

T. C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
ÇUBUK VE KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMİ

Seçkin FİLİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Metin AYDOĞDU

Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı

EDİRNE-2010

T. C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ
ÇUBUK VE KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİMİ

Seçkin FİLİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Metin AYDOĞDU

2010
EDİRNE

İÇİNDEKİLER

| | |
|-----------------------|-----|
| Önsöz..... | i |
| Özet | ii |
| Abstract | iii |
| Şekil Listesi | iv |
| Çizelge Listesi | x |
| Sembol Listesi | xii |

BÖLÜM 1. GİRİŞ

| | |
|--|---|
| 1.1. Problem ve Önemi..... | 1 |
| 1.2. Önceki Çalışmalar | 2 |
| 1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı | 5 |

BÖLÜM 2. EKSENEL PARÇALI ve EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

| | |
|---|----|
| 2.1. Giriş..... | 6 |
| 2.2. Newton Metodu | 6 |
| 2.3. Virtüel İşler Prensibi | 8 |
| 2.4. Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Çubuklar..... | 9 |
| 2.4.1. Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Çubukların Hareket Denklemleri | 10 |
| 2.4.2. EPDÇ için Sayısal Sonuçlar ve Yorum..... | 12 |
| 2.4.3. Mod Şekilleri..... | 22 |
| 2.5. Eksenel Doğrultuda Elastisite Modülü Parabolik Değişen Yoğunluğu Sabit Olan Çubukların Titreşim Analizi..... | 31 |
| 2.6. Ritz Metodu | 33 |

BÖLÜM 3. KIRIŞLER

| | |
|---|----|
| 3.1. Giriş | 37 |
| 3.2. Newton Metodu | 37 |
| 3.3. Virtüel İşler Prensibi | 39 |
| 3.4. Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Kirişler(EPDK) | 40 |
| 3.5. EPDK için Sayısal Sonuçlar ve Yorum..... | 43 |
| 3.6. Ritz Metodu | 53 |

BÖLÜM 4. SONUÇLAR

KAYNAKLAR.....

ÖZGEÇMİŞ

ÖNSÖZ

Çalışmalarında, her türlü katkıyı benden esirgemeyen ve üzerimdeki emeklerini ödeyemeyeceğim, sayın hocam Doç. Dr. Metin AYDOĞDU'ya en içten teşekkürü bir borç bilirim.

Her zaman manevi desteğini gördüğüm sevgili arkadaşlarım Araş. Gör. Erhan AKYOL'a, Araş. Gör. Tolga AKSENCER'e ve Seçil SEÇGİN'e teşekkür ederim.

Varlıklarından güç aldığım, bana olan inançlarını hiç yitirmeyen ailem; babam, annem ve kardeşlerime ne kadar teşekkür etsem azdır.

ÖZET

Bu çalışmada, sürekli veya parçalı sürekli formda eksenel derecelendirilmiş çubuk ve kirişlerin serbest titreşimi incelenmiştir. İlk olarak, Newton Yöntemi ve Hamilton Prensibi kullanılarak hareket denklemleri ve sınır şartları elde edilmiştir. Eksenel parçalı derecelendirilmiş çubuk ve kirişlerin serbest titreşiminin genel formülasyonları çıkarılmıştır. İki parçalı çubuk ve kiriş çalışılmıştır. Parçalı derecelendirmede, yönetici denklemler klasik değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözülmüştür. Sürekli derecelendirmenin bazı uygulamalarında, Legendre yöntemi, Legendre yönteminin yetersiz kaldığı durumlarda Ritz yöntemi kullanılmıştır. Sonuçlar, farklı malzeme çiftleri, farklı geometrik özellikler ve farklı sınır şartları için elde edilmiştir. Bulunan frekans değerleri üniform (birbirim) çubuk ve kirişlerdeki değerlerle birlikte verilmiştir. Bazı parametrik sonuçları ifade etmede tablo ve grafikler kullanılmıştır. Titreşimin davranışının daha iyi anlaşılabilmesi için bazı mod şekilleri verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Titreşim, Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş Çubuk ve Kirişler, Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Çubuk ve Kirişler, Ritz Yöntemi.

ABSTRACT

In this study, vibration of axially graded rods and beams is investigated. Firstly, the equations of motion and boundary conditions are obtained using Newton's method and Hamilton's Principle. Piecewise and continuous grading forms are assumed. Initially a general formulation is given for the axially piecewise graded rod and beams. Then rods and beams with two constituents are studied. For the piecewise case governing equations are solved using classical separation of variable method. Legendre method is used for possible continuously grading cases. Since it is not possible to obtain closed form solution for all axially grading forms Ritz method is proposed for arbitrary variation of material properties in the axial direction. Results are obtained for different material composition, geometrical properties and different boundary conditions. Comparisons are made with previous uniform rods and beam results. Tables and graphs are used in order to represent parametrical results. Some specific mode shapes are also given to understand vibration behavior of axially graded rods and beams.

Keywords: Vibration, Axially Functionally Graded Rods and Beams, Piecewise Axially Graded Rods and Beams, Ritz Method.

ŞEKİL LİSTESİ

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 2.1. | Eksenel titreşen bir çubuk..... | 7 |
| Şekil 2.2. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş çubuk..... | 10 |
| Şekil 2.3. | Eksenel iki parçalı derecelendirilmiş çubuk..... | 11 |
| Şekil 2.4. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$)..... | 13 |
| Şekil 2.5. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... | 13 |
| Şekil 2.6. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... | 14 |
| Şekil 2.7. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır])..... | 14 |
| Şekil 2.8. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=1/2$)..... | 15 |
| Şekil 2.9. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=1/5$)..... | 15 |
| Şekil 2.10. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$)..... | 16 |
| Şekil 2.11. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... | 16 |

| | | |
|-------------|---|----|
| Şekil 2.12. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... | 17 |
| Şekil 2.13. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]) | 17 |
| Şekil 2.14. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=1/2$)..... | 18 |
| Şekil 2.15. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=1/5$)..... | 18 |
| Şekil 2.16. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$)..... | 19 |
| Şekil 2.17. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... | 19 |
| Şekil 2.18. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... | 20 |
| Şekil 2.19. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]) | 20 |
| Şekil 2.20. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$ $m_1/m_2=1/2$)..... | 21 |
| Şekil 2.21. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$ $m_1/m_2=1/5$)..... | 21 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 2.22. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 22 |
| Şekil 2.23. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 22 |
| Şekil 2.24. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 23 |
| Şekil 2.25. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 23 |
| Şekil 2.26. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 24 |
| Şekil 2.27. | EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 24 |
| Şekil 2.28. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 25 |
| Şekil 2.29. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 25 |
| Şekil 2.30. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 26 |
| Şekil 2.31. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 26 |
| Şekil 2.32. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 27 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 2.33. | EPDÇ'ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 27 |
| Şekil 2.34. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 28 |
| Şekil 2.35. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 28 |
| Şekil 2.36. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 29 |
| Şekil 2.37. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 29 |
| Şekil 2.38. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 30 |
| Şekil 2.39. | EPDÇ'ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2 =5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli..... | 30 |
| Şekil 3.1 | Genel yayılı yüklü kiriş..... | 38 |
| Şekil 3.2 | Kirişin hacim elemanı ve kesit tesirleri..... | 38 |
| Şekil 3.3 | Eksenel parçalı derecelendirilmiş kiriş | 40 |
| Şekil 3.4. | Eksenel iki parçalı derecelendirilmiş kiriş | 41 |
| Şekil 3.5. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=2$)...... | 44 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 3.6. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... | 44 |
| Şekil 3.7. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... | 45 |
| Şekil 3.8. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır])..... | 45 |
| Şekil 3.9. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.5$)..... | 46 |
| Şekil 3.10. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$)..... | 46 |
| Şekil 3.11. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$)..... | 47 |
| Şekil 3.12. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... | 47 |
| Şekil 3.13. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... | 48 |
| Şekil 3.14. | Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır])..... | 48 |

- Şekil 3.15. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=0.5$)..... 49
- Şekil 3.16. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$)..... 49
- Şekil 3.17. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$)..... 50
- Şekil 3.18. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$)..... 50
- Şekil 3.19. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum])..... 51
- Şekil 3.20. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2=8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır])..... 51
- Şekil 3.21. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=0.5$)..... 52
- Şekil 3.22. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$)..... 52

