B^{-\frac{1}{2}}v'(t) = & \left[-(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t}B^{\frac{1}{2}}s(t) - \frac{\alpha^2}{4}(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}t}B^{-1}B^{\frac{1}{2}}s(t) \right] \varphi \\ & + \left[-\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}t}B^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}s(t) + e^{-\frac{\alpha}{2}t}c(t) \right] B^{-1/2}\psi \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. (3.12)'nin her iki tarafından norm alınır ve üçgen eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\left\| B^{-\frac{1}{2}}v'(t) \right\|_H \leq \left[|1-a| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}} \right] \|\varphi\|_H + \left[\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} + 1 \right] \left\| B^{-\frac{1}{2}}\psi \right\|_H \quad (3.13)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.13) her $t \in [0,1]$ için sağlandığından, eşitsizlik bu aralıkta sol tarafın maksimum değeri için de sağlanacaktır. Ayrıca $c = |1-a| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}$ ve $d =$

$1 + \frac{\alpha/2}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}}$ sabitleri olduğu hatırlanırsa Teorem 3.2.'nin ii. şıkkında verilmiş olan,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H \leq c \|\varphi\|_H + d \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H$$

(3.3) kestirimi elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.'nin iii. ve iv. şıklarında verilmiş olan kestirimleri elde etmek için (3.1) ile verilen problemi $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t \in [n, n+1]$ için çözmek

gerekecektir. O halde, (3.1) probleminin $t \in [n - 1, n]$ için elde edilen çözümden $v(n) = \varphi_n$ ve $v'(n) = \psi_n$ başlangıç değer fonksiyonlarını çekerek yeniden yazılmasıyla

$$\begin{cases} v''(t) + \alpha v'(t) + Av(t) = aAv(n) \\ v(n) = \varphi_n, \quad v'(n) = \psi_n \end{cases}$$

başlangıç değer problemi elde edilir. Diferansiyel denklemin operatörle yeniden yazılmasıyla ve uygun dönüşüm yardımıyla birinci mertebeden lineer

$$\begin{cases} v'(t) + \frac{\alpha}{2}v(t) + iB^{\frac{1}{2}}v(t) = z(t), & v(n) = \varphi_n, \\ z'(t) + \frac{\alpha}{2}z(t) - iB^{\frac{1}{2}}z(t) = aA\varphi_n, & z(n) = \psi_n + \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right)\varphi_n \end{cases} \quad (3.14)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (3.14) sisteminin çözümü

$$\begin{cases} v(t) = e^{-\int_n^t \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right) ds} \varphi_n + \int_n^t e^{-\int_s^t \left(\frac{\alpha}{2} + iB^{\frac{1}{2}}\right) dp} z(s) ds, \\ z(t) = e^{-\int_n^t \left(\frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}}\right) ds} z(n) + \int_n^t e^{-\int_s^t \left(\frac{\alpha}{2} - iB^{\frac{1}{2}}\right) dp} aA\varphi_n ds \end{cases}$$

olarak yazıldıktan sonra $v(t)$ 'yi açık halde elde etmek için $z(t)$ çözümü kullanılır.

Buradan

$$\begin{aligned} v(t) = (1 - a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} c(t - n)\varphi_n + \frac{\alpha}{2}(1 - a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} s(t - n)\varphi_n + a\varphi_n \\ + e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} s(t - n)\psi_n \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. (3.15) eşitliğinin her iki yanından norm alarak üçgen eşitsizliği ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_H &\leq |1 - a| \|\varphi_n\|_H + \frac{\alpha}{2} |1 - a| \left\| B^{-\frac{1}{2}} \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_n\|_H + |a| \|\varphi_n\|_H \\ &\quad + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \\ &\leq \left[|a| + |1 - a| \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right) \right] \|\varphi_n\|_H + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $b = |a| + |1 - a| \left(1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} \right)$ sabit olduğu

dikkate alınarak (3.16) eşitsizliği

$$\|v(t)\|_H \leq b \|\varphi_n\|_H + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H$$

şeklinde yazılabilir. $v(t)$ çözümü, $t \in [n, n+1]$ için geçerlidir ve φ_n ile ψ_n başlangıç değer fonksiyonları ise $v(t)$ 'nin $t \in [n-1, n]$ aralığı için geçerli çözümden elde edilmiştir. Eşitsizliğin sol tarafının $t \in [n, n+1]$ için sağ tarafının ise $t \in [n-1, n]$ için maksimumu alınabilir. O halde

$$\max_{n \leq t \leq n+1} \|v(t)\|_H \leq b \max_{n-1 \leq t \leq n} \|v(t)\|_H + \max_{n-1 \leq t \leq n} \left\| B^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H$$

eşitsizliği elde edilir ki burada $B = A - \frac{\alpha^2}{4} I$ yerine yazılarak

$$\max_{n \leq t \leq n+1} \|v(t)\|_H \leq b \max_{n-1 \leq t \leq n} \|v(t)\|_H + \max_{n-1 \leq t \leq n} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H$$

kestirimi bulunur ve bu kestirim $n = 1, 2, 3, \dots$ için geçerlidir. Dolayısıyla Teorem 3.2'nin iii. şıkkı gösterilmiş olur.

Verilen son kestirimin doğruluğunu göstermek için (3.15) ile verilen $v(t)$ çözümünün türevinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} v'(t) = & -(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} B s(t-n) \varphi_n - \frac{\alpha^2}{4} (1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} s(t-n) \varphi_n \\ & - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} s(t-n) \psi_n + e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} c(t-n) \psi_n \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafa da $B^{-\frac{1}{2}}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} B^{-\frac{1}{2}} v'(t) = & -(1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} B^{\frac{1}{2}} s(t-n) \varphi_n \\ & - \frac{\alpha^2}{4} (1-a)e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} B^{\frac{1}{2}} s(t-n) B^{-1} \varphi_n \\ & - \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} B^{\frac{1}{2}} s(t-n) B^{-1} \psi_n + e^{-\frac{\alpha}{2}(t-n)} c(t-n) B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafından norm alınıp, Lemma 3.1 ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| B^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H &\leq |1-a| \|\varphi_n\|_H + \frac{\alpha^2}{4} |1-a| \|B^{-1} \varphi_n\|_H + \frac{\alpha}{2} \|B^{-1} \psi_n\|_H \\
&\quad + \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \\
&\leq |1-a| \left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \|B^{-1}\|_{H \rightarrow H} \right] \|\varphi_n\|_H + \left[\frac{\alpha}{2} \|B^{-\frac{1}{2}}\|_{H \rightarrow H} + 1 \right] \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \\
&\leq |1-a| \left[1 + \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}} \right] \|\varphi_n\|_H + \left[\frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} + 1 \right] \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \\
&\leq |1-a| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}} \|\varphi_n\|_H + \left[\frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} + 1 \right] \left\| B^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H \tag{3.17}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $c = |1-a| \frac{\delta}{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}$ ve $d = \left[\frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{4}}} + 1 \right]$ sabitleri ve B 'nin tanımı

