T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRİLMİŞ CİSİMLERİN GENİŞLEMELERİ

BURCU ÖZTÜRK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. FİGEN ÖKE

EDİRNE-2015

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin doktora tezi tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Figen ÖKE

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir doktora tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Prof. Dr. Hülya İŞCAN	
Doç. Dr. FİGEN ÖKE (Danışman)	
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	
Doç. Dr. M. Tamer KOŞAN	
Doç. Dr. İlhan ERDOĞAN	

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI DOKTORA PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

13/07/2015

Burcu ÖZTÜRK

Doktora Tezi

Değerlendirilmiş Cisimlerin Genişlemeleri

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

II. Bölümde konuyla ilgili ön bilgiler verilmiştir.

III. Bölümde tame genişlemeleri ve değerlendirilmiş cisimler üzerinde tanımlanmış olan sabitlere ait bazı teoremlere yer verilmiştir. Ardından seçkin ikililer ve seçkin zincirlerin sağladığı özellikler ve zincirdeki elemanları içeren cebirsel genişlemeler irdelenmiştir. Daha sonra değerlendirilmiş bir cismin tame genişlemeleri ve sabitleri ile ilgili elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

IV. Bölümde ise rezidül transandant genişlemeler, lifting polinomları ile ilgili tanımlar ve teoremler verilmiştir. Lifting polinomlarının köklerinin ve köklerin sabitlerinin özellikleri çalışılmıştır. Bu kavramların rezidül transandant genişlemeler ile ilişkisi incelenmiştir. Seçkin zincirler yardımıyla değer gruplarının ve rezidü cisimlerinin yazılışı ve lifting polinomlarının sağladığı bazı özellikler elde edilmiştir. Daha sonra bir K cisminin rankı 2 olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine genişlemeleri ele alınmıştır. Bu genişlemeler için yeni teoremler elde edilmiştir. Ardından, elde edilen teoremler v değerlendirmesinin rankının n olması durumu için genelleştirilmiştir.

Önceki bölümlerde elde edilen tüm sonuçlara V. Bölümde yer verilmiştir.

Yıl : 2015

Sayfa Sayısı : 55

Anahtar Kelimeler : Değerlendirmeler, Değerlendirilmiş cisimler, Rezidül Transandant Genişlemeler, Lifting polinomları, Tame genişlemeleri, Krasner Sabiti, Seçkin İkililer

Ph. D. Thesis

Extensions of Valued Fields

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mathematics

ABSTRACT

In Chapter II pertinent background material and definitions are given.

In Chapter III some theorems about tame extensions and constants that are defined on valued fields are considered. Then properties of distinguished pairs and distinguished chains and also their algebraic extensions are studied. The results obtained about constants and tame extensions of valuated fields are given

In Chapter IV the definitions and theorems about residual trascendental extensions and lifting polynomials are given. The properties of the roots of lifting polynomials and constants of these roots are studied. Their relations with residual transcendental extensions are investigated. Value groups and residue fields are described and some properties of lifting polynomials obtained via distinguished chains. The extensions of a valuation v to tame extensions of K and to rational function field $K(x)$ are considered where v is a valuation of a field K with $rankv = 2$. New theorems are obtained for these extensions. Then these theorems are generalized to the case $rankv = n.$

All results obtained in previous sections are given in Chapter V

Year : 2015

Number of Pages : 55

Keywords : Valuations, Valued Fields, Residual Transcendental Extensions, Lifting Polynomials, Tame extensions, Krasner's Constant, Distinguished Pairs

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bulunan 3.3.1. Teorem, 3.3.2. Teorem, 3.3.3. Teorem, 4.2.1. Önerme, 4.2.2. Önerme, 4.2.3. Önerme ve 4.2.5. 4.3.2. Teorem, 4.3.3. Teorem, 4.3.4. Teorem, 4.4.1. Teorem, 4.4.2. Teorem ve 4.4.4. Teorem tarafımızdan kanıtlanmıştır.

Çalışmalarım sırasında çok yakın ilgi göstererek hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Figen Öke'ye en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca ilgisini ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Hülya İşcan'a da sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışma Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri biriminde yapılan 2008-86 nolu doktora projesi ile desteklenmiştir.

BURCU ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\overline{K}$	: K cisminin cebirsel kapanışı
v	: Değerlendirme
(K, v)	: v ile değerlendirmiş K cismi
$\bar{v}$	: v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi
G_v	: v değerlendirmesinin değer grubu
O_v	: v değerlendirmesinin değerlendirme halkası
P_v	: O_v değerlendirme halkasının maksimal ideali
U_v	: O_v değerlendirme halkasının birim grubu
$rankv$	: v değerlendirmesinin rankı
k_v	: v değerlendirmesinin rezidü cismi
x^*	: x elemanının rezidüsü (değerlendirme halkasında bulunan x elemanının $\varphi: O_v \to (O_v/P_v) = k_v$ doğal dönüşüm altındaki görüntüsü)
L/K	: L cismi K cisminin bir genişlemesi
$Gal(L: K)$	: L/K genişlemesinin Galois grubu
v_L/v	: v değerlendirmesinin L cismine v_L genişlemesi
$[L: K]$	: L/K cebirsel genişlemesinin derecesi
e	: v_L/v genişlemesinin dallanma indeksi
f	: v_L/v genişlemesinin rezidü derecesi
D_h	: v_L/v genişlemesinin Henselian hatası
$\text{def}(v'/v)$	: v' değerlendirmesinin v değerlendirmesi üzerindeki hatası
$w_K(\alpha)$	: α elemanının K cismi üzerindeki Krasner Sabiti

BÖLÜM 1

GİRİŞ

K bir cisim olmak üzere, $K(x)$ rasyonel fonksiyon cisminin sonlu bir F genişlemesi K cismi üzerinde bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismi olarak adlandırılır. F/K cebirsel fonksiyon cisminin asal divizörleri olan place'ler ile ayrık değerlendirmeler bire-bir eşlendiğinden, değerlendirmeler cebirsel fonksiyon cisimlerinin yapısının belirlenmesinde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca (K,v) değerlendirilmiş bir cisim ve v değerlendirmesinin F cismine rezidül transandant bir genişlemesi w iken k_w rezidü cismi de k_v rezidü cismi üzerinde bir değişkenli cebirsel fonksiyon cismidir. Bundan dolayı bir K cismi üzerindeki değerlendirmelerin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine genişlemelerinin elde edilmesi önemlidir.

Bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine rezidül transandant genişlemeleri ilk olarak 1934 yılında Ostrowski tarafından ele alınmıştır. Nagata'nın tanımladığı rezidül transandant genişlemeler ile ilgili Mac Lane'in yaptığı çalışmalardan sonra Ohm ve Popescu bu konudaki çalışmalara derinlik kazandırmıştır. Popescu rezidül transandant genişlemelerin bir minimal çift yardımıyla tanımlandığını göstermiştir. Daha sonra 1988'de Zaharescu ve Alexandru ile birlikte uygun bir minimal çiftin belirlenmesi, cebirsel genişlemeler yardımıyla değerlendirmenin rezidü cisminin ve değer grubunun elde edilişi ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

1995 yılında ise Popescu ve Zaharescu lifting polinomu tanımını yaparak bu polinomların sağladığı özellikleri belirlemişlerdir. Bununla birlikte seçkin ikili kavramını vermişler ve bu kavramı kullanarak lifting polinomunun kökleri, bir v

değerlendirmesi yardımıyla belirlenen sabitler ve rezidül transandant genişlemeyi tanımlayan minimal çiftler arasındaki ilişkileri belirlemişlerdir.

Popescu ve Vraciu 1996 yılında yaptıkları çalışmada K cisminin rankı 2 olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemesini tanımlayan bir minimal çiftin, bir lifting polinomunun yardımıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir. Bu çalışmalar sabitlerin incelenmesinin önemini arttırmıştır. 1999 yılında Khanduja ve Saha δ_K sabitini kullanarak, Krasner Lemma'ya benzer şekilde literatürde önemli bir yere sahip olan bir teoremi kanıtlamışlardır.

2002 yılında Aghigh ve Khanduja (K,v) değerlendirilmiş cisminin cebirsel genişlemelerinin hatasız olması durumunda δ_K sabiti ile ilgili yaptıkları çalışmaları, 2003 yılında w_K Krasner Sabitini de göz önüne alarak tame cisimlerini karakterize etmekte kullanmışlardır. Ayrıca (K,v) cisminin bir tame cismi olması durumunda her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için bir seçkin ikili yazılabileceğini ve dolayısıyla bir seçkin zincir elde edilebileceğini göstermişlerdir. Bu zincirdeki elemanların, v değerlendirmesi yardımıyla belirlenen sabitleri arasındaki ilişki ile zincirdeki elemanları bulunduran cebirsel genişlemelerin özelliklerini de incelemişlerdir. 2005 yılında da elde edilen bu cebirsel genişlemelerin değerlendirmelerinin rezidü cisimlerinin ve değer gruplarının nasıl yazılacağını belirlemişlerdir.

Bu çalışmaların ışığında üçüncü bölümde seçkin ikililerin ve seçkin zincirlerin sağladığı özelliklerin irdelenmesi amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle sabitlerin ve tame genişlemelerinin yer aldığı teoremler ve tanımlar verilmiştir. Daha sonra (K,v_1) ve (k_{v_1},v_2) değerlendirilmiş iki cisim ve $v = v_1 o v_2$ olmak üzere (K,v) cisminin bir (L,z) genişlemesinin tame olması durumunda z değerlendirmesine bağlı olarak (K,v_1) ve (k_{v_1},v_2) cisimlerinin de birer tame genişlemelerinin olduğu gösterilmiştir. (K,v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve $rankv = 2$ iken v değerlendirmesine göre sabitlerin belirlenmesiyle ile ilgili elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Bölümün sonunda da $rankv = n$ olması durumu göz önüne alınarak tame genişlemeleri ile ilgili yapılan çalışma için bir genelleme elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde de bir minimal çift yardımıyla tanımlanan rezidül transandant genişlemeler, lifting polinomları ve bu polinomların özellikleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. Ayrıca seçkin ikililerin ve sabitlerin bu konudaki önemini gösteren teoremler de incelenmiştir. Bu çalışmalarda yararlanılarak öncelikle seçkin zincirler ve lifting polinomları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bunun için ilk olarak; (K, v) değerlendirilmiş bir cisim olmak üzere $a \in \overline{K} \backslash K$ elemanının bir seçkin zinciri göz önüne alınarak, $K(a)$ cisminin v_a değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi zincirdeki elemanların sabitleri ve minimal polinomlara bağlı olarak yazılmıştır. Ayrıca $a \in \overline{K} \backslash K$ ve $b \in \overline{K} \backslash K$ elemanlarının $a = a_0, a_1, \dots, a_n$ ve $b = b_0, b_1, \dots, b_n$ seçkin zincirleri yardımıyla $K(a_i, b_i)$ cisimlerinin $v_{a_i b_i}$ değerlendirmelerinin değer gruplarının ve rezidü cisimlerinin karşılaştırıldığı bir sonuç elde edilmiştir. Daha sonra lifting polinomları ve bu polinomların kökleri yardımıyla yazılan seçkin ikililerinin sağladığı bazı özelliklerin belirlendiği sonuçlar elde edilmiştir. Bölümün sonunda da bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $rankw = 2$ olan bir w rezidül transandant genişlemesinin tanımlanışının verildiği ve lifting polinomlarının sağladığı bazı özellikler ile ilgili elde edilen sonuçları içeren teoremler kanıtlanmıştır. Daha sonra $rankv = 2$ için yapılan tüm çalışmalar $rankv = n$ için çalışılarak bir genelleme elde edilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilmiş olan tüm sonuçlar beşinci bölümde özet halinde sunulmuştur.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde değerlendirme kavramı tanımlanıp, bunun eşliğinde diğer bölümlerde kullanılmak amacıyla gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Değerlendirmeler

2.1.1. TANIM: K bir cisim, G çarpımsal (veya toplamsal) sıralı bir grup olsun.

$v: K \to G \cup \{0\}$ (veya $v: K \to G \cup \{\infty\}$)

dönüşümü her $a, b \in K$ için

i) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (veya $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$)

ii) $v(a.b) = v(a)v(b)$ (veya $v(a.b) = v(a) + v(b)$)

iii) $v(a + b) \leq max\{v(a), v(b)\}$ (veya $v(a + b) \geq min\{v(a), v(b)\}$)

koşullarını gerçekliyorsa v dönüşümüne K cismi üzerinde bir değerlendirme adı verilir. G sıralı bir grubuna da v değerlendirmesinin değer grubu denir.

2.1.2. ÖNERME ([2]): v bir K cismi üzerinde değer grubu çarpımsal (veya toplamsal) olan bir değerlendirme olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $v(-1) = 1$ (veya $v(-1) = 0$)

ii) $a, b \in K, v(a) \neq v(b)$ ise

$v(a + b) = max\{v(a), v(b)\}$ dır. (veya $v(a + b) = min\{v(a), v(b)\}$ dır.)

iii) $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in K$ ise

$v(\sum_{i=1}^{n} a_i) \leq \max(v(a_i))$ dır. (veya $v(\sum_{i=1}^{n} a_i) \geq \min\big(v(a_i)\big)$ dir.)

iv) $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in K$ ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ise en az bir $i \neq j$ için $v(a_i) = v(a_j)$ dır.

2.1.3. TANIM: V bir K cisminin bir alt halkası olsun. $a \in K^*$ iken $a \in V$ veya $a^{-1} \in V$ oluyorsa V halkasına K cisminin bir <u>değerlendirme halkası</u> denir.

$P = \{a \in V | a^{-1} \notin V\}$ kümesi V değerlendirme halkasının tek maksimal idealidir.

$U = \{a \in V | a^{-1} \in V\}$ kümesi bir gruptur ve bu kümeye V değerlendirme halkasının birim grubu adı verilir.

Her değerlendirme halkasına karşılık bir değerlendirme yazılabileceği aşağıdaki önerme ile görülebilir.

2.1.4. ÖNERME ([5]): Bir K cisminin bir V değerlendirme halkasının birim grubu U olsun. Bu durumda her $a \in K$ için

$$v(a) = \begin{cases} 0 & , \ a = 0 \\ a.U & , \ a \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $v: K \to K^*/U \ \cup \{0\}$ dönüşümü K cisminin bir değerlendirmesidir.

2.1.5. ÖNERME ([2]): v bir K cisminin bir değerlendirmesi ve v değerlendirmesinin değer grubu G olsun. G çarpımsal bir grup ise değerlendirme halkası, maksimal ideali ve birim grubu sırasıyla

$V = \{a \in K |\ v(a) \leq 1\}$, $P = \{a \in K |\ v(a) < 1\}$, $U = \{a \in K |\ v(a) = 1\}$

kümeleridir. G toplamsal bir grup ise

$V = \{a \in K |\ v(a) \geq 0\}$, $P = \{a \in K |\ v(a) > 0\}$, $U = \{a \in K |\ v(a) = 0\}$

biçiminde olur.

2.1.6. TANIM: K cismi üzerinde bir değerlendirme v olsun. O_v değerlendirme halkası ve P_v tek maksimal ideali ise O_v/P_v kümesi bir cisimdir. Bu cisme v değerlendirmesinin <u>rezidü cismi</u> adı verilir ve k_v ile gösterilir.

Aşağıdaki tanım ile bu tezde sıkça kullanılan bir değerlendirmenin rankı kavramı verilecektir.

2.1.7. TANIM: G sıralı bir grup, H G grubunun bir alt grubu olsun. $a \in G$ olmak üzere $b \in H$ ve $b^{-1} \leq a \leq b$ iken $a \in H$ oluyorsa H alt grubuna G grubunun bir isolated alt grubu denir.

G grubunun kendisinden farklı tüm isolated alt gruplarının sayısına G sıralı grubunun rankı adı verilir. K cisminin bir v değerlendirmesinin rankı G_v değer grubunun rankıdır ve $rankv$ ile gösterilir.

2.2. Cebirsel Genişlemeler

Bu alt bölümde cebirsel genişlemelerde sıkça kullanılan bazı kavramlar verilecektir.

2.2.1. TANIM: K cisminin bir genişlemesi L olsun. $\overline{K} = \{\alpha \in L | \alpha\ ceb/K\}$ cismine K cisminin L cismi içindeki cebirsel kapanışı adı verilir.

$\alpha \in L$ olsun. α elemanı K cismi üzerindeki minimal polinomunun bir basit kökü ise α ya K cismi üzerinde ayrılabilirdir denir ve $\alpha\ ayr/K$ ile gösterilir.

Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir ise L cismi K cisminin bir ayrılabilir genişlemesidir denir.

2.2.2. TEOREM ([2]): (K, v) değerlendirilmiş bir cisim ve K cisminin bir genişlemesi L olsun. Bu durumda v değerlendirmesi L cismine genişletilebilir.

2.2.3. TANIM: (K, v) değerlendirilmiş cisim ve K cisminin cebirsel bir genişlemesi L olmak üzere v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi v_L olsun. v ve v_L değerlendirmelerinin değer grupları sırasıyla G_v ve G_{v_L}, rezidü cisimleri sırasıyla k_v ve k_{v_L} ise $e = e(v_L / v) = [G_{v_L} : G_v]$ indeksi v_L / v genişlemesinin dallanma indeksi, $f = f(v_L / v) = [k_{v_L} : k_v]$ derecesi v_L / v genişlemesinin rezidü derecesi olarak adlandırılır.

2.2.4. TEOREM ([2]): (K, v) değerlendirilmiş bir cisim ve K cisminin $n.$ dereceden bir genişlemesi L olsun. v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi w olsun. e dallanma indeksi, f rezidü derecesi olmak üzere $e\,f \leq n$ sağlanır.