ÇİZELGE LİSTESİ

| | | |
|--------------|--|----|
| Çizelge 2.1. | Üniform olmayan A-A çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini..... | 32 |
| Çizelge 2.2. | Üniform olmayan A-S çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini..... | 32 |
| Çizelge 2.3. | Üniform olmayan S-S çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini..... | 33 |
| Çizelge 2.4. | Çubuk için kinematik koşullar | 34 |
| Çizelge 2.5. | (2.36)'daki başlangıç indisleri | 34 |
| Çizelge 2.6. | Üniform ve üniform olmayan çubuk için S-S sınır şartlarında ilk üç frekans parametresinin tayininde yakınsama çalışması..... | 35 |
| Çizelge 2.7. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 36 |
| Çizelge 2.8. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 36 |
| Çizelge 2.9. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 36 |
| Çizelge 3.1. | Sınır koşullarına bağlı olarak kirişin kinetik koşulları | 53 |

| | | |
|--------------|--|----|
| Çizelge 3.2. | (2.23)'teki başlangıç indisleri | 53 |
| Çizelge 3.3. | Üniform ve üniform olmayan B-B kirişi için ilk üç frekans parametresinin tayininde yakınsama çalışması | 54 |
| Çizelge 3.4. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 55 |
| Çizelge 3.5. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 55 |
| Çizelge 3.6. | Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi..... | 55 |

SEMBOL LİSTESİ

| | |
|------------------------------|--|
| σ | Gerilme |
| ε | Genleme |
| ω | Dairesel frekans |
| γ | Malzeme özellikleri oranı |
| α_E Modülüne oranı | 1. parçanın Elastisite Modülünün, 2. parçanın Elastisite Modülüne oranı |
| α_m | 2. parçanın kütesinin, 1. parçanın kütesine oranı |
| β | Boyutsuz frekans parametresi |
| η | Çubuk ve kirişte birinci parçanın uzunluğu |
| δ | Varyasyon sembolü |
| $\rho_i (i:0,1)$ | ρ_0 : Çubuk ve kirişte sol uçtaki yoğunluk değeri ρ_1 : Çubuk ve kirişte sol uçtaki yoğunluk değeri |
| $E_i (i:0,1)$ | E_0 : Çubuk ve kirişte sol uçtaki Elastisite Modülü E_1 : Çubuk ve kirişte sol uçtaki Elastisite Modülü |
| $A_i, B_i, C_i, D_i (i:1,2)$ | Kirişte belirsiz katsayılar |
| a, b, c, d | Doğrusal(Lineer) fonksiyonun katsayıları |

| | |
|-------------------|--|
| C_j (j:1,2,3,4) | Çubukta belirsiz katsayılar |
| k | Yarım dalga sayısı |
| n | Parça sayısı |
| F | Yer değiştirmenin konuma bağlı bileşeni |
| P | Kesit alanına dik doğrultudaki kuvvet |
| m_i (i:1,2) | m_1 : 1. parçanın kütlesi m_2 : 2. parçanın kütlesi |
| u_i (i:1,2) | u_1 : çubukta 1. parçanın yer değiştirmesi u_2 : çubukta 2. parçanın yer değiştirmesi |
| w_i (i:1,2) | w_1 : kirişte 1. parçanın yer değiştirmesi w_2 : kirişte 2. parçanın yer değiştirmesi |
| x | Boyuna Kartezyen eksen bileşeni |
| t | Zaman |
| L | Çubuk ve kirişin boyu |
| A | Çubuk ve kirişin boyuna dik kesit alanı |
| $f(x,t)$ | Kirişin taşıdığı yayılı yük |
| K | Katılık matrisi |
| M | Kütle matrisi |

| | |
|----------|--|
| T | Çubuk ve kirişin kinetik enerjisi |
| V | Düzlem içi kuvvetlerin genleme potansiyel enerjisi |
| U | Çubuk ve kirişin genleme enerjisi |
| W | Eksenel doğrultuda etkiyen kuvvetin virtüel işi |
| Δ | Bilinmeyen sabitlerin(C_m) vektörü |
| V | Kesme kuvveti |

Kısaltmalar

| | |
|------|---|
| EPDÇ | Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Çubuk |
| EPDK | Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Kiriş |
| A-A | Ankastre-Ankastre mesnet |
| A-S | Ankastre-Serbest mesnet |
| S-S | Serbest-Serbest mesnet |
| B-B | Basit Destekli-Basit Destekli mesnet |

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Tezin ilk bölümü olan bu bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. Kısım 1’de tezde incelenen problem ve önemi açıklanmakta, Kısım 2’de konu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar özetlenmektedir. Kısım 3’te çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmaktadır.

1.1.Problem ve Önemi

Otomotiv, inşaat, uzay-havacılık ve robotik gibi daha pek çok mühendislik uygulamasında kullanılan temel yapı elamanlarından olan çubuk ve kirişlerin dinamik analizi önemli mühendislik problemlerinden birisidir. İleri teknoloji malzemelerinden birisi olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler son yıllarda pek çok teorik ve deneysel araştırmanın konusu olmuş ve çeşitli uygulama alanlarında önemli bir yer edinmeye başlamıştır. Kabuk, plak, kiriş ve çubuk gibi mühendislik yapı elemanlarının fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden üretilmesinin getirileri üzerinde durulmaya başlanmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler iki veya daha fazla malzemenin bir araya getirilmesi ile oluşturulan malzemeler olarak tanımlanabilir. Fonksiyonel derecelendirme istenilen doğrultuda yapılabilmesine rağmen önceki çalışmaların çoğunda kalınlık doğrultusunda derecelendirme üzerinde durulmuştur.

Eksenel doğrultuda fonksiyonel derecelendirme üzerine yapılmış çalışmalar çok sınırlıdır. **Bu çalışmada literatürdeki bu eksikliğin giderilmesi amacıyla eksenel doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş çubuk ve kirişlerin serbest titreşim davranışları incelenecektir.** İncelenecek problemin pek çok mühendislik uygulamasında yeni tasarım ve optimizasyonlara imkan verebileceği düşünülmektedir.

1.2. Önceki Çalışmalar

Yapı elemanları örnek olarak çubuk, kiriş ve plaklardaki homojen olamama hali, geometri ve/veya malzemenin sonucudur. Farklı geometrilerdeki yapılar kullanılarak ağırlık, burkulma yükü ve titreşim frekansı optimizasyonu daha önceden çalışılmıştır. Bu konuda birçok çalışma olmasına rağmen burada sadece bir kısmına değinilecektir.

Conway ve Dobil, 1965, Bessel fonksiyonu kullanılarak konik biçimli kirişi çalışmışlardır. Wang, 2005, Elastisite Modülü ve yoğunluğu üstel olarak değişen çubukların eksenel titreşimini incelemiştir. Eisenberger, kesit alanı ve yoğunluğu polinom olarak değişen çubuğun doğal frekanslarını elde etmiştir. Bapat, 1995, boyuna titreşen üstel çubuğun çözümünün kesin sonucunu bulmuştur. Abrate, 1995, üniform olmayan çubuk ve kirişlerin titreşimini çalışmıştır. Li, 2000, basamaklı bir fonksiyon şeklinde değişen çubukların boyuna serbest titreşimini incelemiştir. Kumar ve Sujith, 2000, ise basamaklı bir fonksiyon şeklindeki çubuğun titreşimini çalışmışlardır.

Cranch ve Adler, 1956, kapalı form çözümünü Bessel fonksiyonları ve kuvvet serileri şeklinde belirledikten sonra, dört farklı dikdörtgen kesit alanlı kesik koni biçimli kiriş için doğal frekansları ve mod şekillerini incelemiştir. Hiedebrecht, 1967, üniform olmayan basit destekli kiriş için Fourier Sinüs Serilerini kullanarak doğal frekans ve mod şekillerini yaklaşık olarak hesaplamıştır. Naguleswaran, 1994, Frobenius Metodunu kullanarak değişken kesitli kirişlerde doğal frekans değerlerine ulaşmıştır. Laura ve arkadaşları, 1996, kalınlığı ve eni değişken olan Bernoulli kirişinin doğal

frekanslarının elde edilmesinde sayısal yaklaşımları kullanmışlardır. Caruntu, 2007, dikdörtgen kesitli ve kesidi parabolik olarak değişen doğrusal olmayan kirişlerin titreşimini incelemiştir. Ece ve arkadaşları, 2007, eni üstel olarak değişen kesit alanına sahip geometri ailelerine ait kirişler üzerinde çalışmışlardır. Geometrinin değişimi dışında eğer seçilen doğrultuda malzeme özellikleri(Elastisite Modülü, kütle v.b.) değiştirilirse Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme(FDM) elde ederiz.