kullanılırsa (3.17) eşitsizliği

$$\left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H \leq c \|\varphi_n\|_H + d \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_n \right\|_H$$

haline gelir. Eğer iki taraftan uygun şekilde maksimum alınırsa

$$\begin{aligned}
\max_{n \leq t \leq n+1} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H \\
\leq c \max_{n-1 \leq t \leq n} \|v(t)\|_H + d \max_{n-1 \leq t \leq n} \left\| \left(A - \frac{\alpha^2}{4} I \right)^{-\frac{1}{2}} v'(t) \right\|_H
\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir ki bu eşitsizlik her $n = 1, 2, 3, \dots$ için geçerlidir. Bu da Teorem 3.2'nin iv. şıkkı ile verilen son kestirimdir.

Sonuç olarak Teorem 3.2 ile verilen tüm kestirimlerin doğruluğu gösterilmiş olur.

BÖLÜM 4

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde zaman gecikmeli telegraf denklem için oluşturulan bir örnek problem ele alınacaktır. Problemin tam çözümü elde edildikten sonra, ilk olarak birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile ardından da ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile yaklaşık çözümler bulunacaktır. Bu yaklaşık çözümlerin hataları hesaplanıp karşılaştırılacaktır. Yaklaşık çözümleri hesaplamak için kullanılan MATLAB programı ek olarak sunulmuştur. Örnek olarak

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,001 \frac{\partial^2 u([t], x)}{\partial x^2}, \\ t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

ile verilen zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer problemi ele alınacaktır.

4.1. (4.1) Probleminin Tam Çözümünü Fourier Serileri Yöntemiyle Elde Etme

(4.1) verilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü bulmak için adım-adım çözüm metoduyla Fourier serileriyle çözüm yöntemi birlikte kullanılacaktır.

Problem (4.1), $t \in [0,1]$ için yeniden yazılırsa;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,001 \frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, & u_t(0, x) = -\sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

problemine dönüşür. $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx$ şeklinde aranan çözüm (4.2)'de yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \sin kx + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \sin kx \\ \qquad \qquad \qquad = -0,001 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin kx, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k(0) \sin kx = \sin x, & \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(0) \sin kx = -\sin x \end{cases}$$

problemi elde edilir. Burada $k = 1, 2, 3, \dots$ için $\sin kx$ 'lerin katsayıları eşitlenirse

$k \neq 1$ için

$$\begin{cases} A_k''(t) + 2A_k'(t) + k^2 A_k(t) = 0, \\ A_k(0) = 0, \quad A_k'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$k = 1$ için

$$\begin{cases} A_1''(t) + 2A_1'(t) + A_1(t) = -0,001, \\ A_1(0) = 1, \quad A_1'(0) = -1 \end{cases} \quad (4.4)$$

problemleri elde edilir. $k \neq 1$ için elde edilen (4.3) başlangıç değer problemin tek çözümü aşıkaz çözüm $A_k(t) \equiv 0$ dır. $k = 1$ durumunda ise denklemin homojen kısmının karakteristik denkleminin köklerinden yararlanılarak

$$A_{1h}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t}$$

homojen kısmın çözümü olarak bulunur. Başlangıç değer koşulları sağlatılarak sabitler $c_1 = 1,001$, $c_2 = 0,001$ olarak, ayrıca belirsiz katsayılar yöntemiyle de özel çözüm

$$A_{1p}(t) = -0,001$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla çözüm, $t \in [0,1]$ için

$$u(t, x) = [1,001e^{-t} + 0,001te^{-t} - 0,001]sinx \quad (4.5)$$

dir.

Problem (4.1), $t \in [1,2]$ için yeniden yazılırken yapılacak değişiklik başlangıç değer koşullarının (4.5) çözümünden elde edilmesidir. Bu şekilde devam edilerek t 'nin farklı aralıklardaki değerleri için çözümler elde edilir. Aşağıda ilk üç aralık için (4.1)'in tam çözümü verilmiştir.

$$u(t, x) = sinx \begin{cases} 1,001e^{-t} + 0,001te^{-t} - 0,001, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1,001e^{-t} + [0,002002 - 0,001001e]te^{-t} - 0,001[1,002e^{-1} - 0,001], & 1 \leq t \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} 0,999994996 + 0,001005004e \\ + 1,001(0,001)^2e^2 \end{array} \right] e^{-t} \\ + \left[\begin{array}{l} 0,003007004 - 0,002006004e \\ 1,001(0,001)^2e^2 \end{array} \right] te^{-t} & 2 \leq t \leq 3, \\ -0,001[1,005004e^{-2} - 0,003004e^{-1} - (0,001)^2], \\ \vdots \end{cases}$$

4.2 (4.1) Probleminin Yaklaşık Çözümünü Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Etme

Bu kısımda (4.1) ile verilen zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılacaktır.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + 2 \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} - \frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} \\
= 0,001 \frac{u_{n+1}^{k-N} - 2u_n^{k-N} + u_{n-1}^{k-N}}{h^2}, \\
t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
N\tau = 1, \quad Mh = \pi, \\
u_n^k = \sin x_n, \quad \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} = -\sin x_n, \quad x_n = nh, \\
0 \leq n \leq M, \quad -N \leq k \leq 0, \\
u_0^k = u_M^k = 0, \quad k \geq 0.
\end{array} \right. \quad (4.6)$$