2.2.5. TANIM: K cisminin bir değerlendirmesi v olsun. K cisminin her L cebirsel genişlemesi için v değerlendirmesinin L cismine bir tek genişlemesi varsa v Henselian değerlendirme olarak adlandırılır.

K cisminin v değerlendirmesinin tek şekilde genişletilebildiği en küçük cisme K cisminin Henselizasyonu denir.

v değerlendirmesinin, K cisminin cebirsel bir genişlemesi olan L cismine bir genişlemesi u olsun. e ve f bu genişlemenin sırasıyla dallanma indeksi ve rezidü derecesi olsun. L cisminin Henselizasyonu $(L)^h$ ve K cisminin Henselizasyonu $(K)^h$

olmak üzere L/K genişlemesinin Henselian hatası $[(L)^h:(K)^h]/ef$ ile tanımlanır ve $d = def((L,u)/(K,v))$ veya $d = def(L/K)$ ile gösterilir.

Eğer $def(L/K) = 1$ ise yani 2.2.4. Teorem'deki eşitsizlik $e\,f = n$ olarak yazılıyorsa L/K genişlemesine hatasız bir genişlemedir denir.

2.3. Transandant Genişlemeler

Bu alt bölümde literatürde bulunan ve transandant genişlemeler tanımlanırken sıkça kullanılan bazı kavramlar ve teoremler verilecektir.

Bu bölümde ve tezin bundan sonraki bölümlerinde; (K,v) değerlendirilmiş bir cisim olmak üzere v değerlendirmesinin $\overline{K}$ cismine genişlemesi $\bar{v}$ ile gösterilecektir.

2.3.1. TANIM: K cisminin bir genişlemesi L olsun. K cismi üzerinde cebirsel olmayan $\alpha \in L$ elemanına K cismi üzerinde transandanttır denir ve $\alpha\, trans/K$ ile gösterilir. En az bir $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde transandant oluyorsa L cismi K cisminin transandant bir genişlemesidir.

K cisminin bir değerlendirmesi v olsun. v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi w olmak üzere $k_w/\,k_v$ genişlemesi bir transandant genişleme ise w ya v değerlendirmesinin bir rezidül transandant genişlemesidir denir.

2.3.2. TANIM: K cisminin bir değerlendirmesi v olsun. $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ bir çift olmak üzere her $\sum_i d_i\,(x-a)^i \in \overline{K}[x]$ için

$$\overline{w}_{(a,\delta)}\left(\sum_i d_i\,(x-a)^i\right) = inf_i\{\bar{v}(d_i) + i\delta\},\quad d_i \in \overline{K}$$

biçiminde tanımlanan $\overline{w}_{(a,\delta)}$ değerlendirmesi $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine bir genişlemesidir ve bu genişleme $\bar{v}$ değerlendirmesinin (a,δ) çifti ile tanımlanan genişlemesi olarak adlandırılır.

$(a,\delta),\ (b,\varepsilon) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftlerinin, $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine aynı genişlemesini tanımlamaları için gerekli ve yeterli koşul $\delta = \varepsilon$ ve $\bar{v}(a-b) \geq \delta$ olmasıdır.

$\overline{K}(x)$ cisminin $\overline{w}_{(a,\delta)}$ değerlendirmesini tanımlayan her $(b,\theta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çifti için $[K(a):K] \leq [K(b):K]$ oluyorsa $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ çiftine $\overline{w}$ değerlendirmesini tanımlayan minimal çift denir.

2.3.3. TANIM: K cisminin Henselian bir değerlendirmesi v olsun. $f(x) \in K[x]$, $f(x) \neq 0$ olan bir polinom göz önüne alınsın. Her $F \in K[x]$ polinomu, $F_i \in K[x]$, $degF_i < degf$ olmak üzere $F = \sum_i F_i f^i$ olarak tek şekilde yazılır ve bu yazılışa F polinomunun f −açılımı denir.

2.3.4. TEOREM ([7]): $\overline{K}$ cisminin $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi $\overline{w}_{(a,\delta)}$ olsun. a elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ olmak üzere her $F = \sum_i F_i f^i \in K[x]$ için $\overline{w}_{(a,\delta)}$ değerlendirmesi

$$\overline{w}_{(a,\delta)}(F) = \min_i\{\bar{v}(F_i(\alpha)) + i\overline{w}_{a,\delta}(f(x))\}$$

biçiminde tanımlanır.

2.3.5. TANIM: K bir cisim ve $p(x) \in K[x]$ asal bir polinom olsun. $0 < d < 1$ olan bir reel sayı olmak üzere $K(x)$ cisminin her $\frac{f(x)}{g(x)} = p(x)^n \frac{m(x)}{n(x)}$, $(m(x), n(x) \in K[x]$, $(m(x), n(x)) = 1$) elemanı için

$$w\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = d^n,\ w(0) = 0 \qquad (\text{veya } w\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \text{n},\ w(0) = \infty\ )$$

biçiminde tanımlanan w değerlendirmesi $K(x)$ cisminin <u>$p(x)$ −adik değerlendirmesi</u> olarak adlandırılır.

2.3.6. LEMMA (Hensel Lemma) ([8]): K cisminin $rankv = 1$ olan bir v değerlendirmesinin değerlendirme halkası O_v, maksimal ideali P_v, rezidü cismi k_v olsun. $f(x) \in O_v[x]$ ve $G, H \in k_v[x]$ aralarında asal polinomlar olmak üzere $f(x)^* = GH$ olsun. Bu durumda $f(x) = g(x)h(x)$ olacak şekilde $g(x), h(x) \in K[x]$, $degG = degg$ polinomları vardır.

2.4. Değerlendirme Halkaları, Bir Değerlendirmenin Rankı

Bu alt bölümde bir değerlendirmenin rankı ve değerlendirme bileşkesi kavramlarının tanımlanışı verilecektir. Bunun için öncelikle değerlendirme halkaları ve place'lerin incelendiği teoremler göz önüne alınacaktır.

2.4.1. ÖNERME ([3]): K cisminin bir değerlendirme halkası A olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $A \subseteq B \subseteq K$ sağlayan her B halkası bir değerlendirme halkasıdır.

ii) B halkasının maksimal ideali P_B, A nın bir asal idealidir.

iii) $\mathrm{P} = \{\rho |\ \rho,\ A$ halkasının bir asal ideali$\}$ ve

$Ɽ = \{B \mid A \subseteq B \subseteq K,\ \ B \text{ alt halka}\}$ olmak üzere $\varphi: Ɽ \rightarrow Ƥ$, $\varphi(B) = P_B$ şeklinde tanımlı φ dönüşümü bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla Ɽ ile Ƥ kümeleri arasında bire-bir eşleme vardır.

2.4.2. TANIM ([3]): (K, v) değerlendirilmiş bir cisim, v nin değerlendirme halkası O_v ve maksimal ideali P_v olsun. $O_v \subseteq B \subseteq K$ sağlayan alt halkaların sayısı ile $(0) \subseteq P \subseteq P_v$ sağlayan asal ideallerin sayısı aynıdır ve bu sayı O_v halkasının rankı olarak adlandırılır.

2.1.4. Önerme, 2.4.1. Önerme ve 2.4.2. Tanım birlikte göz önüne alınarak değerlendirmenin rankı kavramı aşağıdaki sonuç ile yeniden ifade edilebilir.

2.4.3. SONUÇ ([3]): (K, v) değerlendirilmiş bir cisim olsun. G_v değer grubunun isolated alt grupları kümesi ile O_v halkasını kapsayan K cisminin alt halkaları kümesi arasında bire-bir eşleme vardır. Dolayısıyla O_v halkasının rankı ile G_v değer grubunun rankı yani v değerlendirmesinin rankı aynıdır.

2.4.4. TANIM: K ve F iki cisim ve F cebirsel kapalı olsun. $\vartheta: K \rightarrow F \cup \{\infty\}$ dönüşümü

i) $\vartheta^{-1}(F) = V$ bir halkadır.

ii) ϑ dönüşümünün V halkasına kısıtlanışı aşikar olamayan bir homomorfizmadır.

iii) $a \in K$ için $\vartheta(a) = \infty$ ise $\vartheta(a^{-1}) = 0$ dır.

koşullarını sağlıyorsa ϑ dönüşümüne K cisminin bir <u>place'i</u> adı verilir.

$\vartheta^{-1}(F) = V$ halkası bir değerlendirme halkasıdır. $\vartheta^{-1}(F) = V$ değerlendirme halkasının P_V maksimal ideali $\vartheta|_V$ homomorfizmasının çekirdeğidir ve $V/P_V = k_V$ rezidü cismi de F cismine izomorftur. [5]

$\vartheta^{-1}(F) = V$ halkasına <u>ϑ place'ine karşılık gelen değerlendirme halkası</u> adı verilir. Yani her bir place'e karşılık bir değerlendirme halkası vardır. [3]

Ayrıca bir K cisminin bir değerlendirme halkasına karşılık da bir place'in olduğu aşağıdaki önerme ile görülür.

2.4.5. ÖNERME ([5]): K cisminin bir V değerlendirme halkasının maksimal ideali P olsun. Bu durumda her $a \in K$ için

$$\vartheta(a) = \begin{cases} \infty & , \ a \notin V \\ a + P & , \ a \in V \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\vartheta: K \rightarrow V/P \cup \{\infty\}$ dönüşümü K cisminin bir place'idir.

2.4.4. Önerme ve 2.4.5. Önerme ile her place'e karşılık bir değerlendirme olacağı sonucuna da varılır.

2.4.6. ÖNERME ([3]): $\vartheta_1 : K \to F \cup \{\infty\}$ dönüşümü K cisminin bir place'i ve bu place'e karşılık gelen değerlendirme halkası A olsun. F cisminin bir place'i ϑ_2 ise $\vartheta_2 o \vartheta_1$ dönüşümü de K cisminin bir place'idir. $\vartheta_2 o \vartheta_1$ place'ine karşılık gelen B değerlendirme halkası da A halkasının bir alt halkasıdır.

Böylece 2.1.4. Önerme, 2.4.2. Tanım ve 2.4.3. Sonuç birlikte göz önüne alınarak rankı birden büyük olan bu B değerlendirme halkasına karşılık gelen değerlendirmenin rankının birden büyük olduğu görülür. Bu değerlendirmenin iki değerlendirmenin bileşkesi olarak yazılabildiği aşağıdaki tanım ile verilir.

2.4.7. TANIM ([3]): K cisminin $rankv_1 > 1$ olan bir değerlendirmesi v_1 ve K cisminin $A_{v_1} \subseteq A_{v_2}$ olacak şekilde başka bir değerlendirmesi v_2 olsun. K cisminden A_{v_1}/P_{v_1} ve A_{v_2}/P_{v_2} rezidü cisimlerine tanımlı iki place sırasıyla ϑ_1 ile ϑ_2 olsun. Bu durumda A_{v_2}/P_{v_2} cisminin $\vartheta_1 = \vartheta o \vartheta_2$ olacak şekilde bir ϑ place'i vardır. A_{v_2}/P_{v_2} cisminin ϑ place'ine karşılık gelen değerlendirmesi v olmak üzere v_1 değerlendirmesi v_2 ile v değerlendirmelerinin bileşkesi olarak adlandırılır ve $v_1 = v_2 o v$ ile gösterilir. Ayrıca $rankv_1 = rankv_2 + rankv$ eşitliği sağlanır.

Buradaki değerlendirme bileşkesi kavramı fonksiyon bileşkesi kavramından farklıdır. Sadece benzer gösterime sahiptir.

K cisminin değer grubu G_v olan bir v değerlendirmesi ile k_v rezidü cisminin değer grubu G_u olan bir u değerlendirmesi göz önüne alınsın. v değerlendirmesinin değerlendirme halkası O_v olmak üzere a^* ile $a \in O_v$ elemanının rezidüsü yani $\varphi : O_v \to (O_v/P_v) = k_v$ doğal dönüşüm altındaki görüntüsü gösterilsin. $vou = w$ bileşke değerlendirmesi K cisminin değer grubu $G_v \times G_u$ olan bir değerlendirmesidir ve $a \in O_v$ için $(vou)(a) = w(a) = (v(a), u(a^*))$ eşitliği ile tanımlanır. ($a \notin O_v$ ise $v(a) = v(b)$ eşitliğini sağlayan bir $b \in K$ göz önüne alınarak a^* yerine $(a/b)^*$ yazılır.)

2.4.8. TANIM: K cismi üzerinde değer grubu $G = < a >$ olan bir değerlendirme v olsun. v değerlendirmesinin değerlendirme halkası O_v, bu halkanın tek maksimal ideali P_v ve $\pi \in K$ olmak üzere $v(\pi) = a$ olsun. Bu durumda $P_v = (\pi)$ biçimindedir ve π elemanına O_v halkasının birimsel elemanı denir.

2.4.9. LEMMA ([22]): K bir cisim ve $s \in \mathbb{R}_+$ olsun. K cisminin değer grubu $s\mathbb{Z}$ olan ayrık bir değerlendirmesi w olmak üzere k_w rezidü cisminin değer grubu G olan bir değerlendirmesi u olsun. w değerlendirmesinin $w(\pi) = s$ sağlayan bir birimsel elemanı π olsun. $\beta \in K, \beta \neq 0$ için $\beta/\pi^{w(\beta)s^{-1}}$ elemanının k_w −rezidüsü β^* olmak üzere $v = wou$ bileşke değerlendirmesi $v(\beta) = (w(\beta), u(\beta^*))$ şeklinde tanımlıdır ve v değerlendirmesi K cisminin değer grubu $s\mathbb{Z} \times G$ olan bir değerlendirmesidir.

Rankı birden büyük olan bir değerlendirmenin değer grubu için tanımlanan ve en çok kullanılan sıralama bağıntısı aşağıdaki tanım ile verilir.

2.4.10. TANIM: A ve B sıralı iki küme olsun. $\forall\, (x, y), (a, b) \in A \times B$ için $(x, y) \leq (a, b) \Leftrightarrow x \leq a$ veya ($x < a$ ve $y \leq b$) şeklinde tanımlı $\leq$ sıralama bağıntısı <u>Lexicographically sıralama</u> olarak adlandırılır.

BÖLÜM 3

DEĞERLENDİRİLMİŞ BİR K CİSMİNİN CEBİRSEL GENİŞLEMELERİ

Bir K cisminin değerlendirmelerinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine rezidül transandant genişlemelerinin elde edilmesi önemlidir. Bu konuda yapılmış olan çalışmalarda bir rezidül transandant genişlemenin bir çift yardımıyla tanımlanabileceğini sonucuna ulaşılmıştır. Buradaki önemli bir problem en uygun çiftin belirlenmesidir. Bu aşamada bir rezidül transandant genişlemenin rezidü cismi ve değer grubunun bir cebirsel genişlemeye bağlı olarak yazılabileceğinin gösterilmiştir. Konuyla ilgili incelemeler yapılmaya başlandığında ise bazı özel durumlarla karşılaşılmış ve bir takım sınıflandırmaların yapılması gerekmiştir. Dolayısıyla cebirsel genişlemelerin yapısının belirlenmesinde önemli bir yere sahip olan, değerlendirilmiş cismin elemanlarına ait sabitler, tame genişlemeleri ve seçkin ikiler kavramları ve bu kavramların kendi aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

3.1. ve 3.2. Alt Bölümlerinde bu kavramlar ile ilgili literatürde bulunan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bir v değerlendirmesinin rankı 1 iken yukarda bahsedilen çalışmalar ile ilgili tüm işlemler kolaylıkla yapılırken rankın birden büyük olması durumunda daha detaylı incelemelerin yapılması gerekmektedir. Dolayısıyla 3.3 Alt Bölümünde bir değerlendirmenin rankının 2 olması durumu göz önüne alınarak tame genişlemeleri ve sabitlerin tanımlanışı ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Daha sonra rankın n olması durumu için bir genelleme elde edilmiştir.

3.1. Sabitler ve Tame Genişlemeleri

Aşağıdaki ilk tanımda sabitler, ikinci tanımda ise özel bir cebirsel genişleme olan tame genişlemeleri kavramları verilecektir.

3.1.1. TANIM: K cisminin Henselian bir değerlendirmesi v olsun. $\alpha \in \overline{K} \backslash K$, K cismi üzerinde ayrılabilir bir eleman ise α elemanı için belirlenen sabitler $w_K(\alpha)$ Krasner Sabiti, $\Delta_K(\alpha)$ ve $\delta_K(\alpha)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$w_K(\alpha) = max\{\bar{v}(\alpha - \alpha') \big| \alpha'$ α nın K- eşleniği, $\alpha' \neq \alpha\}$

$\Delta_K(\alpha) = min\{\bar{v}(\alpha - \alpha') \big| \alpha'$ α nın K- eşleniği$\}$

$\delta_K(\alpha) = sup\{\bar{v}(\alpha - \beta) | \beta \in \overline{K}, [K(\beta): K] < [K(\alpha): K]\}$

3.1.2. TANIM: v K cisminin bir değerlendirmesi, K cisminin cebirsel bir genişlemesi L ve v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi u olsun. e ve f bu genişlemenin sırasıyla dallanma indeksi ve rezidü derecesi olmak üzere

i) $[L: K] = ef$

ii) k_u, k_v cisminin ayrılabilir bir genişlemesidir.

iii) $chark_v \nmid e$

koşulları sağlanıyorsa L/K genişlemesine tame genişlemesi denir. K cisminin her cebirsel genişlemesi bir tame genişlemesi ise K cismine tame cismi adı verilir.

Bundan sonra ise sabitlerin; tame genişlemelerini karakterize etmekte, cebirsel genişlemelerde karşılaşılan yapıların belirlenmesinde ve seçkin ikili kavramının tanımlanışında büyük bir rol oynadığı gösteren ve [3], [11], [12] kaynaklarında bulunan bazı lemma ile teoremler sırasıyla verilecektir. Öncelikle iki cismin karşılaştırılmasını sağlayan Krasner Lemma göz önüne alınabilir.