Koizumi, 1993 ve Suresh, 1997, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme fikrini ilk olarak ortaya koyan Japon bilim adamlarıdır. İki veya daha fazla malzeme ile toz metalurjisi kullanılarak FDM üretimi yapılmıştır. Burada seçilen malzeme özellikleri, seçilen doğrultu boyunca sürekli bir değişim göstermektedir. FDM'nin sıklıkla kullanıldığı alanlar; ısı bariyerler, giysiler ve korozyon önleyici kaplamalardır. Diğer kullanım alanları ise; türbin kanatçıkları ve makine elemanlarında kullanılan dişliler, rulmanlar, kirişler, plaklar ve kabuklardır. Mühendislik uygulamalarında fonksiyonel derecelendirme genellikle kalınlık doğrultusunda yapılmıştır ve bu konuyla ilgili çok çalışma vardır. Bu yüzden, bu konuda yapılan bütün çalışmaları vermek olanaksızdır. Onun yerine, sonraki paragraflarda bunlardan bir kısmına yer verilecektir.

Vel ve Batra, 2004, basit destekli fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakların üç boyutlu titreşimini çalışmışlardır. Kim, 2005, fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakların sıcaklığa bağlı titreşimini çalışmıştır, ayrıca çözümlerinde üçüncü dereceden kayma deformasyon ve Ritz metodunu kullanmıştır. Batra ve Jin, 2004, fonksiyonel derecelendirilmiş anizotrop dikdörtgen plakların serbest titreşiminde ilk birkaç frekansı maksimize etmek amacıyla, birinci derece kayma deformasyon teorisini kullanmıştır.

Mertan, 2006, Boğaziçi Üniversitesi'nde, fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen plakların serbest titreşimini incelemiş ve bu konuyla ilgili bir yüksek lisans tezi yazmıştır. Praveen ve Reddy, 1998, fonksiyonel derecelendirilmiş seramik-metal(ser-met) plakların doğrusal olmayan süreksiz termoelastik analizini çalışmıştır. Loy ve arkadaşları, 1999, fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik kabukların titreşimini incelemiştir. Uymaz ve Aydogdu, 2007, değişik sınır şartlarında fonksiyonel

derecelendirilmiş plakların üç boyutlu titreşimini incelemiştir. Çözümleri bulmak için Ritz metodundan yararlanmışlardır. Aydogdu ve Taskin, 2007, basit destekli fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin serbest titreşimi üzerine çalışmışlardır. Chakraborty ve arkadaşları, 2003, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin çözümünde, yeni sonlu eleman metodu geliştirmiştir. Pronsato, 1999, yoğunluğu süreksiz değişen membran titreşimini çalışmıştır.

Son zamanlarda, eksenel derecelendirilmiş çubuk, kiriş ve plaklar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Qian ve Batra, 2005, bir ucu ankastre olan fonksiyonel derecelendirilmiş bir plakta birinci frekansı arttırmak için, malzeme özelliklerinin eksenel doğrultuda derecelendirilmesi gerektiğini bulmuşlardır. Sankar, 2001, düşey doğrultuda yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin gerilme ve yerdeğiştirmesini çalışmıştır. Murin ve arkadaşları, 2010, Huang ve Xian-Fang Li, 2010, Anandakumar ve Ho Kim, 2010, eksenel derecelendirilmiş kiriş titreşimleri üzerine bazı çalışmalar yapmışlardır. Elishakoff ve Guede, 2004, eksenel derecelendirilmiş kirişlerin analitik olarak polinomsal çözümlerini vermişlerdir. Elishakoff ve Johnson, 2004, homojen olmayan ve ucunda kütleyle sahip kiriş titreşimini incelemiştir. Calio, Elishakoff ve Wu, 2005, eksenel derecelendirilmiş kolonların kapalı form çözümlerini incelemiştir. Maalawi, 2009, eksenel derecelendirilmiş kolonların burkulması çalışmışlardır.

Bu konuda diğer önemli bir husus, izotropik üniform çubuk ve kirişlerin malzeme özelliklerinin çalışma koşullarından etkilenmesidir. Örnek olarak sıcaklık, malzemenin Elastisite(Young) Modülünü etkilemektedir. Yine örnek olarak, Kane ve Yavuzkurt, 2009, sıcaklık değişiminin çok fazla olduğu gaz türbinlerindeki kanatçıklar üzerine çalışmaktadırlar. Sıcaklığın, basınç ve soğurma yüzeyiyle değiştiğini söylemektedirler. Bu değişimler de gaz türbinindeki kanatçıkların Elastisite Modülünü etkilemektedir. Kanatçıklar homojen yapılmasına rağmen bu etkilerden dolayı FDM özelliği göstermektedir.

Üstel derecelendirilmiş eksenel derecelendirilmiş çubuklar Filiz ve Aydoğdu, 2010, tarafından çalışılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Yukarıda bir kısmından bahsedilen eksenel derecelendirilmiş çubuk ve kiriş çalışmalarında hiç şüphesiz çalışılmamış birçok konu mevcuttur. Birbirinden farklı iki malzemenin birleştirilmesiyle oluşan çubuk ve kiriş malzeme çiftleri birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır. Bu iki malzeme birbirine sürtünme kaynağı ile birleştirilmiştir. Bu şekilde birleştirilmiş yapılara parçalı sürekli fonksiyonel derecelendirilmiş çubuk, kiriş ve plak adı verilmektedir. Bu çalışma, bu konuyu incelemesi bakımından farklıdır.

Bu motivasyonlar ışığında tezde eksenel derecelendirilmiş (parçalı veya sürekli) çubukların ve kirişlerin titreşimi incelenecektir. Tez kapsamında, Bölüm 2’de üniform olmayan çubuklar için yönetici denklemler bulunduktan sonra, eksenel parçalı derecelendirilmiş çubuklar farklı metodlar kullanılarak incelenecektir. Daha sonra Ritz Metodu ve Legendre Metodu eksenel derecelendirilmiş üniform olmayan çubuklarda kullanılmıştır. Sonuçlar şekil ve tablolarda gösterilmiştir. Bölüm 3’te üniform olmayan kirişlerin titreşiminde, benzer metodlar tekrarlanacaktır. Son olarak sonuç kısmı yer almaktadır.

BÖLÜM 2

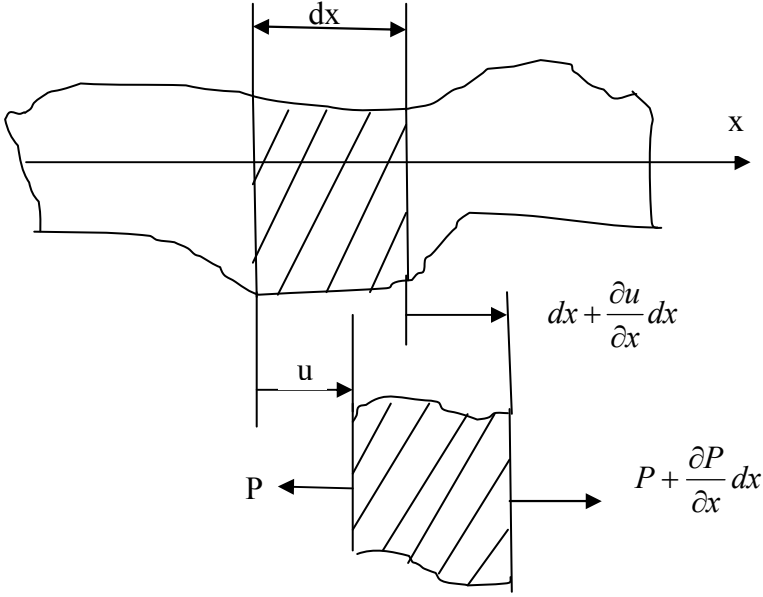
EKSENEL PARÇALI ve SÜREKLİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ÇUBUKLARIN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

2.1. Giriş

Bu bölüm üç kısma ayrılmıştır. Birinci kısımda çubuk denklemlerinin Newton Metodu ve Virtüel İş Prensibiyle (Hamilton Prensibi) çıkarılışı, ikinci kısımda eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş parçalı çubuklar, üçüncü kısımda ise eksen doğrultusunda sürekli olarak fonksiyonel derecelendirilmiş çubukların serbest titreşimi incelenmektedir.