Elde edilen (4.6) sistemi, (4.1)'in birinci basamaktan doğruluklu fark şeması sistemidir. Bu sistemi matris formunda ifade etmek mümkündür. Burada, $a = -\frac{1}{h^2}$, $b = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau} + \frac{2}{h^2}$, $c = -\frac{2}{\tau^2} - \frac{2}{\tau}$, $d = \frac{1}{\tau^2}$ olmak üzere, $(M+1) \times (M+1)$ boyutundaki A, B, C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a
\end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & 0
\end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

ayrıca R , $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutunda birim matris,

$$\varphi_n^{k-N} = \frac{u_{n+1}^{k-N} - 2u_n^{k-N} + u_{n-1}^{k-N}}{h^2}, \quad 1 \leq n \leq M - 1$$

ile tanımlı iken $(M + 1) \times 1$ boyutundaki $\varphi(U^{k-N}), U^s$ matrisleri

$$\varphi(U^{k-N}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1^{k-N} \\ \vdots \\ \varphi_{M-1}^{k-N} \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad U^s = \begin{bmatrix} u_0^s \\ u_1^s \\ \vdots \\ u_{M-1}^s \\ u_M^s \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad s = k, k \pm 1$$

ile verilmiş olsun. O halde (4.6) sisteminin matris formu

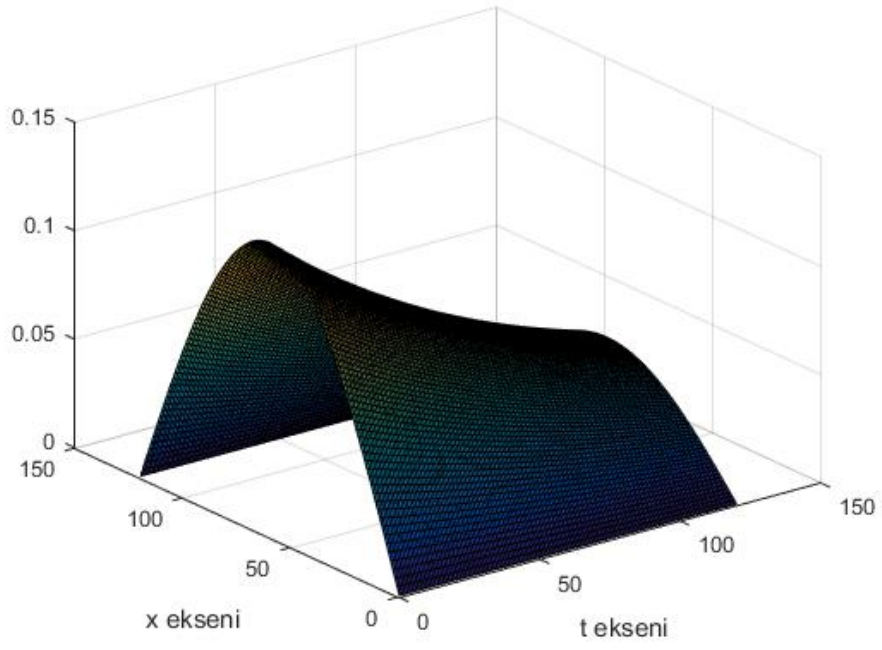
$$\left\{ \begin{array}{l} AU^{k+1} + BU^k + CU^{k-1} = 0,001R\varphi(U^{k-N}), \quad k = 1, 2, \dots \\ U^k = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_{M-1} \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad U^{k+1} = (1 - \tau)U^k, \quad -N \leq k \leq 0 \end{array} \right.$$

olarak elde edilir. Burada U^{k+1} yalnız bırakılarak

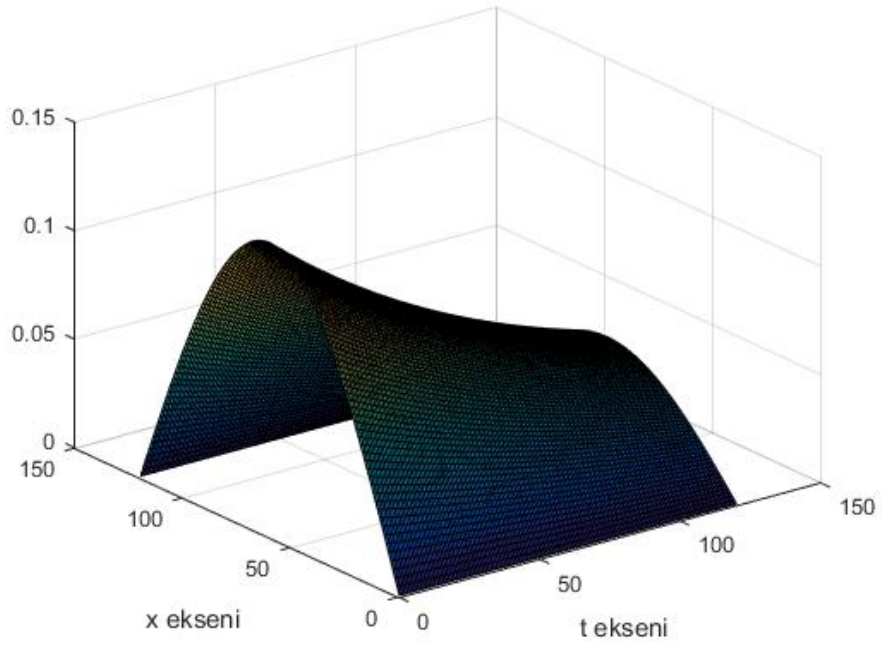
$$\left\{ \begin{array}{l} U^{k+1} = A^{-1}(0,001R\varphi(U^{k-N}) - BU^kCU^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \\ U^k = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_{M-1} \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad U^{k+1} = (1 - \tau)U^k, \quad -N \leq k \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

matris katsayılı k değişkenli ikinci mertebeden fark denkleminin elde edilir.

(4.7) ile verilen fark denkleminin çözümü için EK-A ile verilmiş olan MATLAB programı kullanılmıştır. Bu program ile yaklaşık çözümler hesaplanıp hata analizi yapılmıştır. M ve N 'nin 120 değeri ve $t \in [2,3]$ için elde edilen tam çözümün ve yaklaşık çözümün grafikleri aşağıda verilmiştir.



ŞEKİL 4.1 $t \in [2,3]$ için tam çözüm



ŞEKİL 4.2 $t \in [2,3]$ için sayısal çözüm

Yukarıda verilen şekillerde tam çözüm ile yaklaşık çözümü göz ile karşılaştırmak neredeyse mümkün değildir. Çünkü hata oldukça düşüktür. Bu nedenle

$$E_M^N = \max_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 0 \leq n \leq M}} |u(t_k, x_n) - u_n^k| \quad (4.8)$$

formülü kullanılarak elde edilen sonuçlar tablo şeklinde aşağıda verilmiştir.