3.1.3. LEMMA (Krasner Lemma) ([3]): v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve K cismi üzerinde ayrılabilir bir eleman $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ olsun. $\bar{v}(\alpha - \beta) > w_K(\alpha)$ olacak biçimde $\beta \in \overline{K}$ elemanı varsa $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ dır.

3.1.4. TEOREM ([11]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve K cisminin bir tame genişlemesi $K(\alpha)$ olsun. $[K(\alpha): K] = n > 1$ ve v değerlendirmesinin $K(\alpha)$ cismine bir genişlemesi u olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\Delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$

ii) r sayısı $r\bar{v}(\alpha - a) = v(b) \in G_v$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olmak üzere u değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla $G_u = G_v + \mathbb{Z}\bar{v}(\alpha - a)$ ve $k_u = k_v(((\alpha - a)^r/b)^*)$ olacak şekilde bir $a \in K$ elemanı vardır.

3.1.5. TEOREM ([12]): K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi v olsun. K cisminin $[K(\alpha): K] = n > 1$ olan hatasız, ayrılabilir bir genişlemesi $K(\alpha)$ olmak üzere v değerlendirmesinin $K(\alpha)$ cismine bir genişlemesi u olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $u(\alpha) = \delta_K(\alpha)$

ii) r sayısı $u(\alpha^r) = v(b) \in G_v$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olmak üzere u değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla $G_u = G_v + \mathbb{Z}u(\alpha)$ ve $k_u = k_v(((\alpha^r)/b)^*)$ olur.

3.2. Seçkin İkililer ve Seçkin Zincirler

Aşağıdaki tanımla verilen seçkin ikililer öncelikle cebirsel genişlemelerin rezidü cisimlerinin ve değer gruplarının belirlenmesinde kullanılmıştır.

3.2.1. TANIM: v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $a, b \in \bar{K}$ olsun.

i) $degb > dega$

ii) $\bar{v}(b - a) = \delta_K(b)$

iii) $c \in \bar{K},\ degc < dega$ için $\bar{v}(b - c) < \bar{v}(b - a)$

koşulları sağlanıyorsa (b, a) ikilisine bir seçkin ikili denir.

3.2.2. TANIM: v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m \in \bar{K}$ olsun. $1 \le i \le m - 1$ için (b_i, b_{i+1}) bir seçkin ikili ve $b_m \in K$ oluyorsa $b = b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ zincirine b elemanının m uzunluğunda tam seçkin zinciri denir.

Bir seçkin zincirdeki elemanların δ_K sabitlerinin karşılaştırılması aşağıdaki lemma ile verilebilir.

3.2.3. LEMMA ([17]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim olsun. (θ, θ_1) ve $(\theta_{1,}\theta_2)$ iki seçkin ikili ise $\delta_K(\theta) > \delta_K(\theta_1) = \bar{v}(\theta - \theta_2)$ sağlanır.

Ayrıca; $\theta \in \bar{K} \setminus K$ elemanının tam seçkin bir zinciri $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ ise $\delta_K(\theta) > \delta_K(\theta_1) > \dots > \delta_K(\theta_{r-1})$ olur.

Bir cebirsel elemanın iki farklı zincirindeki elemanların derecelerinin ve δ_K sabitlerinin karşılaştırılması aşağıdaki lemma ile verilebilir.

3.2.4. TEOREM ([17]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim olsun. $\theta \in \bar{K} \setminus K$ elemanının tam seçkin iki zinciri $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ ve $\theta = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ olsun. Bu durumda $r = s$ dir ve $1 \leq i \leq s$ için $[K(\theta_i): K] = [K(\eta_i): K]$ ve $\delta_K(\theta_i) = \delta_K(\eta_i)$ sağlanır.

Bir tame genişlemesi göz önüne alındığında bir seçkin zincirdeki elemanların sağladığı bazı özellikler aşağıdaki teorem ile ortaya konmuştur. Bu özellikler içinde en önemlisi birbirini kapsayan cebirsel genişlemelerin elde edilmesidir.

3.2.5. TEOREM ([13]): v K cisminin bir Henselian değerlendirmesi ve K cisminin $\bar{K}$ içinde kalan herhangi sonlu, ayrılabilir bir genişlemesi L olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) L/K bir tame genişlemesidir.

ii) $\alpha \in L \backslash K$ elemanı için $\bar{v}(\alpha - \beta) = w_K(\alpha)$ olacak şekilde $[K(\beta): K] < [K(\alpha): K]$ sağlayan bir $\beta \in K(\alpha)$ elemanı vardır.

iii) Her $\alpha \in L \backslash K$ elemanı için $\bar{v}(\alpha - \beta) = w_K(\alpha)$ olacak şekilde $[K(\beta): K] < [K(\alpha): K]$ sağlayan bir $\beta \in L$ elemanı vardır.

iv) Her $\alpha \in L \backslash K$ elemanının, $K(\alpha_0) \supset K(\alpha_1) \supset \cdots \supset K(\alpha_r)$ olan ve her $0 \leq i \leq r - 1$ için $\delta_K(\alpha_i) = w_K(\alpha_i)$ özelliklerini sağlayan bir $\alpha = \alpha_{0,}\alpha_{1,\dots,}\alpha_r$ tam seçkin zinciri vardır.

v) L/K genişlemesi için; her $0 \leq i \leq m - 1$ için $\delta_K(\theta_i) = w_K(\theta_i)$ eşitliği sağlanacak ve her θ_i elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir olacak şekilde bir $\theta = \theta_{0,}\theta_{1,\dots,}\theta_m$ tam seçkin zincirine sahip bir θ ilkel elemanı vardır.

3.3. Bir K Cisminin $rankv > 1$ Olan Bir v Değerlendirmesine Göre Sabitlerin Belirlenmesi ve Tame Genişlemeleri

Bu alt bölümde 2012 yılında yayınlanmış olan "Some Constants and Tame Extensions According to a Valuation of a Field with $rankv = 2$" adlı makalede bulunan bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir v değerlendirmesine göre tame genişlemeleriyle ve $\alpha \in \overline{K}\backslash K$ elemanının v değerlendirmesi yardımıyla elde edilen sabitlerinin belirlenmesiyle ilgili teoremlere ve ispatlarına yer verilmiştir.

Daha sonra K cisminin $rankv = n$ olan bir v değerlendirmesi göz önüne alınarak tame genişlemesi ile ilgili yapılan çalışma için bir genelleme elde edilmiştir.

3.3.1.TEOREM: (K, v_1) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, L/K sonlu bir genişleme v_1 değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi z_1 olsun. k_{v_1} rezidü cisminin bir değerlendirmesi v_2 ve v_2 değerlendirmesinin k_{z_1} cismine bir genişlemesi z_2 olsun. v_1 ile v_2 değerlendirmelerinin bileşkesi $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi z= $z_1 o z_2$ değerlendirmesi olsun. e_1 ile e_2 sırasıyla $(L, z_1)/(K, v_1)$ ile $(k_{z_1}, z_2)/(k_{v_1}, v_2)$ genişlemelerinin dallanma indeksleri olmak üzere $(e_1, e_2) = 1$ olsun. Eğer $(L, z)/(K, v)$ genişlemesi bir tame genişlemesi ise $(L, z_1)/(K, v_1)$ ve $(k_{z_1}, z_2)/(k_{v_1}, v_2)$ genişlemeleri de birer tame genişlemesidir.

Kanıt:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash, "z_1"] \arrow[d, dash] & k_{z_1} \arrow[r, dash, "z_2"] \arrow[d, dash] & k_{z_2} = k_z \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash, "v_1"'] & k_{v_1} \arrow[r, dash, "v_2"'] & k_{v_2} = k_v
\end{tikzcd}$$

$(L, z)/(K, v)$ genişlemesinin dallanma indeksi ve rezidü derecesi sırasıyla e ve f olsun. $(L, z_1)/(K, v_1)$ genişlemesi ile $(k_{z_1}, z_2)/(k_{v_1}, v_2)$ genişlemesinin rezidü dereceleri sırasıyla f_1 ile f_2 olsun. $k_{z_2} = k_z$, $k_{v_2} = k_v$ ve $f = f_2$ eşitliklerinin sağlandığı açıktır. $(L, z)/(K, v)$ tame genişlemesi olduğundan aşağıdakiler sağlanır:

i) $[L: K] = ef$ (3.3.1)

ii) k_v rezidü cisminin karakteristiği e dallanma indeksini bölmez.

iii) k_z rezidü cismi, k_v rezidü cisminin ayrılabilir bir genişlemesidir.

$e = [G_z : G_v]$ olduğundan bir $b \in L$ için $e.z(b) \in G_v$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayıdır. 2.4.7. Tanım göz önüne alındığında

$$e.z(b) = e.\big(z_1(b), z_2(b^*)\big) \in G_v = G_{v_1} \times G_{v_2}$$

sağlanır. Sonuç olarak $e.z_1(b) \in G_{v_1}$ ve $e.z_2(b^*) \in G_{v_2}$ olur. Buradan da e dallanma indeksi e_1 ile e_2 tarafından bölünür. Hipotezden $e = e_1.e_2$ olduğu görülür. Bu eşitlik ile $f = f_2$ eşitliği (3.3.1) ifadesinde yerlerine yazıldığında

$$[L:K] = e_1.e_2.f_2 \tag{3.3.2}$$

elde edilir. 2.2.5. Tanım göz önüne alındığında $(k_{z_1}, z_2)/(k_{v_1}, v_2)$ genişlemesinin hatası d_2 olmak üzere $[k_{z_1} : k_{v_1}] = f_1 = e_2.f_2.d_2$ olarak yazılır. $d_2 \neq 1$ olduğu varsayılsın. $\frac{f_1}{d_2} = e_2.f_2$ eşitliği (3.3.2) ifadesinde yerine yazıldığında

$$e.f = e_1.f_1.\frac{1}{d_2} \tag{3.3.3}$$

olduğu görülür. $(L, z_1)/(K, v_1)$ genişlemesinin hatası d_1 ile gösterilsin. Bu durumda

$$e.f = e_1.f_1.d_1 \tag{3.3.4}$$

dir. (3.3.3) ve (3.3.4) eşitliklerinin sağ tarafları birbirine eşitlendiğinde $d_1 = \frac{1}{d_2}$ elde edilir. Buradan d_1 in bir tam sayı olmadığı sonucuna ulaşılır. Bu da bir çelişkidir. O halde $d_2 = 1$ olmalıdır. Böylece $f_1 = e_2.f_2$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik (3.3.2) ifadesinde yerine yazıldığında istenilen $e.f = e_1.f_1$ eşitliği elde edilir.

$k_{z_2} = k_z$, $k_{v_2} = k_v$

eşitliklerinden k_{z_2} cisminin, k_{v_2} cisminin ayrılabilir bir genişlemesi olduğu açıktır. $chark_{v_2} = ckark_v$ olduğundan, $e = e_1.e_2$ eşitliği ile $ckark_v \nmid e$ olduğu birlikte göz önüne alındığında k_{v_2} cisminin karakteristiğinin e_2 yi bölmediği görülür. Bir cismin karakteristiği ya sıfır ya da asal sayı olduğundan $chark_{v_1} = 0$ ya da $chark_{v_1} = p$ asal sayı olacaktır. Bu durumda kanıtın tamamlanması için iki durumun ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir.

I. Durum: $chark_{v_1} = 0$ olsun. Böylece k_{v_1} mükemmel cisim olacağından k_{v_1} in tüm genişlemeleri ayrılabilir genişlemedir. Dolayısıyla k_{z_1}, k_{v_1} cisminin ayrılabilir bir genişlemesi olur ve $chark_{v_1} \nmid e$ olduğu açıktır.

II. Durum: $chark_{v_1} = p$ asal olsun. Bu durumda [3] den $k_{v_1} = k_{v_2}$ ve $k_{z_1} = k_{z_2}$ dir. Dolayısıyla k_{z_1}, k_{v_1} cisminin ayrılabilir bir genişlemesidir ve $chark_{v_1} \nmid e$ olur.

Böylece $(L,z_1)/(K,v_1)$ ve $(k_{z_1},z_2)/(k_{v_1},v_2)$ genişlemelerinin tame genişlemeleri olduğu görülür.

3.3.2.TEOREM: (K,v_1) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, k_{v_1} rezidü cisminin bir değerlendirmesi v_2 olmak üzere v_1 ile v_2 değerlendirmelerinin bileşkesi $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesi olsun. v_1 değerlendirmesinin $\bar{K}$ cismine bir genişlemesi $\overline{v_1}$ ve v_2 değerlendirmesinin $\overline{k_{v_1}}$ cismine bir genişlemesi $\overline{v_2}$ olmak üzere $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesinin $\bar{K}$ cismine bir genişlemesi $\bar{v} = \overline{v_1} o \overline{v_2}$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \bar{K} \backslash K$ elemanının v değerlendirmesine göre belirlenen sabitleri

$$\Delta_{(K,v)}(\alpha) = \left(\Delta_{(K,v_1)}(\alpha)\, ,\, \Delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

$$w_{(K,v)}(\alpha) = \left(w_{(K,v_1)}(\alpha)\, ,\, w_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

$$\delta_{(K,v)}(\alpha) = \left(\delta_{(K,v_1)}(\alpha)\, ,\, \delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

eşitliklerini sağlar.

Kanıt: $\alpha \in \bar{K} \backslash K$ olsun. 2.3.6. Lemma ve 2.4.11. Tanım kullanılarak $\Delta_{(K,v)}(\alpha)$ sabiti

$$\begin{aligned}\Delta_{(K,v)}(\alpha) &= min\{\bar{v}(\alpha - \alpha') | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}\}\\ &= min\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha'), \overline{v_2}((\alpha - \alpha')^*) | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}\}\\ &= min\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha'), \overline{v_2}(\alpha^* - (\alpha')^*) | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}\}\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\Delta_{(K,v_1)}(\alpha) = min\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha') | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}\}$$

ve

$$\Delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*) = min\left\{\overline{v_2}(\alpha^* - (\alpha')^*) \middle| (\alpha')^*, \alpha^* \text{ ın } k_{v_1} - \text{eşleniği}\right\}$$

olmak üzere

$$\Delta_{(K,v)}(\alpha) = \left(\Delta_{(K,v_1)}(\alpha)\, ,\, \Delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde Krasner sabiti $w_{(K,v)}(\alpha)$

$$\begin{aligned}w_{(K,v)}(\alpha) &= max\{\bar{v}(\alpha - \alpha') | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}, \alpha' \neq \alpha\}\\ &= max\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha'), \overline{v_2}((\alpha - \alpha')^*) | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}, \alpha' \neq \alpha\}\\ &= max\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha'), \overline{v_2}(\alpha^* - (\alpha')^*) | \alpha',\ \alpha \text{ nın } K - \text{eşleniği}, \alpha' \neq \alpha\}\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$w_{(K,v_1)}(\alpha) = \ max\{(\overline{v_1}(\alpha - \alpha')|\alpha',\ \alpha$ nın $K -$ eşleniği, $\alpha' \neq \alpha\ \}$

ve

$w_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*) = max\{\ \overline{v_2}(\alpha^* - (\alpha')^*)\big|(\alpha')^*, \alpha^*$ ın $k_{v_1} -$ eşleniği, $(\alpha')^* \neq \alpha^*\}$

olmak üzere

$$w_{(K,v)}(\alpha) = \left(w_{(K,v_1)}(\alpha)\ ,\ w_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

şeklinde elde edilir.

v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesini tanımlayan (a, δ) minimal çiftinin belirlenmesinde kullanılan $\delta_{(K,v)}(\alpha)$ sabiti de

$$\begin{aligned}\delta_{(K,v)}(\alpha) &= sup\{\bar{v}(\alpha - \beta)|\ \beta \in \overline{K},\ [K(\beta): K] < [K(\alpha): K]\}\\ &= sup\{(\overline{v_1}(\alpha - \beta), \overline{v_2}((\alpha - \beta)^*)|\ \beta \in \overline{K},\ [K(\beta): K] < [K(\alpha): K]\}\\ &= \ sup\{(\overline{v_1}(\alpha - \beta), \overline{v_2}((\alpha^* - \beta^*)|\ \beta \in \overline{K},\ [K(\beta): K] < [K(\alpha): K]\}\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\delta_{(K,v_1)}(\alpha) = sup\{(\overline{v_1}(\alpha - \beta)|\ \beta \in \overline{K},\ [K(\beta): K] < [K(\alpha): K]\}$$

ve

$$\delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*) = sup\{\ \overline{v_2}(\alpha^* - \beta^*)\big|\beta^* \in \overline{k_{v_1}}, \left[\overline{k_{v_1}}(\beta^*): k_{v_1}\right] < \left[\overline{k_{v_1}}(\alpha^*): k_{v_1}\right]\}$$

olmak üzere

$$\delta_{(K,v)}(\alpha) = \left(\delta_{(K,v_1)}(\alpha)\ ,\ \delta_{(k_{v_1},v_2)}(\alpha^*)\right)$$

olarak elde edilir.

3.3.3. TEOREM: (K, v_1) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, L/K sonlu bir genişleme, $i = 2, \dots, n$ için $k_{v_{i-1}}$ rezidü cisminin bir değerlendirmesi v_i ve $v_1, v_2, \dots, v_n$ değerlendirmelerinin bileşkesi $v = v_1 o v_2 o \dots o v_n$ olsun. v_1 değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi z_1, $i = 2, \dots, n$ için v_i değerlendirmesinin $k_{z_{i-1}}$ rezidü cismine bir genişlemesi z_i olmak üzere $v = v_1 o v_2 o \dots o v_n$ değerlendirmesinin L cismine rankı n olan bir genişlemesi $z = z_1 o z_2 o \dots o z_n$ olsun. $(L, z_1)/(K, v_1)$ genişlemesinin dallanma indeksi e_1 ve $i = 2, \dots, n$ için $(k_{z_{i-1}}, z_i)/(k_{v_{i-1}}, v_i)$ genişlemesinin dallanma indeksi e_i olmak üzere $m, k = 1, \dots, n$ ve $m \neq k$ için $(e_m, e_k) = 1$ olsun. Bu durumda $(L, z)/(K, v)$ genişlemesi bir tame genişlemesi ise $(L, z_1)/(K, v_1)$ genişlemesi ve her $i = 2, \dots, n$ için $(k_{z_{i-1}}, z_i)/(k_{v_{i-1}}, v_i)$ genişlemesi de bir tame genişlemesidir.