2.2. Newton Metodu

Üniform (birbiçim) olmayan keside ve homojen olmayan malzeme özelliklerine sahip eksenel titreşen bir çubuk göz önüne alınsın (Şekil 2.1). Çubuktaki dik kesit alanı $A(x)$, malzemenin yoğunluğu $\rho(x)$ ve Elastisite Modülü $E(x)$ olarak tanımlansın. Çubuk eksen doğrultusunda bir diferansiyel elamanın boyu dx ve kütlesi dm ile gösterilirse; $dm = \rho(x)A(x)dx$ olur.



Şekil 2.1. Eksenel titreşen bir çubuk

Bir boyutlu durumda Hooke Yasası aşağıdaki gibidir:

$$\sigma = E(x)\varepsilon \quad (2.1)$$

Burada σ ve ε sırasıyla gerilme ve genleme tensörleridir. (2.1)'de gerilme (σ) yerine x doğrultusunda dik kesit alanına ($A(x)$) etki eden yük (P) ifadesi kullanılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{P}{A(x)} = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

Newton'un 2. Yasası'nı yazarsak,

$$\left(P + \frac{dP}{dx}\right) - P = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

bulunur.

(2.2), (2.3)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) E(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

elde edilir. Kesit alanı A sabit alınır,

$$E(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dE(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

bulunur.

Bu denklem, üniform olmayan çubuğa ait hareket denklemdir. Buna ek olarak eğer E ve ρ da sabit alınır, aşağıdaki klasik dalga denklemi elde edilir,

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

2.3. Virtüel İşler Prensibi

Karmaşık sistemler için gerekli yönetici denklemini bulabilmek için varyasyonel prensipler daha kullanışlıdır. Varyasyonel prensipler ayrıca yönetici denklemini çözmek için gerekli olan sınır şartlarını da vermektedirler. Bu sebeple bu çalışmada hareket denklemleri bir kez de Hamilton Prensibiyle bulunacaktır. Bu prensip matematiksel olarak şu şekilde yazılabilir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.7)$$

Burada T kinetik enerji:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 dx \quad (2.8)$$

V genleme potansiyel enerjisi:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) A \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx \quad (2.9)$$

ve W ise aksel doğrultuda etkiyen kuvvetin virtüel işi,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L f(x,t) u dx \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.8), (2.9) ve (2.10), (2.7)'de yerlerine yazılıp integre edilirse (2.4) hareket denklemi ve aşağıdaki sınır şartları elde edilir:

$$(EA \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad \text{veya} \quad \delta u = 0 \quad (2.11)$$

(2.11)'de verilen Sınır Şartları aşağıdaki gibi isimlendirilebilir:

Ankastre-Ankastre (AA): $u(0,t)=u(L,t)=0$;

$$\text{Ankastre -Serbest (AS): } u(0,t) = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

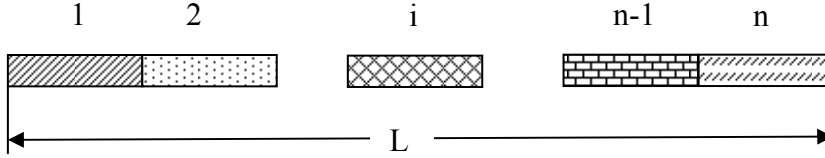
$$\text{Serbest-Serbest (SS): } \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$$

2.4. Aksenal Parçalı Derecelendirilmiş Çubuklar

Fonksiyonel derecelendirme, genellikle bir eksen doğrultusunda sürekli olarak gerçekleştirilmektedir. Farklı malzemelerden oluşturulmuş çubuk ve kirişlerin uç uca birleştirilmesi de fonksiyonel derecelendirme olarak düşünülebilir. Bu farklı parçaların üretimi sürtünme kaynağı yoluyla yapılabilir. Bu yolla elde edilen parçalar: matkap ucu, piston çubuğu ve hidrolik silindirler gibi uygulama alanları bulabilmektedir.

2.4.1. Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Çubukların Hareket Denklemleri

n parçadan oluşan eksenel derecelendirilmiş parçalı çubuk (EPDÇ) ele alınsın (Şekil 2.2)



Şekil 2.2. Eksenel parçalı derecelendirilmiş çubuk

EPDÇ'nin her bir parçası için hareket denklemi, (2.4) kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$E_i \frac{d^2 u_i}{dx^2} + m_i \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

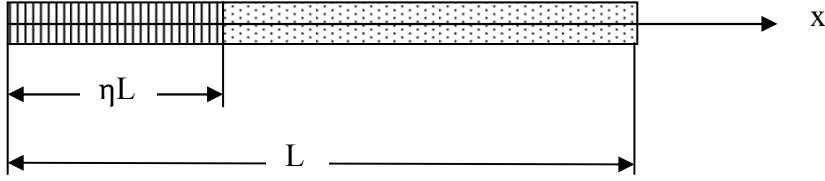
burada

n çubuktaki eleman sayısını göstermektedir. (2.13)'te verilen sınır şartlarının yanında (2.12)'de verilen çubukların bağlantı noktalarında aşağıda verilen süreklilik şartları (yer değiştirme ve eksenel kuvvet) sağlanmalıdır.

$$u_j = u_{j+1} \text{ ve } E_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = E_{j+1} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.14)$$

(2.13), (2.12)'deki sınır şartları ve (2.14)'de verilen süreklilik şartları için çözümlerse EPDÇ için frekanslar elde edilir. İki elemandan oluşan bir çubuk için (2.13) hareket denklemleri aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \beta^2 u_1 &= 0, \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \gamma^2 \beta^2 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Şekil 2.3.Eksenel iki parçalı derecelendirilmiş çubuk

η ; çubukta birinci parçanın uzunluğudur ($0 \leq \eta \leq L$). Çubuğun boyunu 1 aldığımızdan dolayı ikinci parçanın boyu $(1-\eta)$ olur. Burada ilgili parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\beta^2 = \frac{m_1 \omega^2 L^2}{E_1 A}, \quad \gamma^2 = \alpha_m \alpha_E, \quad \alpha_m = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{ve} \quad \alpha_E = \frac{E_1}{E_2} \quad (2.16)$$

(2.15)'in genel çözümü:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x), \\ u_2(x) &= C_3 \sin(\gamma \beta x) + C_4 \cos(\gamma \beta x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde bulunur.

C_i ($i=1,2,3$ ve 4 için) belirsiz katsayıları göstermektedir. (2.17)'de Ankastre-Ankastre(A-A), Ankastre-Serbest(A-S) ve Serbest-Serbest(S-S) mesnetli çubuklarda olarak toplam 3 sınır şartı için titreşim çözümü yapılacaktır.

(2.12) ve (2.14)'teki sınır şartları kullanılarak dört homojen denklem için dört bilinmeyen sabit elde edilir; C_i ($i=1, 2, 3$ ve 4). Bu sınır şartları kullanılarak her bir hal için aşağıdaki denklemler elde edilir.

A-A sınır şartı:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin(\gamma\beta) & \cos(\gamma\beta) \\ \sin(\beta\eta) & -\sin(\gamma\beta\eta) & -\cos(\gamma\beta\eta) \\ E_1\beta \cos(\beta\eta) & -E_2\gamma\beta \cos(\gamma\beta\eta) & E_2\gamma\beta \sin(\gamma\beta\eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

A-S sınır şartı:

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma\beta \cos(\gamma\beta\eta) & \gamma\beta \sin(\gamma\beta\eta) \\ \sin(\beta\eta) & -\sin(\gamma\beta\eta) & -\cos(\gamma\beta\eta) \\ E_1\beta \cos(\beta\eta) & -E_2\gamma\beta \cos(\gamma\beta\eta) & E_2\gamma\beta \sin(\gamma\beta\eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

S-S sınır şartı:

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma\beta \cos(\gamma\beta) & -\gamma\beta \sin(\gamma\beta) \\ \cos(\beta\eta) & -\sin(\gamma\beta\eta) & -\cos(\gamma\beta\eta) \\ -E_1\beta \sin(\beta\eta) & -E_2\gamma\beta \cos(\gamma\beta\eta) & E_2\gamma\beta \sin(\gamma\beta\eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Bu determinantları sıfır yapan β değerleri boyutsuz frekans parametreleridir. S-S sınır şartı için $C_1=0$, A-A ve A-S sınır şartları için $C_2=0$ bulunmaktadır.

2.4.2. EPDÇ için Sayısal Sonuçlar ve Yorum

Bu kısımda (2.16)'da tanımlanan farklı E_1/E_2 , m_1/m_2 oranları için farklı sınır şartlarında aksenal parçalı derecelendirilmiş çubuklar için titreşim problemi incelenecektir.