TABLO 4.1 M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1], [1,2], [2,3]$ İçin (4.6) Fark Şeması İçin Hatalar

	$M = N = 30$	$M = N = 60$	$M = N = 120$
$t \in [0,1]$	0,0062517	0,0030913	0,0015375
$t \in [1,2]$	0,0023084	0,0011415	0,0005677
$t \in [2,3]$	0,0008514	0,0004210	0,0002094

4.3 (4.1) Probleminin Yaklaşık Çözümünü İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasıyla Elde Etme

Bu kısımda (4.1) ile verilen zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılacaktır.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + 2 \frac{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}}{2\tau} - \frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{2h^2} \\ \quad - \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{2h^2} \\ = 0,001 \left[\frac{u_{n+1}^{k+1-N} - 2u_n^{k+1-N} + u_{n-1}^{k+1-N}}{2h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1-N} - 2u_n^{k-1-N} + u_{n-1}^{k-1-N}}{2h^2} \right], \\ t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ N\tau = 1, \quad Mh = \pi, \\ u_n^k = \sin x_n, \quad \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} = -\sin x_n + \frac{\tau}{2} \sin x_n, \\ x_n = nh, \quad 0 \leq n \leq M, \quad -N \leq k \leq 0, \\ u_0^k = u_M^k = 0, \quad k \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Yukarıda (4.9) ile verilen sistem, (4.1) başlangıç-sınır değer probleminin ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasıyla ifadesine karşılık gelen sistemdir. Bir önceki alt başlık altında yapıldığı gibi burada da (4.9) sistemi matris formunda ifade edilecek ve çözüme o şekilde ulaşılabacaktır.

$$\left\{ \begin{array}{l} AU^{k+1} + BU^k + CU^{k-1} = 0,001R\varphi(U^{k-N}), \quad k = 1,2, \dots, \\ U^k = \begin{bmatrix} \sin x_0 \\ \sin x_1 \\ \vdots \\ \sin x_{M-1} \\ \sin x_M \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad U^{k+1} = \left(1 - \tau + \frac{\tau^2}{2}\right)U^k, \quad -N \leq k \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

ile verilen k değişkenli matris katsayılı denklem (4.9) sisteminin matris formunda ifadesidir. Burada $a = -\frac{1}{2h^2}$, $b = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}$, $c = -\frac{2}{\tau^2}$, $d = \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}$ olmak üzere, A, B, C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b & a \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & d & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & d & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & d & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & d & a \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$$

şeklindeki $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutunda matrislerdir. Ayrıca R ise birim matris olup $(M + 1) \times (M + 1)$ boyutundadır. $\varphi(U^{k-N})$ ve U^s sütun matrisleri

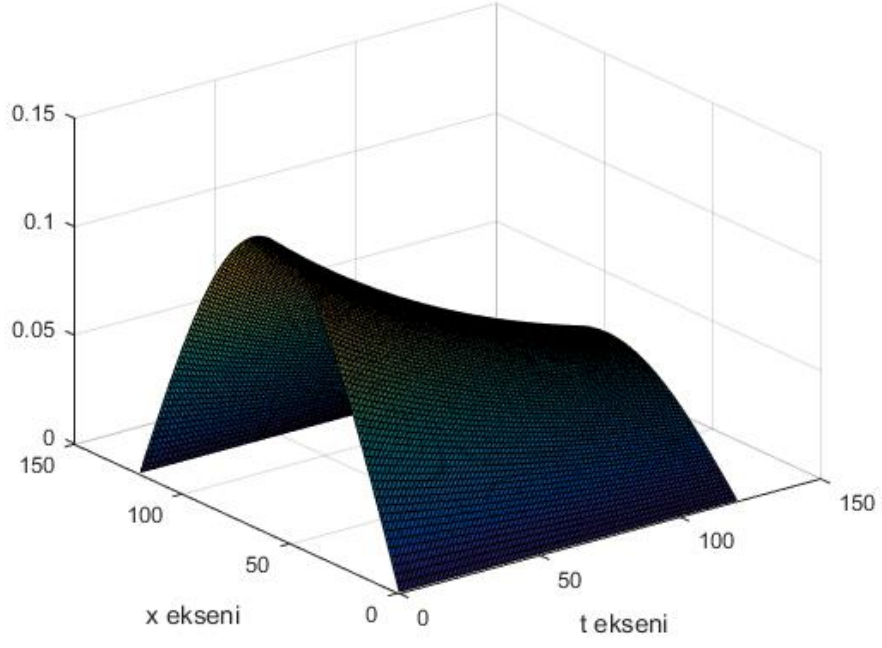
$$\varphi(U^{k-N}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_1^{k-N} \\ \vdots \\ \varphi_{M-1}^{k-N} \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, U^s = \begin{bmatrix} u_0^s \\ u_1^s \\ \vdots \\ u_{M-1}^s \\ u_M^s \end{bmatrix}_{(M+1) \times 1}, \quad s = k, k \pm 1$$

şeklinde tanımlı olup, burada $\varphi(U^{k-N})$ 'nin bileşenleri olan φ_n^{k-N} , $1 \leq n \leq M - 1$ için

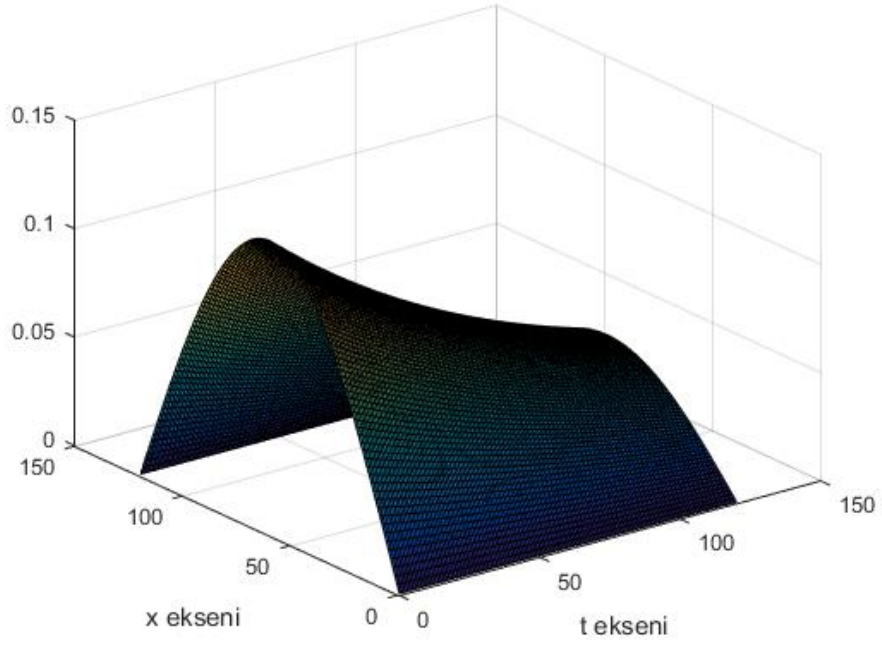
$$\varphi_n^{k-N} = \frac{u_{n+1}^{k+1-N} - 2u_n^{k+1-N} + u_{n-1}^{k+1-N}}{2h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1-N} - 2u_n^{k-1-N} + u_{n-1}^{k-1-N}}{2h^2}$$

biçimindedir.