Kanıt:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, dash, "z_1"] \arrow[d, dash] & k_{z_1} \arrow[r, dash, "z_2"] \arrow[d, dash] & k_{z_2} \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, dash] & k_{z_{n-1}} \arrow[r, dash, "z_n"] \arrow[d, dash] & k_{z_n} = k_z \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash, "v_1"] & k_{v_1} \arrow[r, dash, "v_2"] & k_{v_2} \arrow[r, dash, dotted] & k_{v_{n-1}} \arrow[r, dash, "v_n"] & k_{v_n} = k_v
\end{tikzcd}$$

$(L,z)/(K,v)$ genişlemesinin dallanma indeksi ve rezidü derecesi sırasıyla e ve f olsun. $(L,z_1)/(K,v_1)$ genişlemesinin rezidü derecesi f_1 ve $i = 2,\dots,n$ için $(k_{z_{i-1}}, z_i)/(k_{v_{i-1}}, v_i)$ genişlemesinin rezidü derecesi f_i olsun. $k_{z_n} = k_z$, $k_{v_n} = k_v$ ve $f = f_n$ eşitliklerinin sağlandığı açıktır. $(L,z)/(K,v)$ bir tame genişlemesi olduğundan aşağıdakiler sağlanır:

1. $[L:K] = ef$ (3.3.5)
2. k_v rezidü cisminin karakteristiği e dallanma indeksini bölmez.
3. k_z rezidü cismi, k_v rezidü cisminin ayrılabilir bir genişlemesidir.

$e = [G_z: G_v]$ olduğundan $e.z(b) \in G_v$ olacak şekilde bir $b \in L$ elemanı vardır. b nin z_1 değerlendirmesine göre rezidüsü $b^* = b_1$ ve $i = 2,\dots,n-1$ için $b_{i-1} \in k_{z_{i-1}}$ elemanının z_i değerlendirmesine göre rezidüsü b_i ile gösterilsin. 2.4.7.Tanımdan

$$e.z(b) = e.\big(z_1(b), z_2(b_1), \dots, z_n(b_{n-1})\big) \in G_v = G_{v_1} \times G_{v_2} \times \dots \times G_{v_n}$$

yazılır. Yani

$$e.z_1(b) \in G_{v_1},\ e.z_2(b_1) \in G_{v_2}, \dots,\ e.z_n(b_{n-1}) \in G_{v_n}$$

olur. Böylece $i = 1,\dots,n$ için $e_i \big| e$ olduğu görülür. $m,k = 1,\dots,n$ ve $m \neq k$ için $(e_m, e_k) = 1$ olduğu göz önüne alındığında $e = e_1.e_2 \dots .e_n$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu eşitlik ile $f = f_2$ eşitliği (3.3.5) ifadesinde yerlerine yazıldığında

$$[L:K] = e.f = e_1.e_2 \dots .e_n.f_n \qquad (3.3.6)$$

elde edilir. $(k_{z_{n-1}}, z_n)/(k_{v_{n-1}}, v_n)$ genişlemesinin hatası d_n olmak üzere

$$[k_{z_{n-1}} : k_{v_{n-1}}] = f_{n-1} = e_n.f_n.d_n$$

olarak yazılır. $\frac{f_{n-1}}{d_n} = e_n.f_n$ eşitliği (3.3.6) ifadesinde yerine yazıldığında

$$[L:K] = e.f = e_1.e_2 \dots .e_{n-1}.\frac{f_{n-1}}{d_n} \qquad (3.3.7)$$

bulunur. $(k_{z_{n-2}}, z_{n-1})/(k_{v_{n-2}}, v_{n-1})$ genişlemesinin hatası d_{n-1} olmak üzere $[k_{z_{n-2}}: k_{v_{n-2}}] = f_{n-2} = e_{n-1}.f_{n-1}.d_{n-1}$ biçimindedir. Bu uygulamaya diğer genişlemeler için de benzer şekilde devam edildiğinde

$e.f = e_1.f_1.d_1 = e_1.f_1.\frac{1}{d_2}.\frac{1}{d_3}...\frac{1}{d_n}$

eşitliğine ulaşılır. Buradan $d_1 = \frac{1}{d_2}.\frac{1}{d_3}...\frac{1}{d_n}$ yazılır. $i = 1, ..., n$ için $d_i \in \mathbb{Z}$ olduğundan $d_2 = d_3 = \cdots = d_n = 1$ ve dolayısıyla $d_1 = 1$ olduğu görülür. Böylece $i = 2, ..., n$ için $[k_{z_{i-1}}: k_{v_{i-1}}] = f_{i-1} = e_i.f_i$ olur ve $[L: K] = e_1.f_1$ eşitliği sağlanır.

$k_{z_n} = k_z$ ve $k_{v_n} = k_v$ olduğundan k_{z_n}/k_{v_n} ayrılabilir bir genişlemedir. Ayrıca $chark_{v_n} = chark_v$ eşitliği göz önüne alındığında

$chark_{v_n} \nmid e \Rightarrow chark_{v_n} \nmid e_1.e_2 \dots .e_n \Rightarrow chark_{v_n} \nmid e_n$

olduğu görülür. Kanıtın tamamlanması için iki alt durum incelenecektir.

I. Durum: $chark_{v_{n-1}} = 0$ ise $k_{v_{n-1}}$ mükemmel bir cisim olur. Dolayısıyla $k_{z_{n-1}}/k_{v_{n-1}}$ ayrılabilir bir genişlemedir ve $chark_{v_{n-1}} \nmid e_{n-1}$ olduğu açıktır.

II. Durum: $chark_{v_{n-1}} = p$ asal olsun. Bu durumda $k_{v_{n-1}} = k_v$ ve $k_{z_{n-1}} = k_z$ olur. Dolayısıyla $k_{z_{n-1}}/k_{v_{n-1}}$ ayrılabilir bir genişlemedir ve

$chark_{v_{n-1}} = chark_v \nmid e \Rightarrow chark_{v_{n-1}} \nmid e_1.e_2 \dots .e_n \Rightarrow chark_{v_{n-1}} \nmid e_{n-1}$

olduğu görülür. $i = n-2, n-1, ..., 2, 1$ için benzer şekilde devam edilerek $chark_{v_i} \nmid e_i$ olduğu ve k_{z_i}/k_{v_i} nin ayrılabilir bir genişleme olduğu görülür. Böylece $(L, z_1)/(K, v_1)$ genişlemesinin ve $i = 2, ..., n$ için $(k_{z_{i-1}}, z_i)/(k_{v_{i-1}}, v_i)$ genişlemesinin bir tame genişlemesi olduğu elde edilmiş olur. □

K cisminin $rankv = 2$ olan bir olan bir $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesi göz önüne alındığında, 3.1. ve 3.2. Alt Bölümlerinde verilen tüm teoremlerin (K, v_1) ile (k_{v_1}, v_2) değerlendirilmiş cisminin tame genişlemeleri için ve $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesine göre yazılan sabitler için kullanılabilir olduğu 3.3. Alt Bölümünde ispatlamış olduğumuz teoremlerin bir sonucudur. Benzer durum $rankv = n$ olan $v = v_1 o v_2 o \dots o v_n$ değerlendirmesi göz önüne alındığında da geçerlidir.

BÖLÜM 4

DEĞERLENDİRİLMİŞ BİR K CİSMİNİN REZİDÜL TRANSANDANT GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde rezidül transandant genişlemeler ile ilgili literatürde bulunan kavramlar ve teoremler ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Daha sonra bu konuda tarafımızca yapılmış olan orijinal çalışmalar ispatları ile verilmiştir.

4.1. Rezidül Transandant Genişlemeler, Lifting Polinomları, Seçkin İkililer

4.1. Alt Bölümde ilk olarak bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri ve lifting polinomları ile ilgili bazı tanım ve teoremlere, daha sonra da bu kavramların seçkin ikililer ile ilişkilerini gösteren teoremlere yer verilmiştir.

İlk iki teorem; sabitleri ve seçkin ikililere ait özellikleri kullanarak bir K cisminin cebirsel genişlemeleri üzerindeki değerlendirmelerin rezidü cisimlerinin, değer gruplarının ve genişlemelerin derecelerinin karşılaştırılmasında birçok çalışmaya kaynak olmuştur.

4.1.1. TEOREM ([14]): K cismi $rankv = 1$ olan ayrık bir v değerlendirmesine göre tam bir cisim olsun. $a \in \overline{K} \setminus K$ olmak üzere $\bar{v}(a - b) > \delta_K(a)$ ifadesini sağlayan her $b \in \overline{K}$ elemanı için; v değerlendirmesinin $K(a)$ ve $K(b)$ cisimlerine genişlemeleri sırasıyla u ve w olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $G_u \subseteq G_w$

ii) $k_u \subseteq k_w$

iii) $[K(a): K] \mid [K(b): K]$

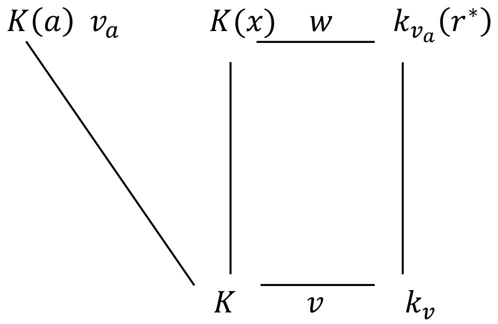
4.1.2. TEOREM ([15]): K cisminin Henselian bir değerlendirmesi v olsun. $[K(c):K] < [K(a):K]$ olan her $c \in \overline{K}$ elemanı için $\bar{v}(a-b) > \bar{v}(a-c)$ sağlayan iki eleman $a, b \in \overline{K}$ olsun. v değerlendirmesinin $K(a)$ ve $K(b)$ cisimlerine genişlemeleri sırasıyla u ve w olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

i) $G_u \subseteq G_w$, $\quad k_u \subseteq k_w$

iii) $[K(a):K] \,\big|\, [K(b):K]$

iv) $\mathrm{def}(u/v) \,\big|\, \mathrm{def}(w/v)$

Bir K cisminin bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $w_{(a,\delta)}$ rezidül transandant genişlemesinin tanımlanışı ve $k_{w_{(a,\delta)}}$ rezidü cisminin bir cebirsel genişleme yardımıyla yazılabildiği aşağıdaki teorem ile verilir.



4.1.3. TEOREM ([16]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi $w_{(a,\delta)}$ olsun. $f(x) = Irr(a, K)$, $degf = n$ ve $w_{(a,\delta)}\big(f(x)\big) = \lambda$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i) Her $F = \sum_i F_i f^i \in K[x]$, $F_i \in K[x]$, $degF_i < degf$ polinomu için

$w_{(a,\delta)}(F) = \min_i \{\bar{v}\big(F_i(a)\big) + i\lambda\}$

biçimindedir.

ii) e sayısı, $e\lambda \in \bar{v}(K(a))$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı, $h(x) \in K[x]$ derecesi n den küçük olan ve $w_{(a,\delta)}\big(h(x)\big) = e\lambda$ eşitliğini sağlayan bir polinom ve v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine genişlemesi v_a olsun. Bu durumda $r = f(x)^e/h(x) \in K(x)$ elemanının $w_{(a,\delta)}$ -rezidüsü r^* olmak üzere r^*, k_v rezidü cismi üzerine transandanttır ve $k_{w_{(a,\delta)}} = k_{v_a}(r^*)$ eşitliği sağlanır.

$G \in k_{v_a}[r^*]$ monik polinomuna karşılık bir $g \in K[x]$ polinomunun olduğu yani lifting polinom kavramı aşağıdaki tanım ile verilecektir.

4.1.4. TANIM ([14]): K cisminin Henselian bir değerlendirmesi v olsun. $w_{(a,\delta)}, f, h, e$ ve λ 4.1.3. Teorem'deki gibi olmak üzere $G \in k_{v_a}[r^*]$ monik bir polinom ve $degG = m$ olsun. $g \in K[x]$ polinomu

i) $degg = em(degf)$

ii) $w_{(a,\delta)}(g) = mw_{(a,\delta)}(h) = me\lambda$

iii) $(g/h^m)^* = G$

koşullarını sağlıyorsa; g polinomuna G polinomunun $w_{(a,\delta)}$ değerlendirmesine göre bir liftingi denir. Eğer $G = r^*$ ise g polinomu G nin aşikar liftingidir.

Lifting polinomunun kökleri ve bu köklerin sabitleri bir değerlendirmenin rezidül transandant genişlemesinin tanımlanmasında özellikle de bir (a, δ) minimal çiftin belirlenmesinde kullanılmaktadır. Lifting polinomunun bir c kökü için (c, a) seçkin ikilisinin yazılıyor olması ve $\delta = \delta_K(c)$ olduğunun belirlenmesinin ardından yapılan çalışmalarda lifting polinomunun kökleri için yazılan seçkin ikilerin ve sabitlerin de önemli bir yere sahip olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu kavramların konudaki önemini içeren bazı önemli teoremlere aşağıda sırasıyla yer verilecektir.

Bir lifting polinomunun ve köklerinin sağladığı özellikleri veren aşağıdaki önerme bu konuyla ilgili literatürde yer alan en temel önermelerden birisidir.

4.1.5. ÖNERME ([19]): K cisminin Henselian bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi $w_{(a,\delta)}$ olsun. $v_a, f(x), \lambda, e$ ile $h(x)$ 4.1.3.Teoremdeki gibi ve $G \in k_{v_a}[r^*]$ monik, derecesi m olan ve r^* ile bölünemeyen bir polinom olsun. $g(x) \in K[x]$ monik polinomu, G polinomunun $w_{(a,\delta)}$ değerlendirmesine göre bir liftingi ise aşağıdakiler sağlanır:

i) $\bar{v}(g(a)) = em\lambda = w_{(a,\delta)}(g(x))$

ii) g(x) polinomunun her θ_i kökü için $\bar{v}(\theta_i - a) \leq \delta$ dır.

iii) $g(x)$ polinomunun $\bar{v}(\theta - a) = \delta$ olacak şekilde bir θ kökü vardır.

iv) Eğer θ (iii) deki gibi ise $\bar{v}(f(\theta)) = w_{(a,\delta)}(f(x))$ dır.

v) Eğer θ (iii) deki gibi ise $Q((f(\theta)^e/h(a)\ )^*) = 0$ dır.

4.1.6. TEOREM ([14]): K cisminin Henselian bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi $w_{(a,\delta)}$ olsun. v_a, $f(x)$, λ, e ile $h(x)$ 4.1.3.Teoremdeki gibi ve $G \in k_{v_a}[r^*]$ monik, asal ve r^* ile bölünemeyen bir polinom olsun. Bu durumda G polinomunun herhangi bir $g(x) \in K[x]$ liftingi de asaldır.

Böylece 4.1.6. Teorem ile asal bir polinoma, katsayıları farklı bir cisimde olan asal bir polinomun karşılık gelebileceği görülmektedir. Aşağıdaki teorem ise bir lifting polinomunun δ_K sabitinin minimal çiftin belirlenmesindeki önemini göstermektedir.

4.1.7. TEOREM ([19]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi $w_{(a,\delta)}$ ve v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine bir genişlemesi v_a olsun. r^* dan farklı bir $G \in k_{v_a}[r^*]$ asal, monik polinomunun $w_{(a,\delta)}$ değerlendirmesine göre bir liftingi $g(x)$ ve ξ, $g(x)$ polinomunun herhangi bir kökü olsun. Bu durumda

i) $g(x)$ polinomu G nin aşikar olmayan bir liftingi ise $\delta_K(\xi) = \delta$ dır.

ii) $g(x)$ polinomu G nin aşikar bir lifting ise $\delta_K(\xi) \leq \delta$ dır.

4.1.8. SONUÇ ([19]): (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, $w_{(a,\delta)}$ ve $g(x)$ 4.1.7. Teoremdeki gibi olsun. $g(x)$ polinomunun $\bar{v}(\theta - a) = \delta$ eşitliğini sağlayan bir kökü θ olmak üzere derecesi θ elemanının K cismi üzerindeki derecesinden küçük olan herhangi bir $p(x) \in K[x]$ polinomu için $\overline{w}_{(a,\delta)}(p(x)) = \bar{v}(p(\theta))$ eşitliği sağlanır.

Bir lifting polinomunun bir kökü göz önüne alınarak, cebirsel bir genişlemenin değer grubunun ve rezidü cisminin yazılışı aşağıdaki lemma ile verilir.

4.1.9. LEMMA ([19]): θ ve $w_{(a,\delta)}$ 4.1.8. Sonuç'taki gibi ve $v_a, f(x), \lambda, e$ ve $h(x)$ 4.1.3.Teorem'deki gibi olmak üzere v değerlendirmesinin $K(\theta)$ cismine bir genişlemesi u olsun. Bu durumda

$G_u = G_{v_a} + \mathbb{Z}\lambda$ ve $k_u = k_{v_a}\left(\left(\frac{f(\theta)^e}{h(a)}\right)^*\right)$

eşitlikleri sağlanır.

4.1.10. LEMMA ([17]): (K,v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, (K,v) üzerinde asal, monik iki polinom $p(x)$ ve $q(x)$ olsun. $degp = m$, $degq = n$ olmak üzere $p(x)$ ve $q(x)$ polinomlarının birer kökü sırasıyla θ ve β ise

$$\bar{v}\big(p(\beta)\big) = \frac{m}{n}\bar{v}\big(q(\theta)\big)$$

eşitliği sağlanır.