Bu kısımda incelen malzemeler aşağıdaki gibi gruplandırılmaktadır:

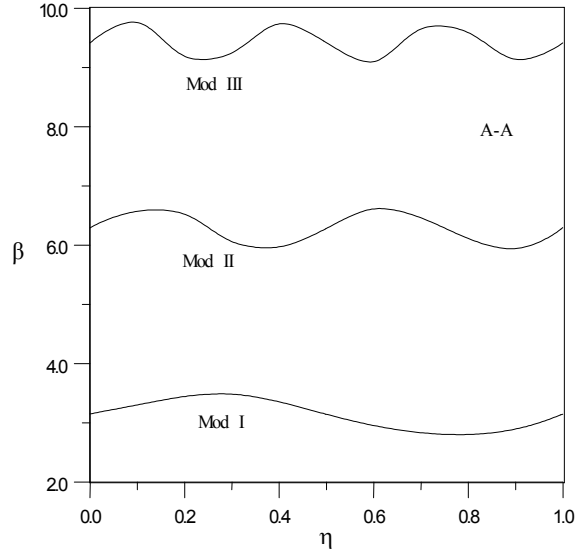
I. Malzeme çifti: $E_1/E_2 > 1$ ve $m_1/m_2 > 1$ (Örneğin: Çelik (Yüksek rijitlik ve ağırlığa sahip)-Alüminyum (Kısmen daha düşük rijitlik ve yoğunluğa sahip))

I. Malzeme çifti: $E_1/E_2 > 1$ ve $m_1/m_2 < 1$ (Örneğin: Çelik (Yüksek rijitlik ve daha hafif)-Bakır (Düşük rijitlik ve yüksek yoğunluk))

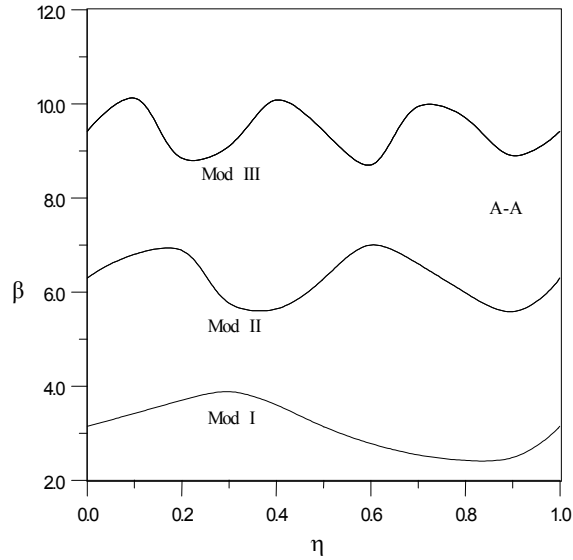
Şekil 2.4-2.9'da A-A sınır şartı için boyutsuz frekans parametreleri verilmiştir. Burada E_1 ve m_1 sırasıyla çubuğun sol tarafındaki Elastisite Modülünü ve yoğunluğunu, E_2 ve m_2 ise çubuğun sağ tarafındaki değerleri gösterir.

Şekil 2.4-2.6'da boyutsuz frekans parametreleri $E_1 > E_2$ ve $m_1 > m_2$ durumu için verilmektedir. Bu şekillere göre boyutsuz frekansların η ile değişiminin farklı

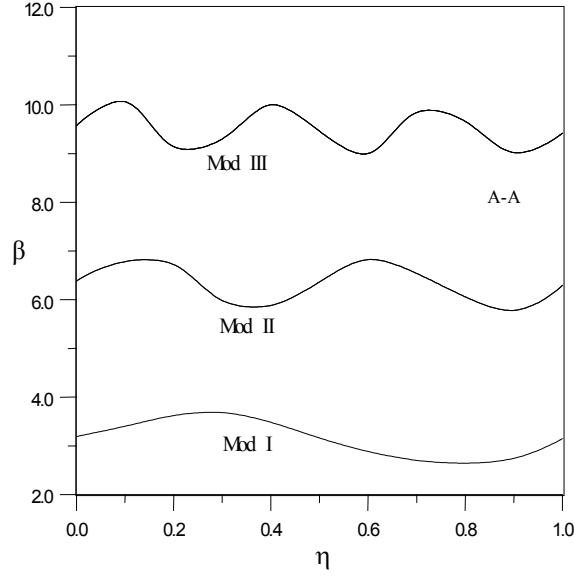
değerlerinde, değişik dalga şekilleri alır. Burada, $\eta=0$ ila 1 arasında birinci modda $\eta=0.3$, ikinci modda $\eta=0.2$ ve 0.6 , üçüncü modda $\eta=0.1$, 0.4 ve 0.75 değerlerinde en yüksek boyutsuz frekans parametresi elde edilir. Bu özellikleri bildiğimiz takdirde malzemede titreşim açısından iyileştirmeye gidilebilir.



Şekil 2.4. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$).

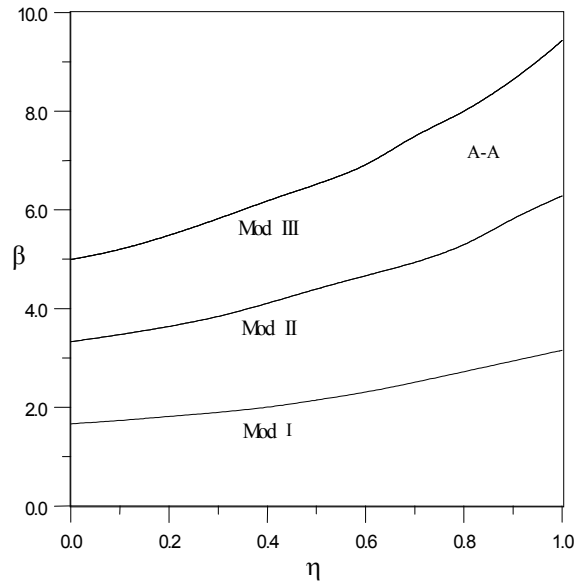


Şekil 2.5. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).

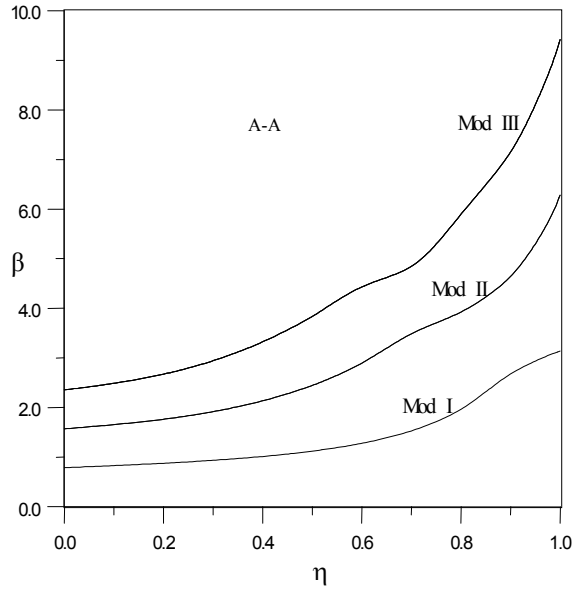


Şekil 2.6. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).

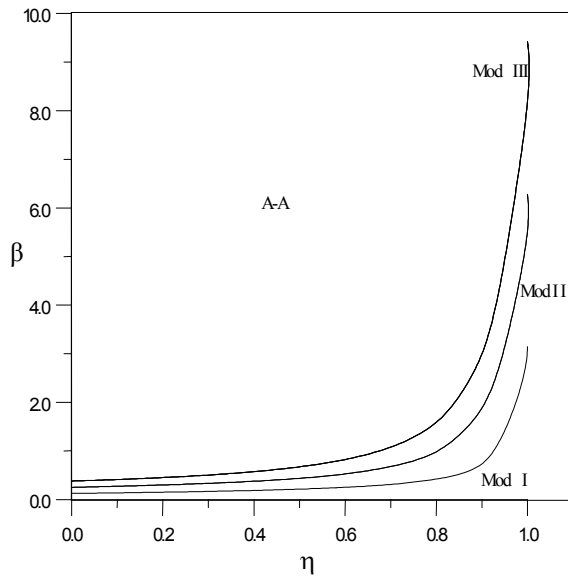
Şekil (2.7)-(2.9)'da A-A sınır şartlarında $E_1 > E_2$ ve $m_1 < m_2$ için boyutsuz frekanslar gösterilmiştir. Şekilden de anlaşılacağı üzere frekanslar η parametresinin artışıyla orantılı olarak monoton olarak artmaktadır.