(4.10) ile verilen fark denkleminin çözümü için EK-B ile verilmiş olan MATLAB programı kullanılmıştır. Bu program ile yaklaşık çözümler hesaplanıp hata analizi yapılmıştır. M ve N 'nin 120 değeri ve $t \in [2,3]$ için elde edilen grafikler aşağıda verilmiştir.



ŞEKİL 4.35 $t \in [2,3]$ için tam çözüm



ŞEKİL 4.36 $t \in [2,3]$ için sayısal çözüm

Yukarıda her ne kadar tam çözümün grafiği ile yaklaşık çözümün grafiği arka arkaya verilmiş olsa da hatanın çok küçük değerlerde olmasından kaynaklı aradaki farkı şekillerden anlamak mümkün değildir. Bu nedenle yine (4.8) formülü kullanılarak hesaplanan her bir aralıktaki mutlak hata aşağıda tablo olarak verilmektedir.

TABLO 4.2 M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $t \in [0,1], [1,2], [2,3]$ İçin (4.9) Fark Şeması İçin Hatalar

	$M = N = 30$	$M = N = 60$	$M = N = 120$
$t \in [0,1]$	0,0001894	0,0000491	0,0000131
$t \in [1,2]$	0,0000623	0,0000144	0,0000030
$t \in [2,3]$	0,0000214	0,0000045	0,0000007

4.4 Birinci ve İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemalarıyla Elde Edilen Sonuçların Hatalarının Karşılaştırılması

Yukarıda yapılan çalışmalarda her ne kadar ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarını kullanarak yapılan sayısal çözümlerde birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarıyla yapılan sayısal çözümlere göre çok daha küçük oranlarda hata yapıldığı görülse de bunu bir kez daha karşılaştırarak ortaya koymak faydalı olacaktır.

Dikkat edilirse hem birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak hem de ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerde M ve N değerleri için 30, 60 ve 120 değerleri verilmiş ve bu şekilde adım sayısı arttıkça elde edilen sonuçlarda hata payının düştüğü görülmüştür. Ne var ki, hata payının düşüş hızı birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları için aynı hızda değildir. Adım sayısını ikiye katlarken birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ile elde edilen sonuçların hata payının yarıya indiği gözlemlenirken bu ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasıyla elde edilen sonuçlarda yaklaşık dörtte birine kadar indiği gözlemleniyor. Bu durum da bize olması gerektiği gibi ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanmanın, birinci

basamaktan doğruluklu fark şeması kullanımına karşı daha avantajlı olduğunu gösteriyor.

Aşağıda birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarıyla elde edilen sayısal çözümlerde maksimum hatalarının karşılaştırıldığı tablo verilmiştir.

TABLO 4.3 M ve N 'nin Farklı Değerleri İçin $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ Aralıklarında Maksimum Hataların Karşılaştırması

		$M = N = 30$	$M = N = 60$	$M = N = 120$
$t \in [0,1]$ için	Birinci Bas.	0,0062517	0,0030913	0,0015375
	Doğ. Fark Ş.			
	İkinci Bas.	0,0001894	0,0000491	0,0000131
	Doğ. Fark Ş.			
$t \in [1,2]$ için	Birinci Bas.	0,0023084	0,0011415	0,0005677
	Doğ. Fark Ş.			
	İkinci Bas.	0,0000623	0,0000144	0,0000030
	Doğ. Fark Ş.			
$t \in [2,3]$ için	Birinci Bas.	0,0008514	0,0004210	0,0002094
	Doğ. Fark Ş.			
	İkinci Bas.	0,0000214	0,0000045	0,0000007
	Doğ. Fark Ş.			

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu çalışmada, zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç-sınır değer problemi Hilbert uzayında ele alınmıştır. Lineer zaman gecikmeli telegraf denklemler için oluşturulmuş başlangıç-sınır değer problemleri Fourier serileri, Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü yöntemleriyle çözülmüştür. Ancak, kurulan örnek lineer olmayan zaman gecikmeli telegraf denklemler için başlangıç-sınır değer problemlerinin zaman gecikmeli terimi sayesinde lineerleştiği ve yukarıda sayılan yöntemlerin uygulanabileceği görülmüş ve bu yöntemler uygulanmıştır. Zaman gecikmeli telegraf denklemlerin çözümlerinin kararlılık kestirimi için, H Hilbert uzayında, A self-adjoint pozitif tanımlı operatör, $\delta > \frac{\alpha^2}{4}$, $A \geq \delta I$ ve bilinen φ ve ψ fonksiyonları $D(A)$ 'nin elemanları olmak üzere, lineer zaman gecikmeli telegraf denklem için başlangıç değer probleminin

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = aAv([t]), & t > 0, \\ v(0) = \varphi, & v'(0) = \psi \end{cases}$$

abstract hali dikkate alınmıştır. Çözümünün kararlılığı üzerine teorem verilmiş ve kanıtı yapılmıştır.

Çalışmayı sayısal sonuçlarla desteklemek için, örnek problem olarak oluşturulan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0,001 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \\ t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, x) = \sin x, \quad u_t(0, x) = -\sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0 \end{array} \right.$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Öncelikle, Fourier serileri metoduyla tam çözümleri elde edilen problemin, sayısal çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılmıştır. Sayısal çözümler için MATLAB ile programlamadan yararlanılmış, tam ve yaklaşık çözümler grafiklerle verilmiştir.