4.1.11. LEMMA ([18]): (K,v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve (θ,α) bir seçkin ikili olsun. Bu durumda

i) $(\alpha,\delta_K(\theta))$ bir minimal çifttir.

ii) $\delta = \delta_K(\theta)$ ve $\bar{K}(x)$ cisminin, (α,δ) minimal çifti ile tanımlanan değerlendirmesi $\bar{w}_{(\alpha,\delta)}$ olmak üzere derecesi $deg\theta$ dan küçük olan herhangi bir $p(x) \in K[x]$ polinomu için $\bar{w}_{(\alpha,\delta)}\big(p(x)\big) = \bar{v}(p(\theta))$ eşitliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem ise bir seçkin ikilideki elemanları bulunduran basit genişlemelerin üzerindeki değerlendirmelerin değer grupları ve rezidü cisimleri arasındaki ilişkileri vermektedir. Ayrıca kanıtında minimal çift ve lifting polinomunun bir kökünün göz önüne alındığı 4.1.9. Lemma'nın sonuçları ile bu teoremin sonuçları benzerlik göstermektedir.

4.1.12. TEOREM ([17]): (K,v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, (θ,α) bir seçkin ikili ve α elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ olsun. v değerlendirmesinin $K(\theta)$ ve $K(\alpha)$ cisimlerine genişlemeleri sırasıyla u ve w olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $G_u = G_w + \mathbb{Z}\bar{v}\big(f(\theta)\big)$

ii) $h(x) \in K[x], degh < deg\alpha$ ve $e\bar{v}\big(f(\theta)\big) = \bar{v}\big(h(\alpha)\big) \in G_w$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı e olmak üzere $k_u = k_w\left(\left(\frac{f(\theta)^e}{h(\alpha)}\right)^*\right)$ dır.

iii) $\mathrm{def}(K(\theta)/K) = \mathrm{def}(K(\alpha)/K)$

.

4.2. Seçkin İkililer Yardımıyla Değer Grupları ve Rezidü Cisimlerinin Yazılışı

Bu bölümde önceki bölümlerde bulunan tanım ve teoremlerden yararlanılarak seçkin zincirler ve lifting polinomları ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Bu bölümde ilk olarak; (K,v) değerlendirilmiş bir cisim olmak üzere $a \in \bar{K}\backslash K$ elemanının bir seçkin zinciri göz önüne alınmıştır. Zincirdeki elemanların v

değerlendirmesine göre belirlenen δ_K sabitleri ve minimal polinomları yardımıyla $K(a)$ cisminin v_a değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi yazılmıştır.

Ayrıca $a \in \bar{K} \backslash K$ ve $b \in \bar{K} \backslash K$ elemanlarının $a = a_0, a_1, \dots, a_n$ ve $b = b_0, b_1, \dots, b_n$ seçkin zincirleri yardımıyla $K(a_i, b_i)$ cisimlerinin $v_{a_i b_i}$ değerlendirmelerinin değer gruplarının ve rezidü cisimlerinin karşılaştırıldığı bir önerme verilmiştir. Daha sonra lifting polinomları ve bu polinomların kökleri yardımıyla yazılan seçkin ikililerinin sağladığı bazı özelliklerin elde edildiği bir önerme verilmiştir.

Bu önermeler; $K(x)$ cisminin bir $w_{(a,\delta)}$ değerlendirmesinin $K(x, y)$ cismine rezidül transandant genişlemesinin değer grubu ve rezidü cisminin yazılışında göz önüne alınabilir. Ayrıca bir K cisminin $rankv = 1$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $ranku = 2$ olan bir u genişlemesinin tanımlanmasında da kullanılabilir.

4.2.1. ÖNERME: (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve $a \in \bar{K} \backslash K$ elemanının tam seçkin bir zinciri $a = a_0, a_1, \dots, a_n$ olsun. $i = 0, \dots, n$ olmak üzere $f_i = Irr(a_i, K)$ ve $degf_i = m_i$ ve v değerlendirmesinin $K(a_i)$ cisimlerine genişlemeleri v_{a_i} olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $G_{v_a} = G_v + \mathbb{Z}\{m_1\delta_K(a) + m_2\delta_K(a_1) + \cdots + m_n\delta_K(a_{n-1})\}$

ii) $k_{v_a} = k_v\left(\left(\left(\frac{(f_1(a))}{(f_0(a_1))^{m_1/m_0}}\right)^{e_1}\right)^*, \left(\left(\frac{(f_2(a_1))}{(f_1(a_2))^{m_2/m_1}}\right)^{e_2}\right)^*, \dots, \left(\left(\frac{(f_n(a_{n-1}))}{(f_{n-1}(a_n))^{m_n/m_{n-1}}}\right)^{e_n}\right)^*\right)$

Kanıt: i) 4.1.12. Teorem göz önüne alındığında $i = 0, \dots, n-1$ olmak üzere

$$G_{v_{a_i}} = G_{v_{a_{i+1}}} + \mathbb{Z}\bar{v}(f_{i+1}(a_i)) \tag{4.2.1}$$

olduğu biliniyor. v Henselian değerlendirme ve $i = 0, \dots, n$ için $degf_i = m_i$ olduğundan

$$\bar{v}\big(f_i(a)\big) = m_i\bar{v}(a - a_i) \tag{4.2.2}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (a, a_1) ve (a_1, a_2) seçkin ikili olduğundan, 2.1.2. Önerme (ii) ve 3.2.3. Lemma göz önüne alındığında

$$\bar{v}(a - a_2) = \bar{v}(a_1 - a_2) = \delta_K(a_1) \tag{4.2.3}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek $i = 3, \dots, n$ için

$$\bar{v}(a - a_i) = \bar{v}(a_{i-1} - a_i) = \delta_K(a_{i-1}) \tag{4.2.4}$$

olduğu da görülür. (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4) ifadeleri birlikte göz önüne alınarak (4.2.1) eşitliğinde yerlerine yazıldığında ve (4.2.1) eşitliği G_{v_a} için yeniden düzenlendiğinde

$G_{v_a} = G_v + \mathbb{Z}\{m_1\bar{v}(a-a_1) + m_2\bar{v}(a-a_2) + \cdots + m_n\bar{v}(a-a_n)\}$

$\quad = G_v + \mathbb{Z}\{m_1\delta_K(a) + m_2\delta_K(a_1) + \cdots + m_n\delta_K(a_{n-1})\}$

eşitliği elde edilir.

ii) 4.1.12. Teorem'den $i = 1, \dots, n-1$ için e_i sayısı, $h_i(x) \in K[x]$, $degh_i < dega_i$ olmak üzere

$e_i\bar{v}(f_i(a_{i-1})) = \bar{v}(h_i(a_i)) \in G_{v_{a_i}}$

olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olmak üzere

$$k_{v_{a_{i-1}}} = k_{v_{a_i}}\left(\left(\frac{f_i(a_{i-1})^{e_i}}{h_i(a_i)}\right)^*\right) \tag{4.2.5}$$

yazılır. 4.1.10. Lemma göz önüne alındığında

$e_i\bar{v}(f_i(a_{i-1})) = \bar{v}(h_i(a_i)) = e_i\frac{m_i}{m_{i-1}}\bar{v}(f_{i-1}(a_i))$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\left(\frac{f_i(a_{i-1})^{e_i}}{h_i(a_i)}\right)^* = \left(\left(\frac{f_i(a_{i-1})}{(f_{i-1}(a_i))^{\frac{m_i}{m_{i-1}}}}\right)^{e_i}\right)^*$$

olduğu görülür. Böylece (4.2.5) eşitliği k_{v_a} için yeniden düzenlenirse

$$k_{v_a} = k_v\left(\left(\left(\frac{(f_1(a))}{(f_0(a_1))^{m_1/m_0}}\right)^{e_1}\right)^*, \left(\left(\frac{(f_2(a_1))}{(f_1(a_2))^{m_2/m_1}}\right)^{e_2}\right)^*, \dots, \left(\left(\frac{(f_n(a_{n-1}))}{(f_{n-1}(a_n))^{m_n/m_{n-1}}}\right)^{e_n}\right)^*\right)$$

eşitliği elde edilir.

4.2.2. ÖNERME: (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, $a_0, a_1, \dots, a_n$ ve $b_0, b_1, \dots, b_n$ tam seçkin iki zincir olsun. $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $G_{v_{a_ib_i}} \subseteq G_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$ ve $k_{v_{a_ib_i}} \subseteq k_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$ sağlanır.

Kanıt: 4.1.12. Teorem'den $i = 1, \dots, n$ için

$$G_{v_{a_i}} \subseteq G_{v_{a_{i-1}}}, \quad G_{v_{b_i}} \subseteq G_{v_{b_{i-1}}} \tag{4.2.6}$$

ve

$$k_{v_{a_i}} \subseteq k_{v_{a_{i-1}}}, \quad k_{v_{b_i}} \subseteq k_{v_{b_{i-1}}} \tag{4.2.7}$$

ifadelerinin sağlandığı biliniyor. $K(a_i, b_i)$ cisminin elemanları a_i ve b_i cinsinden yazıldığından sadece a_i ve b_i elemanlarının görüntüsünün $G_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$ grubunda olduğunun ve a_i^* ile b_i^* rezidülerinin de $k_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$ cisminde olduğunun gösterilmesi kanıtın tamamlanması için yeterlidir. (4.2.6) ve (4.2.7) ifadeleri göz önüne alındığında sırasıyla istenen

$\bar{v}(b_i) \in G_{v_{b_i}} \subseteq G_{v_{b_{i-1}}} \subseteq G_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}, \quad \bar{v}(a_i) \in G_{v_{a_i}} \subseteq G_{v_{a_{i-1}}} \subseteq G_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$

ve

$b_i^* \in k_{v_{b_i}} \subseteq k_{v_{b_{i-1}}} \subseteq k_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$, $a_i^* \in k_{v_{a_i}} \subseteq k_{v_{a_{i-1}}} \subseteq k_{v_{a_{i-1}b_{i-1}}}$

ifadeleri elde edilir.

4.2.3. ÖNERME: (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine (a, δ) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi w olsun. $G \in k_{v_a}[r^*]$ asal, monik bir polinom ve $k_{v_a}(r^*)$ cismi üzerindeki $G-$adik değerlendirme w_1 2.3.5. Tanım'daki gibi olsun. $K(x)$ cisminin rankı 2 olan bir değerlendirmesi $u = w \circ w_1$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) G polinomunun iki liftingi g ve g_1 olmak üzere $\bar{v}(b-a) = \bar{v}(b_1 - a) = \delta$ olacak şekilde g ve g_1 polinomlarının birer kökü sırasıyla b ile b_1 olsun. (β, b) ile (β, b_1) iki seçkin ikili ise $\bar{v}\big(g(\beta)\big) = \bar{v}(g_1(\beta))$ eşitliği sağlanır.

ii) $Irr(\beta, K) = \varphi(x)$ olmak üzere $\bar{v}\big(\varphi(b)\big) = \bar{v}\big(\varphi(b_1)\big)$ dir.

Kanıt:

$$\begin{tikzcd}
K(x) \arrow[r, dash, "w"] \arrow[d, dash] & k_{v_a}(r^*) \arrow[r, dash, "w_1"] \arrow[d, dash] & k_{w_1} \arrow[dl, dash] \\
K \arrow[r, dash, "v"] & k_v &
\end{tikzcd}$$

i) $f(x) = Irr(a, K)$ olmak üzere $t(x) \in K[x]$ polinomu w değerlendirmesinin birimsel bir elemanı olsun. 2.4.9. Lemma göz önüne alınarak $K(x)$ cisminin rankı 2 olan bir değerlendirmesi

$u(F) = \big(w(F), w_1((F/t^{w(F)})^*)\big)$

ile tanımlanır.

Ayrıca u değerlendirmesi, $g(x) \in K[x]$ lifting polinomu kullanılarak yani $F \in K[x]$ için $F = \sum_i F_i g^i$ $g-$ açılımı göz önüne alınarak

$$u(F) = \inf_i (w(F_i) + iw(g), i) \tag{4.2.8}$$

şeklinde de tanımlanır. Benzer şekilde $g_1(x) \in K[x]$ lifting polinomu kullanılarak da u değerlendirmesi tanımlanır. Yani $F = \sum_j A_j {g_1}^j \in K[x]$ için

$$u(F) = \inf_j \big(w(A_j) + jw(g_1), j\big) \tag{4.2.9}$$

dır. (4.2.8) ve (4.2.9) ifadeleri birbirine eşit ve $degg = degg_1$ olduğundan $\exists i = j$ için

$w(F_i) + iw(g) = w\big(A_j\big) + jw(g_1)$

olur. β, b ve $b_1 \in \overline{K}$ elemanları varsayımı sağlıyor olsun. 4.1.11. Lemma (ii) den

$w(F_i) = \bar{v}(F_i(\beta))$

ve

$w(A_i) = \bar{v}(A_i(\beta))$

olduğu görülür. Lifting tanımı da göz önüne alındığında

$$w(F_i) = \bar{v}\big(F_i(\beta)\big) = w(A_i) = \bar{v}(A_i(\beta)) \qquad (4.2.10)$$

eşitliği elde edilir. F polinomunun g ve g_1 açılımlarından

$F(\beta) = \sum_i F_i(\beta)(g(\beta))^i = \sum_i A_i(\beta)(g_1(\beta))^i$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}\bar{v}\big(F(\beta)\big) &= \inf_i \Big(\bar{v}\big(F_i(\beta)\big) + i\bar{v}\big(g(\beta)\big)\Big)\\ &= \inf_i\big(\bar{v}(A_i(\beta)) + i\bar{v}(g_1(\beta))\big)\end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.2.10) ifadesi göz önüne alındığında

$$\bar{v}\big(g(\beta)\big) = \bar{v}(g_1(\beta)) \qquad (4.2.11)$$

eşitliği elde edilir.

ii) $Irr(\beta, K) = \varphi(x)$ ve $deg\varphi = s$ olsun. 4.1.10. Lemma'dan

$s\bar{v}\big(g_1(\beta)\big) = degg_1\bar{v}\big(\varphi(b_1)\big)$

$s\bar{v}\big(g(\beta)\big) = degg\bar{v}\big(\varphi(b)\big)$

yazılır. (4.2.11) ifadesi yardımıyla

$\bar{v}\big(\varphi(b)\big) = \bar{v}\big(\varphi(b_1)\big)$

eşitliğinin sağlandığı görülür. □

[25] de bulunan aşağıdaki önerme ile bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x,y)$ cismine rezidül transandant genişlemesinin, rezidü cisminin ve değer grubunun yazılışı verilmektedir. 4.2.2. Önerme ile 4.2.1. Önerme birlikte göz önüne alınarak rezidü cismi ve değer grubu uygun iki elemanın seçkin zincirlerindeki elemanların sabitlerine ve minimal polinomlarına bağlı olarak yeniden yazılabilir.

4.2.4. ÖNERME: (K, v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir $(a, \delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çifti ile tanımlanan rezidül transandant genişlemesi w olsun. $[K(a,b){:}K] = [K(a){:}K][K(b){:}K]$ olmak üzere w değerlendirmesinin $K(x,y)$ cismine bir $(b, \mu) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çifti ile tanımlanan rezidül transandant genişlemesi u olsun.

$f(x) = Irr(a,K), w(f) = \gamma_1$

ve v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine bir genişlemesi v_a olsun. e_1 sayısı, $e_1\gamma_1 \in G_{v_a}$ sağlayan en küçük pozitif tam sayı ve $h_1(x) \in K[x]$ polinomu, $degh_1 < degf$ olan ve

$v_a(h_1(a_1)) = e_1\gamma_1$

eşitliğini sağlayan bir polinom olsun. $r = f^{e_1}/h_1$ elemanının w −rezidüsü

$(f^{e_1}/h_1)^* = r^*$ ile gösterilsin.

$g(y) = Irr(b,K),\ u(g) = \gamma_2$

ve v değerlendirmesinin $K(b)$ cismine bir genişlemesi v_b olsun. e_2 sayısı, $e_2\gamma_2 \in G_{v_b}$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı ve $h_2(y) \in K[Y]$ polinomu, $degh_2 < degg$ olan ve

$v_b(h_2(b)) = e_2\gamma_2$

eşitliğini sağlayan bir polinom olsun. $s = g^{e_2}/h_2$ elemanının u −rezidüsü $(g^{e_2}/h_2)^* = s^*$ ile gösterilsin.

Her $F \in K[x,y]$ polinomu

$F = \sum_{i,j} F_{ij} f^i g^j,\ F_{ij} \in K[x,y],\ deg_x F_{ij} < degf, deg_y F_{ij} < degg$

olarak tek şekilde yazılır ve v değerlendirmesinin $K(a,b)$ cismine bir genişlemesi v_{ab} olmak üzere u değerlendirmesi

$u(F) = \mathrm{in}_{i,j} f(v_{ab}(F_{ij}(a,b) + i\gamma_1 + j\gamma_2)$

biçiminde tanımlanır. u değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla $G_u = G_{v_{ab}} + \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ ve $k_u = k_{v_{ab}}(r^*, s^*)$ biçimindedir.