Şekil 2.7. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).



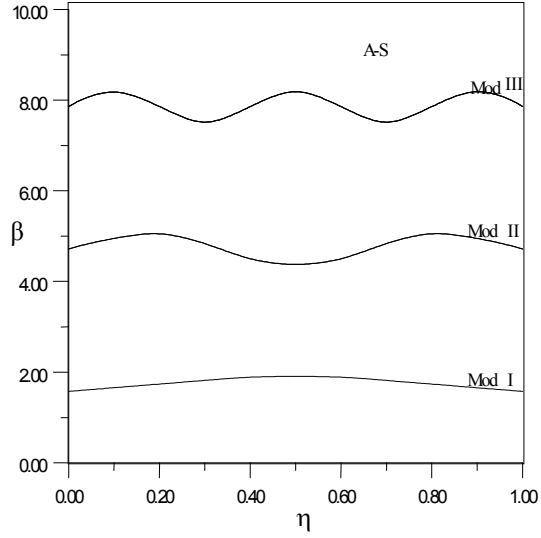
Şekil 2.8. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=1/2$).



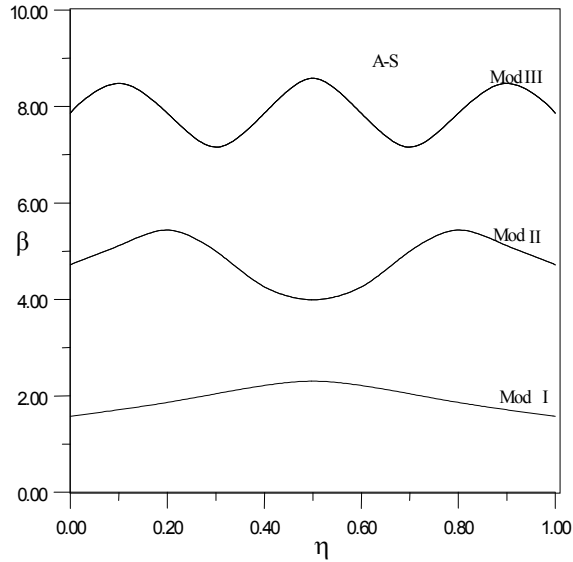
Şekil 2.9. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=1/5$).

Şekil 2.10-2.15’de A-S mesnetli çubukta boyutsuz frekans parametreleri değişimi gösterilmiştir. $E_1 > E_2$ ve $m_1 > m_2$ durumu için boyutsuz frekans parametresi incelenirse; A-A mesnetli çubuğun dalga değişimine çok benzer özelliktedir. Bu

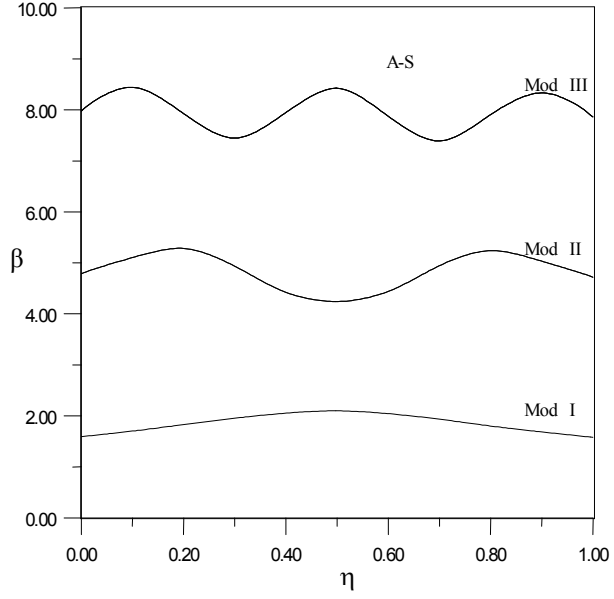
durumda frekans parametresi $\eta=0.5$ ' e göre simetrik olarak değişir. Gözümüze çarpan en önemli husus; birinci mod $\eta=0.5$ 'de, ikinci mod $\eta=0.2$ ve 0.8 'de, üçüncü modsa $\eta=0.1, 0.4$ ve 0.75 'te maksimumdur.



Şekil 2.10. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$).

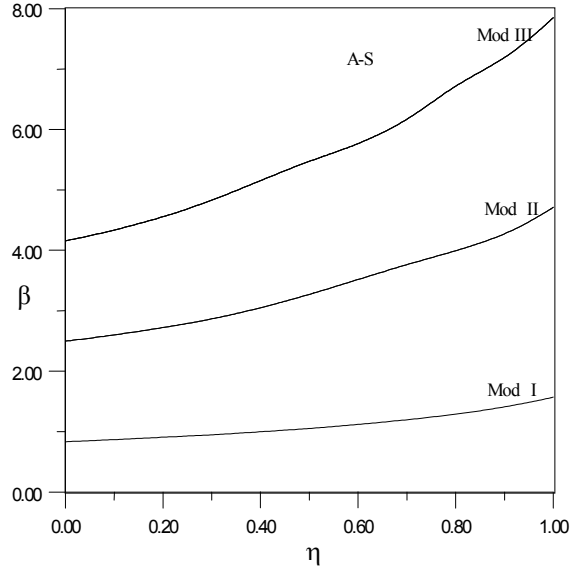


Şekil 2.11. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).

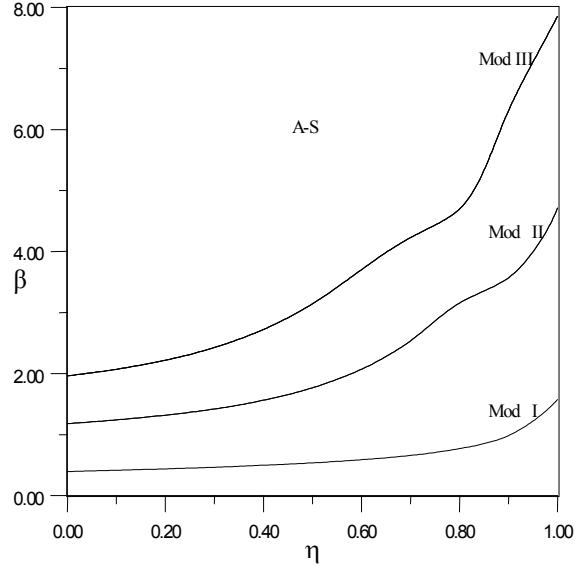


Şekil 2.12. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).

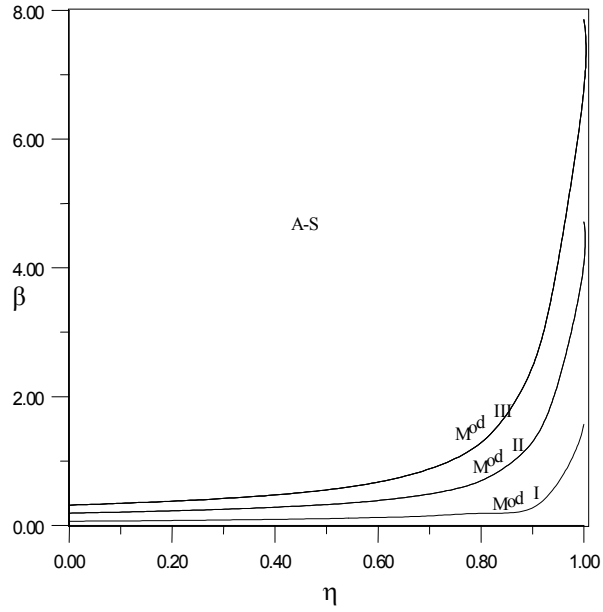
Şekil 2.13-2.15’de A-S mesnetli çubukta $E_1 > E_2$ ve $m_1 < m_2$ için boyutsuz frekans incelenirse A-A mesnetli çubukta olduğu gibi η artışına bağlı olarak monoton olarak arttığı görülebilir.



Şekil 2.13. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).

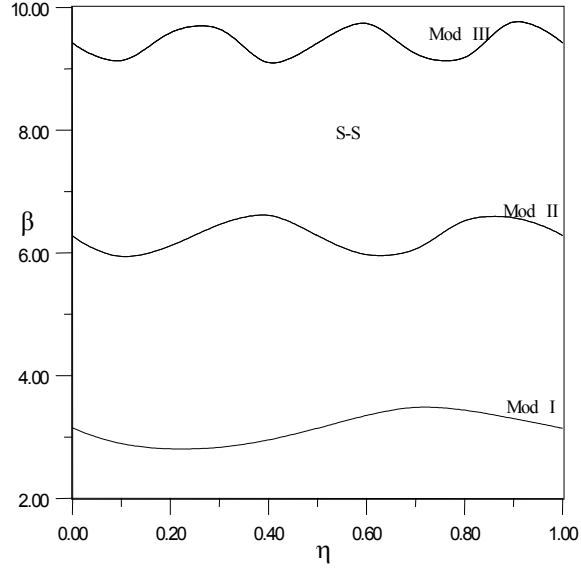


Şekil 2.14. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=1/2$).