EKLER

Ek-A Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasının Çözümü İçin Hazırlanmış MATLAB Programı

```
function telegraphfirstorder(M,N)
h=pi/M; tau=1/N;
a=-1/h^2 ; b=(1/tau^2)+(2/tau)+(2/h^2);
c=(-2/tau^2)+(-2/tau); d=1/(tau^2);
A=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    A(1,1)=1; A(1,M+1)=0;
    A(2,M+1)=1;
    A(n+2,n)=a; A(n+2,n+1)=b; A(n+2,n+2)=a;
end;
A;
B=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    B(n+2,n+1)=c;
end;
B;
C=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    C(n+2,n+1)=d;
end;
C;
R=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M+1;
    R(n,n)=1;
end;
fii=zeros(M+1,1);
for n=3:M+1; fii(n,1)=(0.001)*(sin((n-1)*h)-
2*sin((n-2)*h)+sin((n-3)*h))*(1/(h^2));
end;
fii;
G=inv(A);
for n=1:M+1; U(n,1)=sin((n-1)*h); U(n,2)=(1-
tau)*sin((n-1)*h);
end;
for k=2:N; U(:,k+1)=G*R*fii-G*B*U(:,k)-G*C*U(:,k-1);
end;
U;
%%%%%%EXACT SOLUTION%%%%%%%%
for j=1:M+1;
    for k=1:N+1;
        t=(k-1)*tau;
        x=(j-1)*h;
```

```

                es(j,k)=(1.001)*exp(-t)+0.001*t*exp(-t)-
0.001)*sin(x);
            end;
        end;
        es;
        %%%%%%%%%%DIFFERENCE%%%%%%%%
        absdiff=max(max(abs(es-U)))
        figure; surf(U);title('');
        xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
        figure; surf(es);title(''); xlabel('t ekseni');
        ylabel('x ekseni'); rotate3d;
        psi=zeros(M+1,1);
        for n=3:M+1;
            for k=N+1:2*N+1;
                psi(n,1)=0.001*(U(n,k-N)-2*U(n-1,k-N)+U(n-2,k-
N))*(1/h^2);
            end;
        end;
        psi;
        for n=1:M+1;
            U2(n,1)=(1.002*exp(-1)-0.001)*sin((n-1)*h);
        end;
        for n=1:M+1;
            U2(n,2)=-tau*(1.001*exp(-1)*sin((n-
1)*h))+(1.002*exp(-1)-0.001)*sin((n-1)*h);
        end;
        for k=2:N;
            U2(:,k+1)=G*R*psi-G*B*U2(:,k)-G*C*U2(:,k-1);
        end;
        U2;
        %%%%%%%%%%EXACT SOLUTION%%%%%%%%
        for j=1:M+1;
            for k=1:N+1;
                t=(k+N-1)*tau; x=(j-1)*h;
                es2(j,k)=(1.001*exp(-t)+(0.002002-
0.001001*exp(1))*t*exp(-t)-0.001*(1.002*exp(-1)-
0.001))*sin(x);
            end;
        end;
        %%%%%%%%%%ABSOLUTE DIFFERENCE%%%%%%%%
        absdiff2=max(max(abs(es2-U2)))
        %%%%%%%%%%GRAPH OF SOLUTION %%%%%%%%%%
        figure; surf(U2); title('yaklasik');
        xlabel('t ekseni'); ylabel('x ekseni'); rotate3d;
        figure; surf(es2); title(''); xlabel('t ekseni');
        ylabel('x ekseni'); rotate3d;
        psi2=zeros(M+1,1);
        for n=3:M+1;
            for k=N+1:2*N+1;

```

```

                psi2(n,1)=0.001*(U2(n,k-N)-2*U2(n-1,k-N)+U2(n-
2,k-N))*1/h^2;
            end;
        end;
        psi2;
        for n=1:M+1;
            U3(n,1)=(1.005004*exp(-2)-0.003004*exp(-1)-
(0.001)^2)*sin((n-1)*h);
        end;
        for n=1:M+1;
            U3(n,2)=(-tau)*(1.003002*exp(-2)-0.001001*exp(-
1))*sin((n-1)*h)+(1.005004*exp(-2)-0.003004*exp(-1)-
0.001^2)*sin((n-1)*h);
        end;
        for k=2:N;
            U3(:,k+1)=G*R*psi2-G*B*U3(:,k)-G*C*U3(:,k-1);
        end;
        U3;
        %%%%%%%%%%% EXACT SOLUTION %%%%%%%%%%
        for j=1:M+1;
            for k=1:N+1;
                t=(k+2*N-1)*tau; x=(j-1)*h;

es3(j,k)=((0.999994996+0.001005004*exp(1)+1.001*(0.001)
^2*exp(2))*exp(-t)+(0.003007004-0.002006004*exp(1)-
1.001*(0.001)^2*exp(2))*t*exp(-t)-0.001*(1.005004*exp(-
2)-0.003004*exp(-1)-(0.001)^2))*sin(x);
            end;
        end;
        %%%%%%%%%%% ABSOLUTE DIFFERENCE %%%%%%%%%%
        absdiff3=max(max(abs(es3-U3)))
        %%%%%%%%%%% GRAPH OF SOLUTION %%%%%%%%%%
        figure; surf(U3); title('');
        xlabel('t akseni'); ylabel('x akseni'); rotate3d;
        figure; surf(es3); title(''); xlabel('t akseni');
        ylabel('x akseni'); rotate3d;

```

Ek-B İkinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şemasının Çözümü İçin Hazırlanmış MATLAB Programı

```

function telegraphsecondorder(M,N)
h=pi/M; tau=1/N;
for j=1:M;
    for k=1:N+1;
a=-1/(2*h^2); b=1/tau^2+1/tau+1/h^2; c=-2/tau^2;
d=1/tau^2-1/tau+1/h^2;
        end;
    end;
A=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    A(1,1)=1; A(2,M+1)=1;
    A(n+2,n)=a; A(n+2,n+1)=b; A(n+2,n+2)=a;
end; A;
B=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    B(n+2,n+1)=c;
end; B;
C=zeros(M+1,M+1);
for n=1:M-1;
    C(n+2,n)=a; C(n+2,n+1)=d; C(n+2,n+2)=a;
end; C;
fii=zeros(M+1,1);
fii(1,1)=0; fii(2,1)=0;
for n=3:M+1;
    fii(n,1)=(0.001)*(sin((n-1)*h)-2*sin((n-2)*h)+sin((n-3)*h))*1/h^2;
end; fii;
G=inv(A);
for n=1:M+1;
    U(n,1)=sin((n-1)*h);
    U(n,2)=(tau^2/2-tau+1)*sin((n-1)*h);
end;
for k=2:N;
    U(:,k+1)=G*fii-G*B*U(:,k)-G*C*U(:,k-1);
end; U;
%%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE'
%%\%\%\%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(j,k)=((1.001)*exp(-t)+0.001*t*exp(-t)-0.001)*sin(x);
end;
end;
%%\%\%\%\%\%\ 'ABSOLUTE DIFFERENCES' %%\%\%\%\%\%\% ;