4.2.5. ÖNERME: (K,v) Henselian değerlendirilmiş bir cisim ve v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir $(a,\delta) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çifti ile tanımlanan rezidül transandant genişlemesi w olsun. w değerlendirmesinin $K(x,y)$ cismine bir $(b,\mu) \in \overline{K} \times G_{\bar{v}}$ minimal çifti ile tanımlanan rezidül transandant genişlemesi u olsun. $f, g, h_1, h_2, a, b, \delta, \mu, w, u$ 4.2.4. Önerme'deki olsun. $r^* \neq G(r^*)$ asal, monik polinomunun bir liftingi $p(x)$ polinomu ve $s^* \neq H(s^*)$ asal, monik polinomunun bir liftingi $t(y)$ polinomu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $degG = m_1$ ve $degH = m_2$ olmak üzere

$\bar{v}(p(a)) = e_1 m_1 \gamma_1 = u(p(x))$ ve $\bar{v}(t(b)) = e_2 m_2 \gamma_2 = u(t(x))$

eşitlikleri sağlanır.

ii) $p(x)$ polinomunun her θ_i kökü için $\bar{v}(\ \theta_i - a) \leq \delta$ dır ve $t(y)$ polinomunun her ρ_j kökü için $\bar{v}(\rho_j - b) \leq \mu$ dir.

iii) $p(x)$ polinomunun $\bar{v}(\ \theta - a) = \delta$ olacak şekilde bir θ kökü vardır. $t(y)$ polinomunun $\bar{v}(\rho - b) = \mu$ olacak şekilde bir ρ kökü vardır.

iv) θ ve ρ (iii) deki gibi ise $\bar{v}(f(\theta)) = u(f(x))$ ve $\bar{v}(g(\rho)) = u(g(y))$ olur.

v) θ ve ρ (iii) deki gibi ise $G((f(\theta)^{e_1}/h_1(a)\ )^*) = 0$ ve $H((g(\rho)^{e_2}/h_2(b)\ )^*) = 0$ dır.

Kanıt: $degp = e_1 m_1 degf$ ve $degt = e_2 m_2 degg$ olduğundan $p(x)$ ve $t(x)$ polinomlarının $f - g$ açılımları sırasıyla

$$p(x) = \left[p_{em}(x)f(x)^{e_1 m_1} + p_{e_1 m_1 - 1}(x)f(x)^{e_1 m_1 - 1} + \cdots + p_0(x)\right]\left(g(y)\right)^0,$$

$$p_{e_1 m_1}(x) = 1$$

ve

$$t(x) = \left[t_{em}(y)g(y)^{e_2 m_2} t_{e_2 m_2 - 1}(y)g(y)^{e_2 m_2 - 1} + \cdots + t_0(y)\right]\left(f(x)\right)^0,$$

$$t_{e_2 m_2}(y) = 1$$

şeklindedir. Buradan [19] da bulunan Proposition.2.3. kanıtına benzer şekilde devam edilerek istenilen ifadeler elde edilir.

4.3. Bir K Cisminin $rankv = 2$ Olan Bir v Değerlendirmesinin $K(x)$ Cismine Rezidül Transandant Genişlemeleri ve Lifting Polinomları

Bu bölümde bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $rankw = 2$ olan bir w rezidül transandant genişlemesinin tanımlandığı ve lifting polinomlarının sağladığı bazı özellikler ile ilgili elde edilen sonuçları içeren 2011 yılında yayınlanmış olan “On Residual Transcendental Extensions of a Valuation with rankv = 2” adlı makalede bulunan teoremler ve kanıtları yer almaktadır.

4.3.1. Teorem, 4.3.2. Teorem, 4.3.3. Teorem, 4.3.4. Teorem’de aşağıdaki notasyonlar geçerlidir.

(K, v_1) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, k_{v_1} rezidü cisminin bir değerlendirmesi v_2 olmak üzere v_1 ile v_2 değerlendirmelerinin bileşkesi $v = v_1 o v_2$ olsun. v_1 değerlendirmesinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine (a_1, δ_1) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi w_1 ve v_2 değerlendirmesinin k_{w_1} rezidü cismine

(a_2, δ_2) minimal çifti ile tanımlanan bir genişlemesi w_2 olmak üzere $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir genişlemesi $w = w_1 o w_2$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
K(x) \arrow[r, dash, "w_1"] \arrow[d, dash] & k_{w_1} \arrow[r, dash, "w_2"] \arrow[d, dash] & k_{w_2} = k_w \arrow[d, dash] \\
K \arrow[r, dash, "v_1"'] & k_{v_1} \arrow[r, dash, "v_2"'] & k_{v_2} = k_v
\end{tikzcd}$$

$f(x) = Irr(a, K), w_1(f) = \gamma_1$

ve $\overline{v_1}$ değerlendirmesinin $K(a_1)$ cismine kısıtlanışı v_{a_1} olsun. e_1 sayısı $e_1\gamma_1 \in G_{v_{a_1}}$ sağlayan en küçük pozitif tam sayı ve $h_1(x) \in K[x]$ polinomu, $degh_1 < degf$ olan ve

$v_{a_1}\big(h_1(a_1)\big) = e_1\gamma_1$

eşitliğini sağlayan bir polinom olsun. f^{e_1}/h_1 elemanının w_1 −rezidüsü $(f^{e_1}/h_1)^* = Y$ ile gösterilsin.

$g(Y) = Irr\big(a_2, k_{v_1}\big), w_2(g) = \gamma_2$

ve $\overline{v_2}$ değerlendirmesinin $k_{v_1}(a_2)$ cismine kısıtlanışı v_{a_2} olsun. e_2 sayısı $e_2\gamma_2 \in G_{v_{a_2}}$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı ve $h_2(Y) \in k_{v_1}[Y]$ polinomu, $degh_2 < degg$ olan ve

$v_{a_2}\big(h_2(a_2)\big) = e_2\gamma_2$

eşitliğini sağlayan bir polinom olsun. g^{e_2}/h_2 elemanının w_2 −rezidüsü $(g^{e_2}/h_2)^* = U$ ile gösterilsin.

4.3.1.TEOREM ([24]): $g(Y) \in k_{v_1}[Y]$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $G(x) \in K[x]$ ve $\lambda = (\delta_1, \delta_2)$ olsun. Bu durumda (c, λ), (K, v) Henselian değerlendirilmiş cismine göre bir minimal çift olacak şekilde G polinomunun bir c kökü vardır ve w değerlendirmesi, v değerlendirmesi ile (c, λ) çifti yardımıyla tanımlanır.

Bir lifting polinomu ve bu polinomun bir kökü göz önüne alınarak bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $rankw = 2$ olan bir w rezidül transandant genişlemesinin tanımlanışı aşağıdaki teorem ile verilmiştir. Bu teorem bu tezin ana sonuçlarından biridir.

4.3.2.TEOREM: $Irr(a_2, k_{v_1}) = g(Y) \in k_{v_{a_1}}[Y]$ ve $g(Y)$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $G(x) \in K[x]$ olsun. $G(x)$ polinomunun, $\lambda = (\delta_1, \delta_2) \in G_{\bar{v}}$ elemanı ve v değerlendirmesi ile w değerlendirmesini tanımlayan bir kökü c olsun. $F(x) \in K[x]$ polinomunun G −açılımı $F(x) = \sum_i F_i(x)G(x)^i$ ise w değerlendirmesi

$$w(F(x)) = \inf_i \left(\overline{v_1}(F_i(a_1)) + i.e_1.degg.\gamma_1, w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(a_1)}\right)^*_{w_1}\right) + i.\gamma_2 \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Kanıt: $G_{w_1} = G_{v_{a_1}} + \mathbb{Z}.\gamma_1$ ve $G_{w_2} = G_{v_{a_2}} + \mathbb{Z}.\gamma_2$ olmak üzere 2.4.7. Tanım göz önüne alındığında w değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla

$G_w = G_{w_1} \times G_{w_2}$ ve $k_w = k_{w_2} = k_{v_{a_2}}[U]$

olur. $g(Y)$ polinomunun bir liftingi $G(x)$ olduğundan aşağıdakiler sağlanır:

$degG = e_1.degg.degf$

$w_1(G) = e_1.degg.\gamma_1$

$\left(\frac{G}{(h_1)^{degg}}\right)^*_{w_1} = g$

$g(Y)$ polinomunun, w_2 değerlendirmesine göre bir $H(U) \in k_{v_{a_2}}[U]$ polinomunun bir liftingi olduğu varsayılabilir. Böylece

$degg = e_2.degH.degg,$

$w_2(g) = e_2.degH.\gamma_2$,

$\left(\frac{g}{(h_2)^{degH}}\right)^*_{w_2} = H$

eşitlikleri sağlanır. Buradan $e_2 = 1$ olduğu görülür ve $G(x) \in K[x]$ polinomunun w değerlendirmesi altındaki görüntüsü

$$w(G) = (w_1(G), w_2(g)) = (e_1.degg.\gamma_1, \gamma_2) \qquad (4.3.1)$$

olarak yazılır.

$\bar{v}$ değerlendirmesinin $K(c)$ cismine kısıtlanışı v_c olmak üzere e sayısı $e.w(G) \in G_{v_c}$ sağlayan en küçük pozitif tam sayı olsun.

$G_{v_{a_1}} \times G_{v_{a_2}} \subseteq G_{v_c}$, $e_1\gamma_1 \in G_{v_{a_1}}$ ve $\gamma_2 \in G_{v_{a_2}}$

ifadeleri göz önüne alındığında

$w(G) = (e_1.degg.\gamma_1, \gamma_2) \in G_{v_c}$

yani $e = 1$ olduğu görülür.

Her $F(x) \in K[x]$ polinomunun G −açılımı

$F(x) = F(x) = \sum_i F_i(x)G(x)^i, F_i(x) \in K[x], \ degF_i(x) < degG(x)$

olmak üzere

$$w(F(x)) = \inf_i \{w(F_i(x)) + i.w(G(x))\} \tag{4.3.2}$$

biçimindedir. [14] dan $w_1(F_i(x)) = w_1(F_i(a_1))$ dır ve böylece 2.1.5. Önerme'den $\frac{F_i(x)}{F_i(a_1)} \in O_{w_1}$ yani $\left(\frac{F_i(x)}{F_i(a_1)}\right)^*_{w_1} \neq 0$ olur. Buradan (4.3.1) eşitliği de göz önüne alınarak

$$w(F(x)) = \inf_i \left\{\left(w_1(F_i(x)), w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(a_1)}\right)^*_{w_1}\right)\right) + i.(e_1.degg.\gamma_1, \gamma_2)\right\}$$

$$= \inf_i \left(\overline{v_1}(F_i(a_1)) + i.e_1.degg.\gamma_1, w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(a_1)}\right)^*_{w_1}\right) + i.\gamma_2\right) \tag{4.3.3}$$

elde edilir. Ayrıca 4.1.8. Sonuç ve [17] dan

$\overline{v_1}(F_i(a_1)) = \overline{v_1}(F_i(c))$

olur. O halde (4.3.3) eşitliği

$$w(F(x)) = \inf_i \left(\overline{v_1}(F_i(c)) + i.e_1.degg.\gamma_1, w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c)}\right)^*_{w_1}\right) + i.\gamma_2\right)$$

şeklinde de yazılabilir.

Lifting polinomlarının minimal çiftin belirlenmesindeki önemi göz önüne alınarak, v değerlendirmesinin rankının 2 olması durumunda rezidül transandant genişlemenin tanımlanmasında büyük bir kolaylık sağlayacak olan aşağıdaki teorem kanıtlanacaktır.

4.3.3 TEOREM: $Irr(a_2, k_{v_1}) = g(Y) \in k_{v_{a_1}}[Y]$ ve $g(Y)$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $G(x) \in K[x]$ olsun. $J(U) \in k_{v_{a_2}}[U]$ polinomunun w_2 değerlendirmesine göre bir liftingi $T(Y) \in k_{v_{a_1}}[Y]$ olmak üzere $T(Y) \in k_{v_{a_1}}[Y]$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi de $P(x) \in K[x]$ olsun. Bu durumda $P(x)$, $J(U)$ polinomunun w değerlendirmesine göre bir liftingi olur.

Kanıt: 4.1.4. Tanım kullanılarak

$degT = e_2.degg.degJ,$

$w_2(T) = e_2.degJ.\gamma_2 ,$

$$\left(\frac{T}{(h_2)^{degJ}}\right)^*_{w_2} = J \tag{4.3.4}$$

ve

$degP = e_1.degf.degT,$

$w_1(P) = e_1.degT.\gamma_1,$

$$\left(\frac{P}{(h_1)^{degT}}\right)^*_{w_1} = T \tag{4.3.5}$$

eşitlikleri elde edilir. 4.3.2. Teorem'in kanıtından $e = e_2 = 1$ olduğu bilindiğinden

$$degP = e_1.degf.degg.degJ = degG.degJ = e.degG.degJ \tag{4.3.6}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik ile birlikte $g(Y)$ polinomunun bir liftinginin $G(x)$ olduğu da göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} w(P) &= \big(w_1(P), w_2(T)\big) \\ &= (e_1.degT.\gamma_1, degJ.\gamma_2) \\ &= (e_1.degf.degg.degJ, degJ.\gamma_2) \\ &= e.degJ.(w_1(G), w_2(g)) \\ &= e.degJ.w(G) \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

elde edilir. [14] dan

$w(G) = \bar{v}\big(h(c)\big)$

olacak şekilde bir $h(x) \in K[x]$, $degh < degG$ polinomu vardır. Buradan

$w(h) = (e_1.degG.\gamma_1, \gamma_2) = (w_1\big({h_1}^{degg}\big), w_2(h_2))$

yazılır. Böylece

$w_1(h) = w_1\big({h_1}^{degg}\big)$

ve

$$\left(\frac{h}{{h_1}^{degg}}\right)^*_{w_1} = h_2 \tag{4.3.8}$$

ifadeleri elde edilir. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitlikleri birlikte (4.3.8) ifadesi de göz önüne alındığında

$$J = \left(\frac{\left(\frac{P}{(h_1)^{degT}}\right)^*_{w_1}}{(h_2)^{degJ}} \right)^*_{w_2} = \left(\frac{\left(\frac{P}{(h_1{}^{degg})^{degJ}}\right)^*_{w_1}}{\left(\left(\frac{h}{h_1{}^{degg}}\right)^{degJ}\right)^*_{w_1}} \right)^*_{w_2} = \left(\frac{P}{h^{degJ}}\right)^*_w \tag{4.3.9}$$

olduğu görülür. Böylece (4.3.6), (4.3.7) ve (4.3.9) ifadelerine göre $P(x)$, $J(U)$ polinomunun w değerlendirmesine göre bir lifting polinomudur.

Bir rezidül transandant genişlemeyi tanımlayan minimal çiftin belirlenmesinde ve w rezidül transandant genişlemesinin değer grubu ve rezidü cisminin belirlenmesinde lifting polinomunun köklerinin göz önüne alındığı biliniyor. Dolayısıyla $rankv = 2$ durumu için bir lifting polinomunun bir köküne karşılık gelen sabitler ile ilgili aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

4.3.4. TEOREM: $Irr(a_2, k_{v_1}) = g(Y) \in k_{v_{a_1}}[Y]$ ve $g(Y)$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi olan $G(x) \in K[x]$ polinomunun bir kökü c olsun. Bu durumda c elemanının v değerlendirmesine göre belirlenen sabitleri

$$\Delta_{(K,v)}(c) = \left(\Delta_{(K,v_1)}(c)\,,\, \Delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$$

$$w_{(K,v)}(c) = \left(w_{(K,v_1)}(c)\,,\, w_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$$

$$\delta_{(K,v)}(c) = \left(\delta_{(K,v_1)}(c)\,,\, \delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$$

biçimindendir.

Kanıt: 4.1.6. Teorem'den dolayı $G(x)$ asal bir polinom, dolayısıyla $G(x) = Irr(c, K)$ olur. $g(Y)$ polinomunun bir liftinginin $G(x)$ olduğu ve [24] göz önüne alınarak ve 2.3.6. Lemma kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Delta_{(K,v)}(c) &= min\{\bar{v}(c-c') | c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği} \}\\
&= min\{(\overline{v_1}(c-c'), \overline{v_2}((c-c')^*) | c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği} \}\\
&= min\{(\overline{v_1}(c-c'), \overline{v_2}(a_2 - a_2') \mid c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği},\\
&\qquad\qquad a_2',\ a_2 \text{ nin } k_v - \text{eşleniği} \}
\end{aligned}$$

Böylece

$$\Delta_{(K,v_1)}(c) = min\{(\overline{v_1}(c-c') | c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği} \}$$

ve

$$\Delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2) = min\{ \overline{v_2}(a_2 - a_2') | a_2',\ a_2 \text{ nin } k_v - \text{eşleniği} \}$$

olmak üzere $\Delta_{(K,v)}(c) = \left(\Delta_{(K,v_1)}(c)\ ,\ \Delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$ dir.

$$w_{(K,v)}(c) = max\{\bar{v}(c - c')|c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği}, c' \neq c\}$$
$$= max\{(\overline{v_1}(c - c'), \overline{v_2}((c - c')^*)|c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği}, c' \neq c\}$$
$$= max\{(\overline{v_1}(c - c'), \overline{v_2}(a_2 - a_2')\ |\ c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği},\ c' \neq c$$
$$a_2',\ a_2 \text{ nin } k_v - \text{eşleniği}, a_2' \neq a_2\}$$

Böylece

$$w_{(K,v_1)}(c) = max\{(\overline{v_1}(c - c')|c',\ c \text{ nin } K - \text{eşleniği}, c' \neq c\}$$

ve

$$w_{(k_{v_1},v_2)}(a_2) = max\{\ \overline{v_2}(a_2 - a_2')|a_2',\ a_2 \text{ nin } k_v - \text{eşleniği}, a_2' \neq a_2\}$$

olmak üzere $w_{(K,v)}(c) = \left(w_{(K,v_1)}(c)\ ,\ w_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$ dir.

$$\delta_{(K,v)}(c) = sup\{\bar{v}(c - \beta)|\ \beta \in \bar{K},\ [K(\beta):K] < [K(c):K]\}$$
$$= sup\{(\overline{v_1}(c - \beta), \overline{v_2}((c - \beta)^*)|\ \beta \in \bar{K},\ [K(\beta):K] < [K(c):K]\}$$
$$= sup\{(\overline{v_1}(c - \beta), \overline{v_2}((a_2 - \beta^*)|\ \beta \in \bar{K},\ [K(\beta):K] < [K(\alpha):K]\}$$

Buradan

$$\delta_{(K,v_1)}(c) = sup\{(\overline{v_1}(c - \beta)|\ \beta \in \bar{K},\ [K(\beta):K] < [K(\alpha):K]\}$$

ve

$$\delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2) = sup\{\ \overline{v_2}(a_2 - \beta^*)|\beta^* \in \overline{k_{v_1}}, [\overline{k_{v_1}}(\beta^*):k_{v_1}] < [\overline{k_{v_1}}(a_2):k_{v_1}]\}$$

olmak üzere $\delta_{(K,v)}(c) = \left(\delta_{(K,v_1)}(c)\ ,\ \delta_{(k_{v_1},v_2)}(a_2)\right)$ dir.