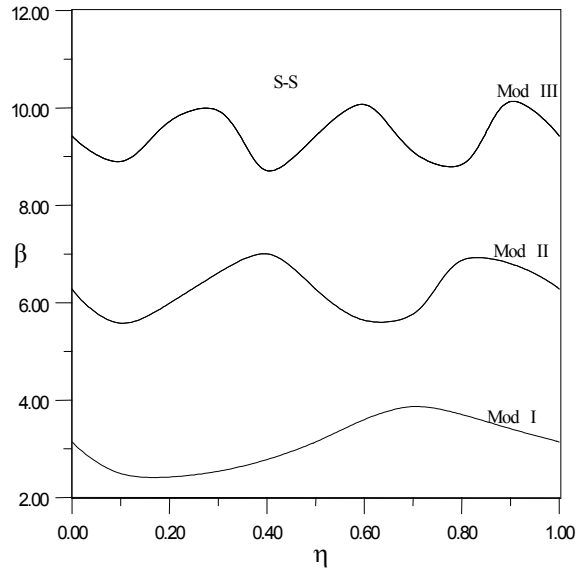


Şekil 2.15. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=1/5$).

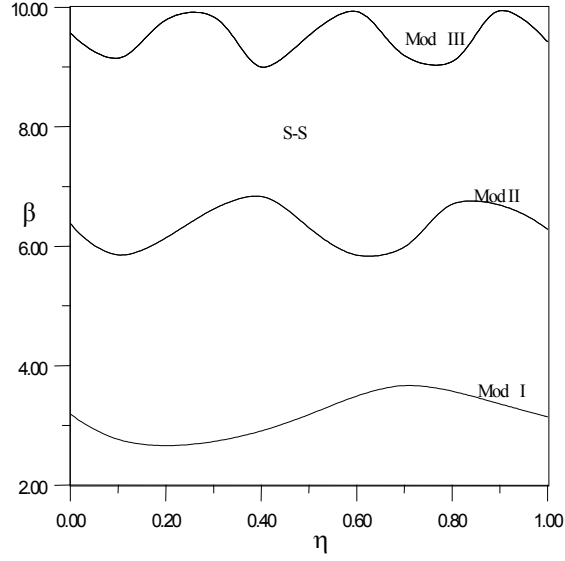
Şekil 2.16-2.21’de S-S mesnetli çubuk için boyutsuz frekans parametresi incelenirse, frekans değişimi A-A mesnetli çubuğa benzer niteliktedir. $E_1 > E_2$ ve $m_1 < m_2$ durumu için benzer davranışlar sergilemektedir. η parametresine bağlı olarak boyutsuz frekans parametresi değişim grafikleri aşağıdaki gibidir:



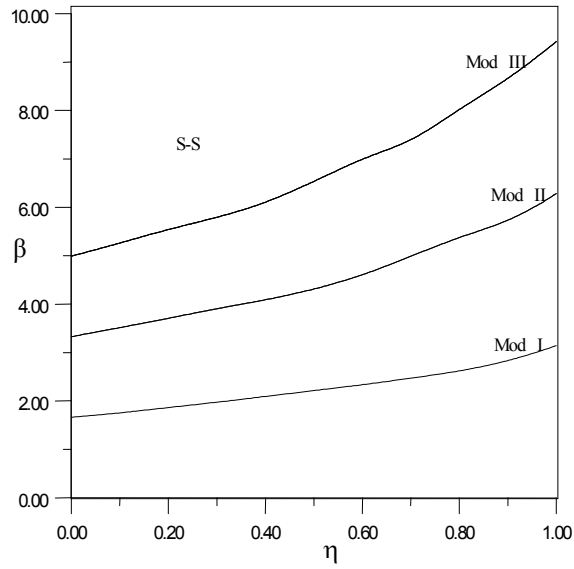
Şekil 2.16. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$).



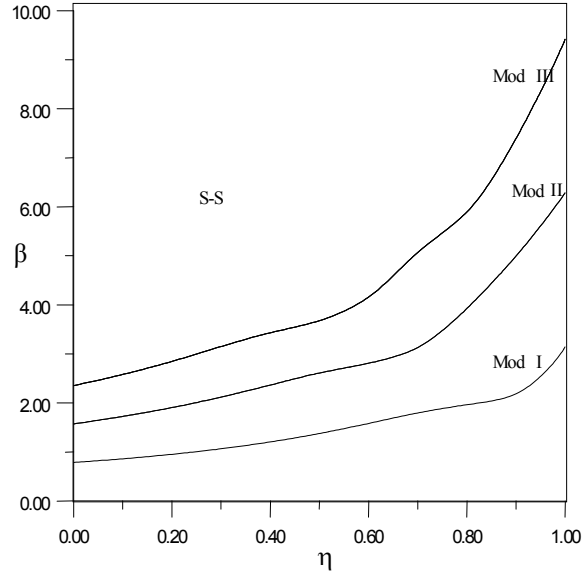
Şekil 2.17. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).



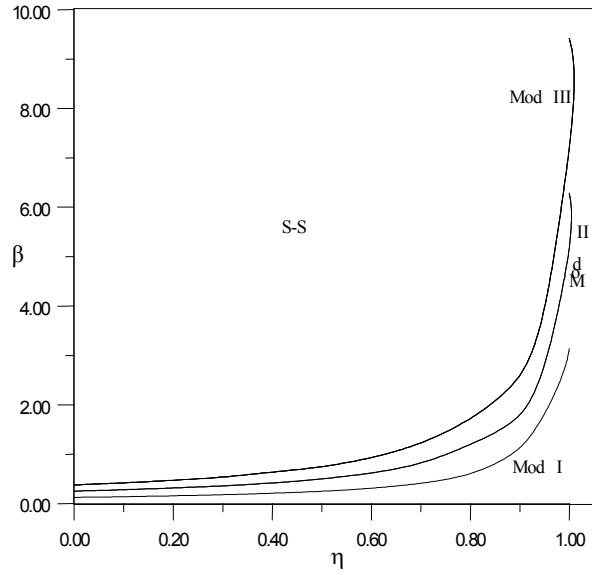
Şekil 2.18. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).



Şekil 2.19. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).



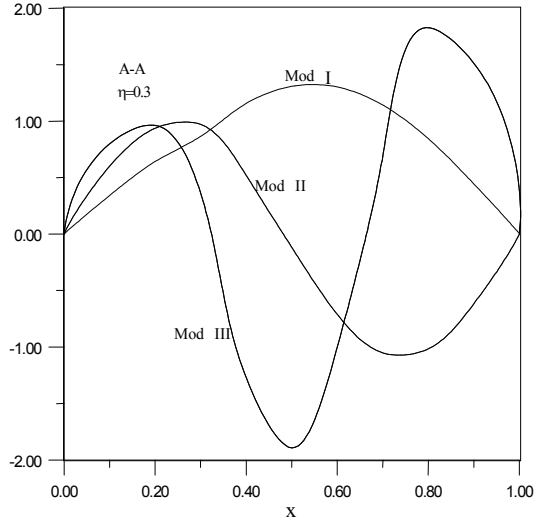
Şekil 2.20. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$ $m_1/m_2=1/2$).



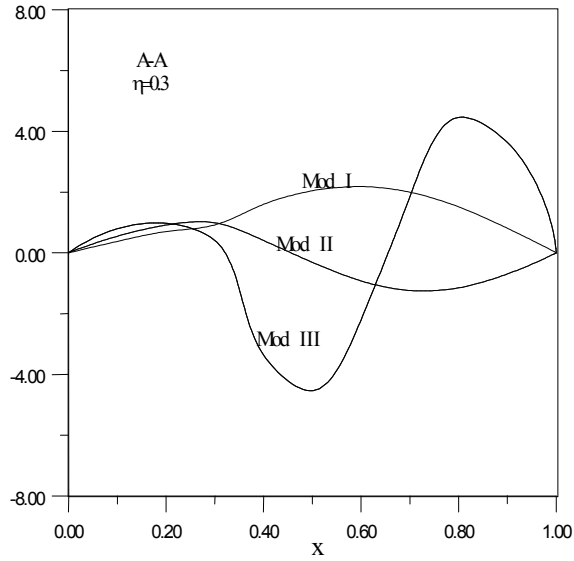
Şekil 2.21. Eksenel parçalı derecelendirilmiş S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$ $m_1/m_2=1/5$).