```

```

absdiff=max(max(abs(es-U)))
%GRAPH OF THE SOLUTION ;
figure; surf(U); title('');xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d ;
figure; surf(es); title(''); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni');rotate3d ;
psi=zeros(M+1,1);
for n=3:M+1;
    for k=N+2:2*N;
        psi(n,1)=0.001*((U(n,k+1-N)-2*U(n-1,k+1-
N)+U(n-2,k+1-N))*1/(2*(h^2))+(U(n,k-1-N)-2*U(n-1,k-1-
N)+U(n-2,k-1-N))*1/(2*(h^2)));
    end;
end; psi;
for n=1:M+1;
    U2(n,1)=(1.002*exp(-1)-0.001)*sin((n-1)*h);
end;
for n=1:M+1;
    U2(n,2)=((tau^2)/(2)-tau)*(1.001*exp(-1))*sin((n-
1)*h)+(1)*(1.002*exp(-1)-0.001)*sin((n-1)*h);
end;
for k=2:N;
    U2(:,k+1)=G*psi-G*B*U2(:,k)-G*C*U2(:,k-1);
end; U2;
%%%%%%%%%%%%% EXACT SOLUTION %%%%%%%%%%%%%%
for j=1:M+1;
    for k=1:N+1;
        t=(k+N-1)*tau; x=(j-1)*h;
        es2(j,k)=(1.001*exp(-t)+(0.002002-
0.001001*exp(1))*t*exp(-t)-0.001*(1.002*exp(-1)-
0.001))*sin(x);
    end;
end;
%%%%%%%%%%%%% ABSOLUTE DIFFERENCE %%%%%%%%%%%%%%
absdiff2=max(max(abs(es2-U2)))
%%%%%%%%%%%%% GRAPH OF DOLUTION %%%%%%%%%%%%%%
figure; surf(U2); title(''); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d;
figure; surf(es2); title(''); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d;
psi2=zeros(M+1,1);
for n=3:M+1;
    for k=N+2:2*N;
        psi2(n,1)=0.001*((U2(n,k+1-N)-2*U2(n-1,k+1-
N)+U2(n-2,k+1-N))*1/(2*(h^2))+(U2(n,k-1-N)-2*U2(n-1,k-
1-N)+U2(n-2,k-1-N))*1/(2*(h^2)));
    end;
end; psi2;
for n=1:M+1;

```



```

        U3(n,1)=(1.005004*exp(-2)-0.003004*exp(-1)-
0.001^2)*sin((n-1)*h);
    end;
    for n=1:M+1;
        U3(n,2)=(tau^2/2-tau)*(1.003002*exp(-2)-
0.001001*exp(-1))*sin((n-1)*h)+(1.005004*exp(-2)-
0.003004*exp(-1)-0.001^2)*sin((n-1)*h);
    end;
    for k=2:N;
        U3(:,k+1)=G*psi2-G*B*U3(:,k)-G*C*U3(:,k-1);
    end; U3;
    %%%%%%%%%%% EXACT SOLUTION %%%%%%%%%%
    for j=1:M+1;
        for k=1:N+1;
            t=(k+2*N-1)*tau; x=(j-1)*h;

es3(j,k)=((0.999994996+0.001005004*exp(1)+1.001*(0.001)
^2*exp(2))*exp(-t)+(0.003007004-0.002006004*exp(1)-
1.001*(0.001)^2*exp(2))*t*exp(-t)-0.001*(1.005004*exp(-
2)-0.003004*exp(-1)-(0.001)^2))*sin(x);
        end;
    end;
    %%%%%%%%%%% ABSOLUTE DIFFERENCE %%%%%%%%%%
    absdiff3=max(max(abs(es3-U3)))
    %%%%%%%%%%% GRAPH OF SOLUTION %%%%%%%%%%
    figure; surf(U3); title(''); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d;
    figure; surf(es3); title(''); xlabel('t akseni');
ylabel('x akseni'); rotate3d;

```

KAYNAKLAR

- [1] K. Yosida, *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions*, Springer-Varlog, New York, (1984).
- [2] V. K. Srivastava, M. K. Awasthi, M. Tamsir, *RDTM Solution of Caputo time Fractional-Order Hyperbolic Telegraph Equation*, AIP ADVANCES 3, 032142, (2013).
- [3] Mark A. Pinsky, *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications*, Third Edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (2011).
- [4] V. K. Srivastava, M. K. Awasthi, R. K. Chaurrasia, M. Tasmir, *The Telegraph Equation and Its Solution by Reduced Differential Transform Method*, Modelling and Simulation in Engineering, Volume 2013, Article ID 746351, (2013). <http://dx.doi.org/10.1155/2013/746351>
- [5] S. Goldstein, *On Diffusion by Discontinuous Movements and On The Telegraph Equations*, Q J Mechanics Appl Math, Cilt:4, Sayı:2, Sayfa:129-156, (1951). <https://doi.org/10.1093/qjmam/4.2.129>
- [6] M. J. Golay, *Vapor Phase Chromatography and the Telegraph's Equation*, Analytical Chemistry, Volume 29, Issue 6, Page:928-932, (1957).
- [7] B. Gopinath, M.M. Sondhi, *Inversion of the Telegraph Equation and the Synthesis of Nonuniform Lines*, Proceedings of the IEEE, Vol.59, No.3, (1971).
- [8] A. Okubo, *Another Mathematical Model For Oceanic Diffusion-Telegraph Equation*, Transactions-American Geophysical Union, Cilt:52, Sayı:4, Sayfa:233, (1971).
- [9] P. Drabek, D. Lupo, *On Generalized Periodic Solution of Some Nonlinear Telegraph and Beam Equations*, Czechoslovak Mathematical Journal, 36(3):434-449,(1986).
- [10] P. L. Felmer, R. F. Manasevich, *Periodic Solutions of Coupled System of Telegraph-Wave Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 116, 10-21, (1986).
- [11] E. Feireisl, *Bounded, Almost-Periodic and Periodic Solutions to Fully Nonlinear Telegraph Equations*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.40, No.3, P. 514-527, (1990).
- [12] S. Chang, V. H. Weston, *On Inverse Problem of The 3D Telegraph Equation*, Inverse Problems, Vol. 13, No. 5, P. 1207, (1997).