4.4. Bir K Cisminin $rankv = n$ Olan Bir v Değerlendirmesinin $K(x)$ Cismine Rezidül Transandant Genişlemeleri ve Lifting Polinomları

Bu bölümde K cisminin $rankv = n$ olan bir v değerlendirmesi göz önüne alınmıştır ve 4.3. Alt Bölümünde yapılan çalışmalar için bir genelleme elde edilmiştir.

4.4.1. Teorem, 4.4.2. Teorem, 4.4.3. Örnek ve 4.4.5. Teorem'de aşağıdaki notasyonlar geçerlidir.

(K, v_1) Henselian değerlendirilmiş bir cisim, $i = 2, \dots, n$ için $k_{v_{i-1}}$ rezidü cisminin bir değerlendirmesi v_i olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_n$ değerlendirmelerinin bileşkesi $v = v_1 o v_2 o \dots o v_n$ değerlendirmesi olsun.

v_1 değerlendirmesinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine (a_1, δ_1) minimal çifti ile tanımlanan bir rezidül transandant genişlemesi w_1 olsun. $i = 2, \dots, n$ için v_i değerlendirmesinin $k_{w_{i-1}}$ rezidü cismine (a_i, δ_i) minimal çifti ile tanımlanan rezidül transandant genişlemesi w_i olmak üzere $v = v_1 o v_2 o \dots o v_n$ değerlendirmesinin $K(x)$ cismine rankı n olan bir genişlemesi $w = w_1 o w_2 o \dots o w_n$ olsun.

a_1 elemanının minimal polinomu $f_1 = Irr(a_1, K)$, $i = 2, \dots, n$ için a_i elemanının minimal polinomu $f_i = Irr\left(a_i, k_{v_{i-1}}\right)$ ve $\overline{v_\imath}$ değerlendirmesinin $k_{v_{i-1}}(a_i)$ cismine bir kısıtlanışı v_{a_i} olsun. $i = 1, \dots, n$ için $w_i(f) = \gamma_i$ olmak üzere e_i sayısı, $e_i\gamma_i \in G_{v_{a_i}}$ sağlayan en küçük pozitif tam sayı olsun.

$v_{a_1}\left(h_1(a_1)\right) = e_1\gamma_1$ ve $degh_1 < degf_1$

sağlayan bir polinom $h_1(x) \in K[x]$ ve $({f_1}^{e_1}/h_1)^*_{w_1} = Y_1$ olsun. $i = 2, \dots, n$ için

$v_{a_i}\left(h_i(a_i)\right) = e_i\gamma_i$ ve $degh_i < degf_i$

sağlayan bir polinom $h_i(x) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ ve $({f_i}^{e_i}/h_i)^*_{w_i} = Y_i$ olsun.

$F(x) \in K[x]$ polinomunun; $i = 2,3, \dots, n$ olmak üzere $f_i(Y_{i-1}) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ polinomunun $w_1 o w_2 o \dots o w_{i-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi olan $g_i(x) \in K[x]$ açılımları göz önüne alınacağından $w_1 o w_2 o \dots o w_{i-1}$ bileşke değerlendirmesi altında her bir lifting polinomunun görüntüsünün elde edilmesi gerekmektedir. Bu tezin ana sonuçlarından biri olan aşağıda teorem ile bu problemin çözümü ortaya konmuştur.

4.4.1. TEOREM: $i = 2,3, \dots, n$ olmak üzere $f_i(Y_{i-1}) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ polinomunun $w_1 o w_2 o \dots o w_{i-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi $g_i(x) \in K[x]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(w_1 o w_2 o \dots o w_n)(g_n) = (&e_1.degf_n.degf_{n-1} \dots .degf_2.\gamma_1, \\ &degf_n.degf_{n-1} \dots .degf_3.\gamma_2, \dots \dots \dots, \\ &degf_n.degf_{n-1}.\gamma_{n-2}, \ degf_n.\gamma_{n-1}, \gamma_n)\end{aligned} \qquad (4.4.1)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: w değerlendirmesinin rankı üzerinden tümevarım yapılabilir.

$n = 2$ ise; 4.3.2. Teoremin kanıtı göz önüne alındığında

$(w_1 o w_2)(g_2) = (e_1.degf_2.\gamma_1, \gamma_2)$

olduğu kolayca görülür.

$(w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_{n-1}) = (e_1 . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_2 . \gamma_1,$
$$degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_3 . \gamma_2 , \dots ,$$
$$degf_{n-1} . degf_{n-2} . \gamma_{n-3} ,$$
$$degf_{n-1} . \gamma_{n-2} , \gamma_{n-1}) \qquad (4.4.2)$$

eşitliliğinin sağlandığı varsayılsın.

$\lambda_{n-2} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$ ve g_{n-1} polinomunun bir kökü c_{n-2} olsun. 4.3.1. Teorem göz önüne alındığında $w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1}$ değerlendirmesinin (c_{n-2}, λ_{n-2}) minimal çifti ile tanımlanmış olduğu görülür. $\bar{v}$ değerlendirmesinin $K(c_{n-2})$ cismine kısıtlanışı $v_{c_{n-2}}$ ile gösterilsin ve e' sayısı $e' . (w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_n) \in G_{v_{c_{n-2}}}$ sağlayan en küçük pozitif tam sayı olsun. f_n polinomun $w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi g_n polinomu olduğundan

$deg\, g_n = e' . deg\, f_n . deg\, g_{n-1}$

ve

$(w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_n) = e' . deg\, f_n . (w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_{n-1})$

eşitlikleri sağlanır. f_n polinomu, w_n değerlendirmesine göre bir $J_n \in k_{v_{a_n}}[Y_n]$ polinomunun liftingi olsun. Bu durumda $degf_n = e_n . degJ_n . deg\, f_n$ olur. Buradan $e_n = 1$ olduğu görülür. 4.3.2. Teoremin kanıtındakine benzer şekilde yapılan işlemler sonrasında $e' = 1$ olduğu da elde edilir. Böylece

$(w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_n) = deg\, f_n . (w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_{n-1})$
$$= (e_1 . deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_2 . \gamma_1,$$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_3 . \gamma_2 , \dots ,$$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . \gamma_{n-2} , deg\, f_n . \gamma_{n-1})$$

biçimindedir. Bu eşitlik göz önüne alınarak

$(w_1 o w_2 o \dots o w_n)(g_n) = (e_1 . deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_2 . \gamma_1,$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_3 . \gamma_2 , \dots ,$$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . \gamma_{n-2} , deg\, f_n . \gamma_{n-1}, w_n(f_n))$$
$$= (e_1 . deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_2 . \gamma_1,$$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . degf_{n-2} \dots . degf_3 . \gamma_2 , \dots ,$$
$$deg\, f_n . degf_{n-1} . \gamma_{n-2} , deg\, f_n . \gamma_{n-1}, \gamma_n)$$

olduğu görülür.

4.3. Alt Bölümünde rankı 2 olan bir değerlendirme göz önüne alınarak ispatlanan 4.3.3. Teoreminin bir genellemesi aşağıdaki teorem ile elde edilmiştir..

4.4.2. TEOREM: $i = 2,3, \dots, n$ olmak üzere $B_i(Y_i) \in k_{v_{a_i}}[Y_i]$ polinomunun w_i değerlendirmesine göre bir liftingi $B_{i-1}(Y_{i-1}) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ olsun. $B_1(Y_1) \in k_{v_{a_1}}[Y_1]$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $B(x) \in K[x]$ ve $f_i(Y_{i-1})$ polinomunun $w_1 o w_2 o \dots o w_{i-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi $g_i(x) \in K[x]$ olsun. Bu durumda $B_n(Y_n) \in k_{v_{a_n}}[Y_n]$ polinomunun $w = w_1 o w_2 o \dots o w_n$ değerlendirmesine göre bir liftingi $B(x) \in K[x]$ dir.

Kanıt: w değerlendirmesinin rankı üzerinden tümevarım yapılabilir.

$n = 2$ ise; 4.3.3. Teorem göz önüne alındığında $B_2(Y_2)$ polinomunun $w_1 o w_2$ değerlendirmesine göre bir liftinginin $B(x)$ polinomu olduğu kolayca görülür.

$n \geq 3$ olduğu varsayılsın. $B_{n-1}(Y_{n-1})$ polinomunun $w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi $B(x)$ polinomu olsun. Bu durumda 4.1.4. Tanım ile 4.3.2. Teoremin kanıtı birlikte göz önüne alındığında

$$degB = degB_{n-1}.degg_{n-1} , \tag{4.4.3}$$

$$(w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(B) = degB_{n-1}(w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1})(g_{n-1}) \tag{4.4.4}$$

ve

$$\left(\frac{B}{(H_{n-2})^{degB_{n-1}}}\right)^*_{w_1 o w_2 o \dots o w_{n-1}} = B_{n-1} \tag{4.4.5}$$

eşitlikleri sağlanır. Kanıtın tamamlanabilmesi için

$$degB = degB_n.degg_n ,$$

$$(w_1 o w_2 o \dots o w_n)(B) = degB_n(w_1 o w_2 o \dots o w_n)(g_n) ,$$

$$\left(\frac{B}{H_{n-1}^{degB_n}}\right)^*_{w_1 o w_2 o \dots o w_n} = B_n$$

eşitliklerinin sağlandığının gösterilmesi yeterlidir.

B_n polinomunun w_n değerlendirmesine göre bir liftingi B_{n-1} olduğundan

$$degB_{n-1} = degB_n.degf_n , \tag{4.4.6}$$

$$w_n(B_{n-1}) = degB_n.\gamma_n , \tag{4.4.7}$$

$$\left(\frac{B_{n-1}}{(h_n)^{degB_n}}\right)^*_{w_n} = B_n \tag{4.4.8}$$

eşitlikleri sağlanır. (4.4.6) ifadesi (4.4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$degB = degB_n.degf_n.degg_{n-1} = degB_n.degg_n$$

eşitliği elde edilir. (4.4.4) ve (4.4.6) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(B) &= (w_1(B),w_2(B_1),\ldots,w_{n-1}(B_{n-2}))\\ &= degB_{n-1}(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(g_{n-1})\\ &= degB_{n-1}(e_1.degf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_2.\gamma_1,\\ &\qquad degf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_3.\gamma_2,\ldots,\\ &\qquad deg\,f_{n-1}.\,\gamma_{n-2},\gamma_{n-1})\\ &= degB_n.degf_n(e_1.degf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_2.\gamma_1,\\ &\qquad degf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_3.\gamma_2,\ldots,\\ &\qquad deg\,f_{n-1}.\,\gamma_{n-2},\gamma_{n-1})\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan (4.4.7) eşitliği de kullanılarak

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\ldots ow_n)(B) &= (w_1(B),w_2(B_1),\ldots,w_{n-1}(B_{n-2}),w_n(B_{n-1}))\\ &= (e_1.degB_n.degf_ndegf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_2.\gamma_1,\\ &\qquad degB_n.degf_n.degf_{n-1}.degf_{n-2}\ldots.degf_3.\gamma_2,\ldots,\\ &\qquad degB_n.degf_n.deg\,f_{n-1}.\,\gamma_{n-2},\\ &\qquad degB_n.degf_n.\gamma_{n-1},degB_n.\gamma_n)\\ &= degB_n.(w_1ow_2o\ldots ow_n)(g_n)\end{aligned}$$

olduğu görülür. [14] den

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\ldots ow_n)(g_n) &= (\overline{v_1}o\overline{v_2}o\ldots o\overline{v_n})(H_{n-1}(c_{n-1})\\ &= (w_1ow_2o\ldots ow_n)(H_{n-1}) \qquad (4.4.9)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(g_{n-1}) &= (\overline{v_1}o\overline{v_2}o\ldots o\overline{v_{n-1}})(H_{n-2}(c_{n-2}))\\ &= (w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(H_{n-2}) \qquad (4.4.10)\end{aligned}$$

dır. (4.4.1), (4.4.2), (4.4.9) ve (4.4.10) eşitlikleri birlikte göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(H_{n-1}) &= degf_n.(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(g_{n-1})\\ &= degf_n.(w_1ow_2o\ldots ow_{n-1})(H_{n-2})\end{aligned}$$

olduğu görülür. $w_n(h_n)=\gamma_n$ olduğundan

$$\left(\frac{H_{n-1}}{(H_{n-2})^{degf_n}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}} = h_n \qquad (4.4.11)$$

dır. Bu durumda (4.4.5), (4.4.6), (4.4.8) ve (4.4.11) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\left(\frac{B_{n-1}}{(h_n)^{degB_n}}\right)^*_{w_n} = B_n \Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(H_{n-2})^{degB_{n-1}}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}}{\left(\left(\frac{H_{n-1}}{(H_{n-2})^{degf_n}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}\right)^{degB_n}}\right)^*_{w_n} = B_n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(H_{n-2})^{degB_{n-1}}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}}{\left(\left(\frac{(H_{n-1})^{degB_n}}{(H_{n-2})^{degf_n.degB_n}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}\right)}\right)^*_{w_n} = B_n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(H_{n-2})^{degB_{n-1}}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}}{\left(\left(\frac{(H_{n-1})^{degB_n}}{(H_{n-2})^{degB_{n-1}}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_{n-1}}\right)}\right)^*_{w_n} = B_n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B}{H_{n-1}^{degB_n}}\right)^*_{w_1ow_2o\ldots ow_n} = B_n$$

Böylece kanıt tamamlanmış olur.

4.4.3. ÖRNEK: (n=3 durumu) $i = 2,3$ olmak üzere $B_i(Y_i) \in k_{v_{a_i}}[Y_i]$ polinomunun w_i değerlendirmesine göre bir liftingi $B_{i-1}(Y_{i-1}) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ ve $B_1(Y_1) \in k_{v_{a_1}}[Y_1]$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $B(x) \in K[x]$ olsun. Bu durumda

$degB = e_1.degB_1.degf_1,\ degB_1 = degB_2.degf_2,\ degB_2 = degB_3.degf_3$

$w_1(B) = e_1.degB_1.\gamma_1,\ \ w_2(B_1) = degB_2.\gamma_2,\ \ w_3(B_2) = degB_3.\gamma_3$

$$\left(\frac{B}{(h_1)^{degB_1}}\right)^*_{w_1} = B_1,$$

$$\left(\frac{B_1}{(h_2)^{degB_2}}\right)^*_{w_2} = B_2\ ,$$

$$\left(\frac{B_2}{(h_3)^{degB_3}}\right)^*_{w_3} = B_3$$

eşitlikleri sağlanır. $f_2(Y_2)$ polinomunun w_1 değerlendirmesine göre bir liftingi $g_2(x)$ polinomu ve $f_3(Y_3)$ polinomunun w_1ow_2 değerlendirmesine göre bir liftingi $g_3(x)$ polinomu idi. O halde 4.3.1. Teorem göz önüne alındığında w_1ow_2 değerlendirmesinin $g_2(x)$ polinomu yardımıyla, $w_1ow_2ow_3$ değerlendirmesinin de $g_3(x)$ polinomu yardımıyla tanımlandığı görülür. Böylece

$$
\begin{aligned}
degB &= e_1.degB_1.degf_1 \\
&= e_1.degB_2.degf_2.degf_1 \\
&= e_1.degB_3.degf_3.degf_2.degf_1 \\
&= degg_2.degB_3.degf_3 \\
&= degg_3.degB_3
\end{aligned}
$$

sağlanır. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
(w_1ow_2ow_3)(B) &= (w_1(B), w_2(B_1), w_3(B_2)) \\
&= (e_1.degB_1.\gamma_1, degB_2.\gamma_2, degB_3.\gamma_3) \\
&= (e_1.degB_2.degf_2.\gamma_1, degB_3.degf_3.\gamma_2, degB_3.\gamma_3) \\
&= (e_1.degB_3.degf_3.degf_2.\gamma_1, degB_3.degf_3.\gamma_2, degB_3.\gamma_3) \\
&= degB_3.(e_1.degf_3.degf_2.\gamma_1, degf_3.\gamma_2, \gamma_3) \\
&= degB_3.(w_1ow_2ow_3)(g_3)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. $(w_1ow_2ow_3)(g_3) = (\overline{v_1}o\overline{v_2}o\overline{v_3})(H_2(c_2)) = (w_1ow_2ow_3)(H_2)$ ve

$$
\begin{aligned}
(w_1ow_2ow_3)(g_3) &= (e_1.degf_3.degf_2.\gamma_1, degf_3.\gamma_2, \gamma_3) \\
&= (degf_3.degf_2.w_1(h_1),\ degf_3.w_2(h_2), w_3(h_3)) \\
&= (w_1((h_1)^{degf_3.degf_2}),\ w_2((h_2)^{degf_3}), w_3(h_3))
\end{aligned}
$$

eşitlikleri birlikte göz önüne alındığında

$$w_1(H_2) = w_1((h_1)^{degf_3.degf_2}),$$

$$\left(\frac{H_2}{(h_1)^{degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1} = (h_2)^{degf_3},$$

$$\left(\frac{\left(\frac{H_2}{(h_1)^{degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1}}{(h_2)^{degf_3}}\right)^*_{w_2} = h_3$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left(\frac{B_2}{(h_3)^{degB_3}}\right)^*_{w_3} = B_3 \Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B_1}{(h_2)^{degB_2}}\right)^*_{w_2}}{(h_3)^{degB_3}}\right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B_1}{(h_2)^{degB_2}}\right)^*_{w_2}}{\left(\left(\frac{\left(\frac{H_2}{(h_1)^{degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1}}{(h_2)^{degf_3}}\right)^*_{w_2}\right)^{degB_3}}\right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B_1}{(h_2)^{degB_2}}\right)^*_{w_2}}{\left(\frac{\left(\left(\frac{H_2}{(h_1)^{degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1}\right)^{degB_3}}{(h_2)^{degf_3.degB_3}}\right)^*_{w_2}} \right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B_1}{(h_2)^{degB_3.degf_3}}\right)^*_{w_2}}{\left(\frac{\left(\left(\frac{(H_2)^{degB_3}}{(h_1)^{degf_3.degf_2.degB_3}}\right)^*_{w_1}\right)}{(h_2)^{degf_3.degB_3}}\right)^*_{w_2}} \right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(h_1)^{degB_1}}\right)^*_{w_1}}{\left(\left(\left(\frac{(H_2)^{degB_3}}{(h_1)^{degf_3.degf_2.degB_3}}\right)^*_{w_1}\right)\right)^*_{w_2}} \right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(h_1)^{degB_3.degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1}}{\left(\left(\left(\frac{(H_2)^{degB_3}}{(h_1)^{degf_3.degf_2.degB_3}}\right)^*_{w_1}\right)\right)^*_{w_2}} \right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\left(\frac{B}{(h_1)^{degB_3.degf_3.degf_2}}\right)^*_{w_1}}{\left(\left(\left(\frac{(H_2)^{degB_3}}{(h_1)^{degf_3.degf_2.degB_3}}\right)^*_{w_1}\right)\right)^*_{w_2}} \right)^*_{w_3} = B_3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B}{(H_2)^{degB_3}}\right)^*_{w_1ow_2ow_3} = B_3$$

elde edilir. Böylece

$degB = degg_3.degB_3,$

$(w_1ow_2ow_3)(B) = (w_1ow_2ow_3)(g_3),$

$$\left(\frac{B}{(H_2)^{degB_3}}\right)^*_{w_1ow_2ow_3} = B_3$$

eşitlikleri sağlandığından $B_3(Y_3) \in k_{v_{a_3}}[Y_3]$ polinomunun $w_1ow_2ow_3$ bileşke değerlendirmesine göre bir liftinginin $B(x)$ polinomu olduğu görülür.