- [13] F. Gao, C. Chi, *Unconditionally Stable Difference Schemes for a One-Space-Dimensional Linear Hyperbolic Equation*, Applied Mathematics and Computation, 187(2), 1272-1276, (2007).
- [14] J. Biazar, H. Ebrahimi, Z. Ayati, *An Approximation to the Solution of Telegraph Equation by Variational Iteration Method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume:25, Issue:4, Pages:197-801, (2009).
- [15] A. Saadatmandi, M. Dehghan, *Numerical Solution of Hyperbolic Telegraph Equation Using the Chebyshev Tau Method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Volume:26, Issue:1, Pages:239-252, (2010).
- [16] A. Ashyralyev, M. Modanli, *An Operator Method for Telegraph Partial Differential and Difference Equations*, Boundary Value Problems, 2015 no.1, 41, (2015).
- [17] A. Ashyralyev, M. Modanli, *Nonlocal Boundary Value Problem for Telegraph Equation*, AIP Conference Proceedings, Volume 1676, Issue 1, (2015).
- [18] A. Ashyralyev, M. Modanli, *An Approximation of Stochastic Telegraph Equations*, AIP Conference Proceedings, Volume 1479, Issue 1, (2012).
- [19] İ. H. Gürbey, *Gecikmeli Parabolik Bir Diferansiyel Denklemin Çözümleri*, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, YL Tezi, (2013).
- [20] G. Birkhoff, L. Kotin, *Asymptotic Behavior of Solutions of First-Order Linear Differential-Delay Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 13, 8-18, (1966).
- [21] G. Birkhoff, L. Kotin, *Integro-Differential Delay Equations of Positive Type*, Journal of Differential Equations, 2, 320-327, (1966).
- [22] L.J. Grimm, K. Schmitt, *Boundary Value Problems for Delay-Differential Equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, 74.5, 997-1000, (1968).
- [23] E. Winston, *The Global Existence of Solutions of Delay Differential Equations*, Journal of Differential Equations, 10.3, 392-402, (1971).
- [24] A. S. C. Sinha, *On the Stability of Solutions of Some Third and Fourth Order Delay-Differential Equations*, Information and Control, 23.2, 165-172, (1973).
- [25] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, *On Stability of A Periodic Solution of A Differential Delay Equation*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, 6.2, 268-282, (1975).
- [26] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, *On the Nonlinear Differential Equation $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$* , Journal of Differential Equations, 23.2, 293-314, (1977).

- [27] P. Chocholaty, L. Slahor, *A Numerical Method to Boundary Value Problems for Second Order Delay Differential Equations*, Numerische Mathematik, 33.1, 69-75, (1979).
- [28] S. Nababan, K. L. Teo, *Necessary Conditions for Optimality of Cauchy Problems for Parabolic Partial Delay-Differential Equations*, Journal of Optimization Theory and Application, 34.1, 117-155, (1981).
- [29] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Finite Difference Method for Delay Parabolic Equations*, AIP Conference Proceedings, 1389, (2011).
- [30] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Approximate Solutions of Delay Parabolic Equations with the Neumann Condition*, AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, 555-558, (2012).
- [31] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *On Convergence of Difference Schemes for Delay Parabolic Equations*, Computers&Mathematics with Applications, 66.7, 1232-1244, (2013).
- [32] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Stability of Delay Parabolic Difference Equations*, Filomat, 28.5, 995-1006, (2014).
- [33] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Well-Posedness of Delay Parabolic Equations with Unbounded Operators Acting on Delay Terms*, Boundary Value Problems, 2014:126, (2014).
- [34] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, B. Ceylan, *Bounded Solutions of Delay Nonlinear Evolutionary Equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 318, 69-78, (2017).
- [35] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Difference Schemes for Delay Parabolic Equations with Periodic Boundary Conditions*, International Conference on Finite Difference Methods. Springer, Cham, 2014.
- [36] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Stability of Parabolic Equations with Unbounded Operators Acting on Delay Terms*, Electronic Journal of Differential Equations, A.N. 160, (2014).
- [37] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, *Well-posedness of Delay Parabolic Difference Equations*, Advances in Difference Equations, A.N. 18, (2014).
- [38] A. N. Al-Mutib, *Stability Properties of Numerical Methods for Solving Delay Differential Equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 10.1, 71-79, (1984).
- [39] E. Feireisl, *Global in Time Solutions to Quasilinear Telegraph Equations Involving Operator with Time Delay*, Application of Mathematics, 36.6, (1991).
- [40] A. V. Vyazmin, V. G. Sorokin, *Exact Solutions to Nonlinear Delay Differential Equations of Hyperbolic Type*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 788, No. 1, IOP Publishing, (2017).

- [41] Y. Li, H. Zhang, *Positive Doubly Periodic Solutions of Telegraph Equations with Delays*, Boundary Value Problems, 2015.1, 97, (2015).
- [42] S. A. Rukolaine, A. M. Samsonov, *Delayed Uncoupled Continuous-Time Random Walks do not Provide a Model for The Telegraph Equation*, Physical Review E 85.2, (2012).
- [43] A. Ashyralyev, D. Ağırseven, K. Türk, *On the Stability of the Telegraph Equation with Time Delay*, AIP Conference Proceedings, Vol. 1759, No. 020022, (2016).
- [44] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, (2004).

ÖZGEÇMİŞ

ADI	: Koray
SOYADI	: Türk
DOĞUM TARİHİ	: 29.06.1986
İLETİŞİM	: koray.trk.86@gmail.com
EĞİTİM BİLGİLERİ	
LİSE	: Antalya Anadolu Lisesi, 2000-2004
LİSANS	: Akdeniz Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2009-2014
YÜKSEK LİSANS	: Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2015-...
YABANCI DİLLER	: İngilizce
BİLGİSAYAR BİLGİSİ	: Microsoft Office, MATLAB, Python
İŞ DENEYİMİ	: Trakya Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi, 2014-...

TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM-2016), On The Stability of The Telegraph Equation with Time Delay, Sözlü Sunum, Almatı, Kazakistan, 7-10.09.2016.

AIP Conference Proceedings, Vol. 1759, No. 020022; On The Stability of The Telegraph Equation with Time Delay, SCI-Expanded Kapsamında Makale, 2016.