4.4.1. Teorem ile 4.4.2. Teorem birlikte göz önüne alınarak, bir K cisminin $rankv = n$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ rasyonel fonksiyon cismine $rankw = n$ olan bir w rezidül transandant genişlemesinin belirlenmesi ile ilgili ve bu tezin ana sonuçlarından biri olan aşağıdaki teorem verilmektedir.

4.4.4. TEOREM: $i = 2,3,\dots,n$ olmak üzere $f_i(Y_{i-1}) \in k_{v_{a_{i-1}}}[Y_{i-1}]$ polinomunun $w_1ow_2o\dots ow_{i-1}$ değerlendirmesine göre bir liftingi $g_i(x) \in K[x]$ olsun. $\lambda_{n-1} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in G_{\bar{v}}$ olmak üzere g_n polinomunun $w_{(c_{n-1},\lambda_{n-1})} = w = w_1ow_2o\dots ow_n$ sağlayan bir kökü c_{n-1} olsun. $F(x) \in K[x]$ polinomunun g_n −açılımı $F(x) = \sum_i F_i(x)\, g_n(x)^i$, $degF_i < deg\, g_n$ olmak üzere w değerlendirmesi

$$\begin{aligned}(w_1ow_2o\dots ow_n)\big(F(x)\big) = \inf_i\{\, (\,\overline{v_1}\big(F_i(c_{n-1})\big),\ & w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1}\right),\\ & w_3\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1ow_2}\right), \dots,\\ & w_n\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1ow_2o\dots ow_n}\right)) +\\ & i.(e_1.deg\, f_n.degf_{n-1}\dots degf_2.\gamma_1,\\ & \quad deg\, f_n.degf_{n-1}\dots degf_3.\gamma_2, \dots,\\ & \quad deg\, f_n.degf_{n-1}.\gamma_{n-2}, deg\, f_n.\,\gamma_{n-1}, \gamma_n)\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Kanıt: w değerlendirmesinin rankı üzerinden tümevarım yapılabilir.

$n = 2$ ise; 4.3.2. Teorem göz önüne alındığında istenilen eşitliğin sağlandığı kolayca görülür.

$n \geq 3$ olduğu varsayılsın. $\lambda_{n-2} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1})$ ve g_{n-1} polinomunun bir kökü c_{n-2} olmak üzere, 4.3.1. Teorem uygulandığında $w_1ow_2o\dots ow_{n-1}$ değerlendirmesinin (c_{n-2}, λ_{n-2}) minimal çifti ile tanımlandığı görülür.

$f_n(Y_{n-1})$ polinomunun $w = w_1 o w_2 o \dots o w_n$ değerlendirmesine göre bir liftinginin $g_n(x)$ polinomu olduğu ve $w = w_1 o w_2 o \dots o w_n$ değerlendirmesinin (c_{n-1}, λ_{n-1}) minimal çifti ile tanımlandığı göz önüne alınarak

$$(w_1 o w_2 o \dots o w_n)\big(F_i(x)\big) = (\overline{v_1} o \overline{v_2} o \dots o \overline{v_n})(F_i(c_{n-1}))$$

olduğu görülür. Ayrıca $j = 1, \dots n$ için

$$\big(w_1 o w_2 o \dots o w_j\big)\big(F_i(x)\big) = (\overline{v_1} o \overline{v_2} o \dots o \overline{v_j})(F_i(c_{n-1}))$$

eşitliği de sağlanır. Buradan $\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}$ elemanının $w_1 o w_2 o \dots o w_j$ değerlendirmesine göre bir rezidüsünün olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}(w_1 o w_2 o \dots o w_n)\big(F_i(x)\big) = (\, &\overline{v_1}\big(F_i(c_{n-1})\big), w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1}\right), \\ &w_3\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1 o w_2}\right), \dots, \\ &w_n\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1 o w_2 o \dots o w_n}\right))\end{aligned}$$

biçimindedir. (4.4.1) ifadesi de göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}(w_1 o w_2 o \dots o w_n)\big(F(x)\big) = \inf_i\{\, (\, &\overline{v_1}\big(F_i(c_{n-1})\big), w_2\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1}\right) \\ &w_3\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1 o w_2}\right), \dots, \\ &w_n\left(\left(\frac{F_i(x)}{F_i(c_{n-1})}\right)^*_{w_1 o w_2 o \dots o w_n}\right)) + \\ &i.(e_1.deg\, f_n.deg f_{n-1} \dots deg f_2.\gamma_1, \\ &\quad deg\, f_n.deg f_{n-1} \dots deg f_3.\gamma_2\,, \dots, \\ &\quad deg\, f_n.deg f_{n-1}.\gamma_{n-2}\,, deg\, f_n.\, \gamma_{n-1}, \gamma_n)\}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Tezin bu bölümde önceki bölümlerde değerlendirilmiş cisimlerin cebirsel ve transandant genişlemeleri, sabitler, lifting polinomları ve seçkin zincirler ile ilgili elde edilen ve tarafımızdan ispatlanan tüm sonuçlar özet olarak verilecektir.

Üçüncü bölümde ilk olarak, $rankv = 2$ olan bir $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesine sahip bir K cisminin bir tame genişlemesi göz önüne alındığında bileşkeyi oluşturan her iki değerlendirilmiş cismin de birer tame genişlemelerinin olduğu sonucu 3.3.1. Teorem ile ispatlanmıştır.

Daha sonra bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesine göre $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanının $\Delta_{(K,v)}(\alpha)$, $w_{(K,v)}(\alpha)$ ve $\delta_{(K,v)}(\alpha)$ sabitleri 3.3.2. Teorem ile belirlenmiştir.

3.3.1. Teoremin bir genellemesinin elde edilebileceği 3.3.3.Teorem ile ifade edilerek ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümün 4.2. Alt Bölümünde ilk olarak, K cisminin Henselian bir v değerlendirmesi göre belirlenen δ_K sabitleri ve minimal polinomları yardımıyla v değerlendirmesinin $K(a)$ cismine genişlemesi olan v_a değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cisminin nasıl yazılacağı 4.2.1. Önerme ile verilmiştir.

$a \in \overline{K} \backslash K$ ve $b \in \overline{K} \backslash K$ elemanlarının $a = a_0, a_1, \dots, a_n$ ve $b = b_0, b_1, \dots, b_n$ seçkin zincirleri göz önüne alınarak v değerlendirmesinin $K(a_i, b_i)$ cisimlerine genişlemesi olan $v_{a_i b_i}$ değerlendirmelerinin değer gruplarının ve rezidü cisimlerinin karşılaştırılması 4.2.2. Önerme ile yapılmıştır.

Daha sonra bir K cisminin $rankv = 1$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $ranku = 2$ olan bir u değerlendirmesi göz önüne alınarak asal bir polinomun iki liftingi ve bu lifting polinomlarının birer kökleri yardımıyla yazılan seçkin ikililerinin sağladığı bazı özelliklerin elde edildiği 4.2.3. Önerme verilmiştir. Bu alt bölümün sonunda da bir K cisminin $rankv = 1$ olan bir v değerlendirmesinin $K(x,y)$ cismine $ranku = 1$ olan bir u değerlendirmesi için lifting polinomlarına ve köklerine ait çalışmalar 4.2.5. Önerme'de ispatlanmıştır.

4.3. Alt Bölümünde ise; bir K cisminin $rankv = 2$ olan bir $v = v_1 o v_2$ değerlendirmesi göz önüne alınmıştır. Öncelikle v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine $rankw = 2$ olan bir $w = w_1 o w_2$ rezidül transandant genişlemesinin verildiği 4.3.2. Teorem verilmiştir. Daha sonra w_1 ve w_2 değerlendirmelerine göre belirlenen lifting polinomları ile $w = w_1 o w_2$ değerlendirmesine göre polinomlarının arasındaki ilişkilerin belirlendiği 4.3.3. Teorem elde edilmiştir.

Bir v değerlendirmesinin rankının 2 olması durumu için, bir lifting polinomunun bir c kökünün $\Delta_{(K,v)}(c)$, $w_{(K,v)}(c)$ ve $\delta_{(K,v)}(c)$ sabitlerinin nasıl tanımlanacağı 4.3.4. Teorem ile ifade edilmiştir.

4.4. Alt Bölümünde ise; $rankv \geq 2$ olan bir v değerlendirmesinin rezidül transandant genişlemesinin tanımlanması için öncelikle bir lifting polinomuna göre açılım yapılması gerektiğinden lifting polinomların görüntülerinin elde edildiği 4.4.1. Teorem elde edilmiştir. Bunun arkasından 4.3.3. Teoreminin ve 4.3.2. Teoreminin $rankv = n$ durumu için bir genellemesinin elde edilebileceği sırasıyla 4.4.2. Teorem ve 4.4.4. Teoremleri ile gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] N. Bourbaki, ***Commutative Algebra***, (Springer, Verlag, 1989)

[2] G. Bachmann, ***Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory***, (Academic Press, Newyork, 1964)

[3] O. Endler, ***Valuation Theory***, (Springer, Berlin-Heidelberg-New York ,1972)

[4] P. Ribenboim, ***The Theory of Classical Valuations***, (Springer, Verlag-New York, 1999)

[5] O. Zariski, P. Samuel, ***Commutative Algebra II***, (Springer, Verlag-Berlin-Heidelberg-New York, 1960)

[6] F. Lorenz, ***Algebra Vol. II Fields with Structure, Algebras and Advanced Topics***, (Springer, New York, 2008)

[7] S.K. Khanduja, ***On Valuations of K(x)***, Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society, 35, 419-426, (1992)

[8] P. McCarthy, ***Algebraic Extensions of Fields,*** (Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1966)

[9] P.M. Cohn, ***Algebraic Numbers and Algebraic Functions,*** (Chapman and Hall Mathematics, 1991)

[10] S.K. Khanduja, ***Tame Fields and Tame Extensions***, Journal of Algebra, 201, 647-655, (1998)

[11] S.K. Khanduja, ***On Krasner's Constant,*** Journal of Algebra, 213, 225-230, (1999)

[12] N. Popescu, A. Zaharescu, ***On The Main Invariant of an Element Over a Local Field,*** Portugaliae Mathematica, Vol. 54, Fasc. 1, (1997)

[13] A.P. Singh, S.K. Khanduja, ***On Finite Tame Extensions of Valued Fields***, Communications in Algebra, 33, 1095-1105, (2005)

[14] N. Popescu, A. Zaharescu, ***On The Structure of Irreducible Polynomials over Local Fields***, J. Number Theory, 52, 98-118, (1995)

[15] S.K. Khanduja, J. Saha, ***A Generalized Fundamental Principle***, Mathematika, 46 (1), 83-92, (1999)

[16] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu, ***A Theorem of Characterization of Residual Transcendental Extensions of a Valuation,*** J. Math. Kyoto Univ., 28, 579-592, (1988)

[17] K. Aghigh, S.K. Khanduja***, On Chains Associated with Elements Algebraic over a Henselian Valued Field***, Algebra Colloquium 12:4, 607-616, (2005)

[18] K. Aghigh, S.K. Khanduja, ***On The Main Invariant of Elements Algebraic Over a Henselian Valued Field***, Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society, 45, 219-227, (2002)

[19] S. Bhatia, S.K. Khanduja, ***On Extensions Generated by Roots of Lifting Polynomials***, Mathematika, 49 (1-2), 107-118, (2002)

[20] A. Zaharescu, ***Lifting Polynomials over a Local Field***, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) vol. 10, 15-27, (2004)

[21] H. Hasse, ***Number Theory,*** (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980)

[22] S.K. Khanduja, U. Grag, ***Rank 2 Valuations of K(x),*** Mathematica, 37, 97-105, (1990)

[23] N. Popescu C. Vraciu, ***On The Extensions on a field K to K(x)-I***, Rendiconti Del Seminario Matematico Della Università di Padova, 87, 151-168, (1992)

[24] N. Popescu C. Vraciu, ***On The Extensions on a field K to K(x)-II***, Rendiconti Del Seminario Matematico Della Università di Padova, 96, 1-14, (1996)

[25] F. Öke, H. İşcan, ***An introduction to extensions of valuations on*** $\boldsymbol{K}$ ***to*** $\boldsymbol{K(x,y)}$**,** Journal of the Indian Math. Soc., Vol. 69, (1-4), 33-44, (2002)

[26] B.Öztürk, F. Öke, ***On Residual Transcendental Extensions of a Valuation with*** $\boldsymbol{rankv = 2}$, Selçuk J. Appl.Math, Selçuk J. Appl.Math., vol.12, No.2, 111-117,(2011)

[27] B.Öztürk, F. Öke, ***Some Constants and Tame Extensions According to a Valuation of a Field with*** $\boldsymbol{rankv = 2}$, Proc. Jangjeon Math. Soc., 15, No.4, 477- 482 (2012)

ÖZGEÇMİŞ

12.10.1979 tarihinde Edirne'de doğdum. İlkokulu Edirne Kurtuluş İlkokulunda, ortaokulu ve liseyi Edirne Anadolu Lisesinde okudum. 1997 yılında kayıt olduğum T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden Haziran 2001 döneminde mezun oldum. 2001 yılında Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı'nda açılan Araştırma Görevlisi sınavını kazanarak göreve başladım. 2004 yılında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisansı tamamladım. Halen araştırma görevlisi olarak görevimi sürdürmekteyim.

BİLİMSEL YAYIN FAALİYETLERİ

Yayınlanmış Makalenin,

Adı	: On Residual Transcendental Extensions of a Valuation with rankv = 2
Yazarları	: Burcu ÖZTÜRK, Figen ÖKE
Yayınlandığı Dergi	: Selçuk J. Appl. Math.
Yılı	: 2011

Yayınlanmış Makalenin,

Adı	: Some Constants and Tame Extensions According to a Valuation of a Field with rankv=2
Yazarları	: Burcu ÖZTÜRK, Figen ÖKE
Yayınlandığı Dergi	: Proc. Jangjeon Math. Soc.
Yılı	: 2012

Katıldığı Kongre	: Antalya Cebir Günleri, 28 Mayıs-1 Haziran 2008
Bildiri Adı	: Cisim Genişlemelerinde Sabitler
Düzenleyen Kuruluş	: İstanbul Bilgi Üniversitesi

Katıldığı Kongre : 6. Ankara Matematik Günleri, 2-3 Haziran 2011

Bildiri Adı : Bir K Cisminin rankv=2 Olan Bir Değerlendirmesine Göre Sabitler ve Tame Genişlemeleri Hakkında

Düzenleyen Kuruluş : Hacettepe Üniversitesi

Katıldığı Kongre : International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, 23-26 June 2014

Bildiri Adı : On Tame Extensions and Residual Transcendental Extensions of a valuation with rankv=n

Düzenleyen Kuruluş : Uludağ Üniversitesi

Katıldığı Kongre : The 28th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, 15-19 May 2015

Bildiri Adı : On Certain Extensions of Valuated Fields

Düzenleyen Kuruluş : Akdeniz Üniversitesi

Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi

Proje No : 2008/86

Proje Niteliği : Doktora

Proje Başlığı : Değerlendirilmiş Cisimlerin Genişlemeleri

Proje Yöneticisi : Doç. Dr. Figen ÖKE

Araştırmacı : Burcu ÖZTÜRK

Projenin Başlama ve Bitiş Tarihi : 26.09.2008-16.07.2013