2.4.3. Mod Şekilleri

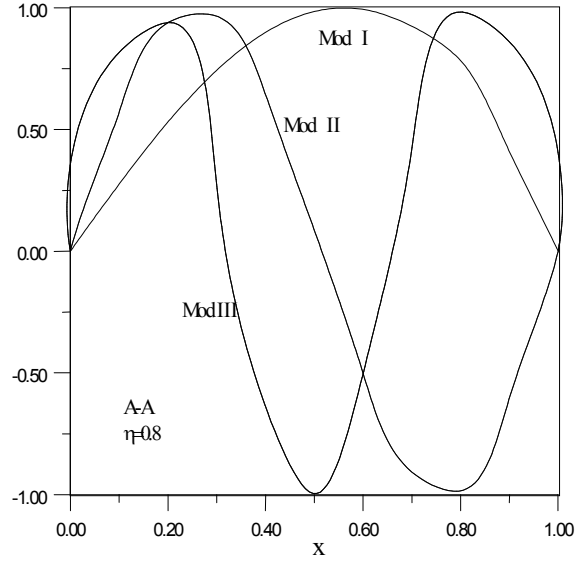
Bazı mod şekilleri Şekil.2.22-2.27'de verilmiştir. Mod şekillerinden ilgilendiğimiz iki parçalı çubuğun bağlantı noktaları kolayca gözlenmektedir.



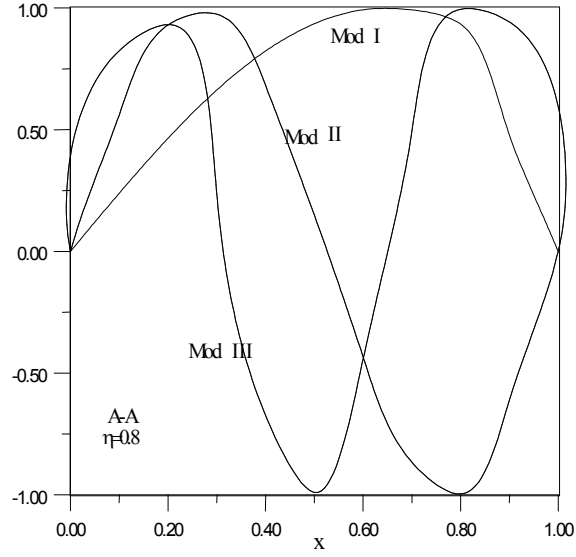
Şekil 2.22. EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



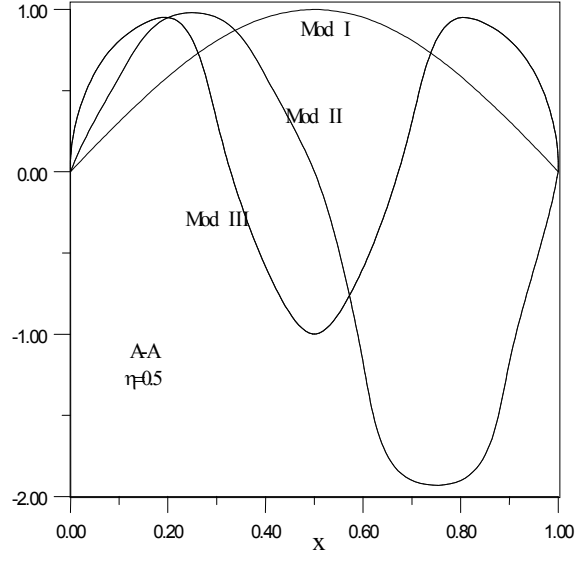
Şekil 2.23. EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



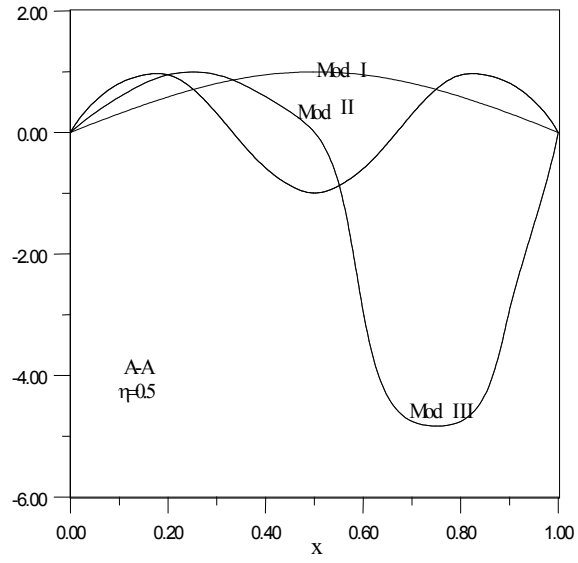
Şekil 2.24. EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



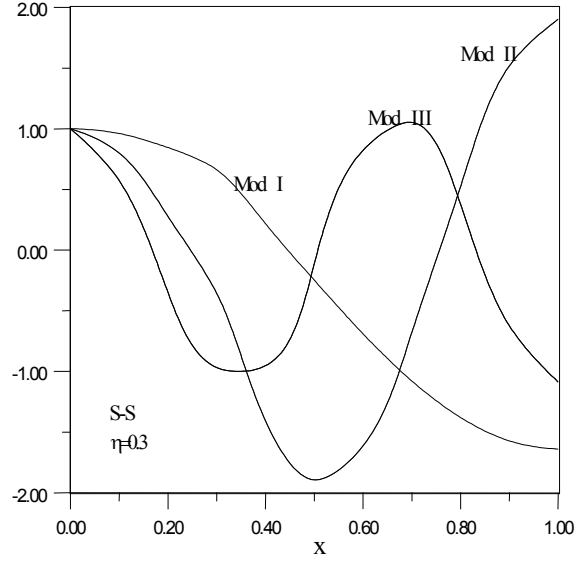
Şekil 2.25. EPDÇ'ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



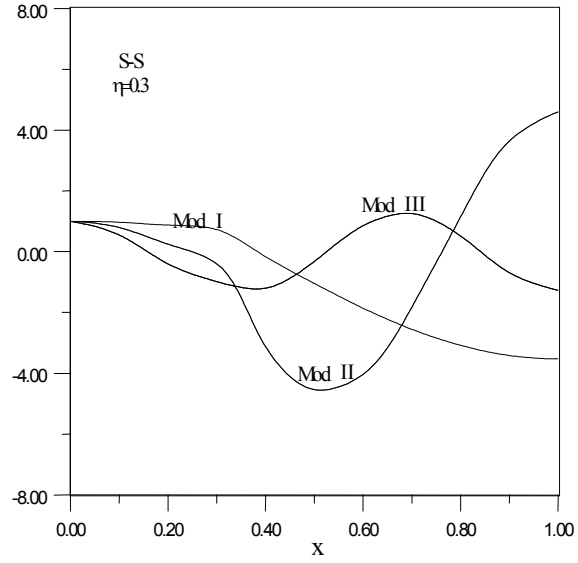
Şekil 2.26. EPDC’ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



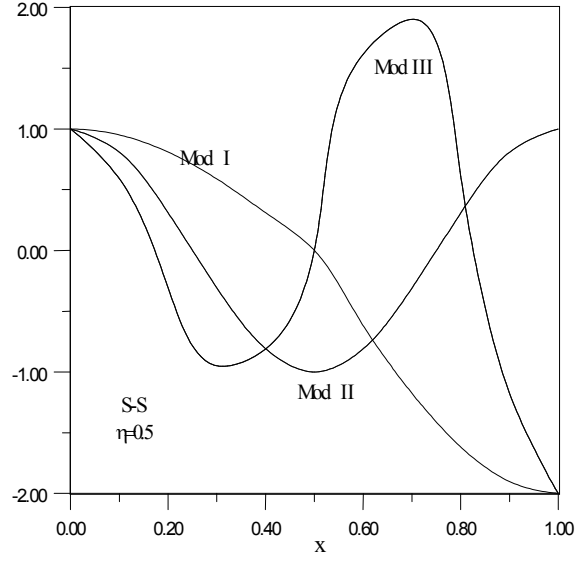
Şekil 2.27. EPDC’ta A-A sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



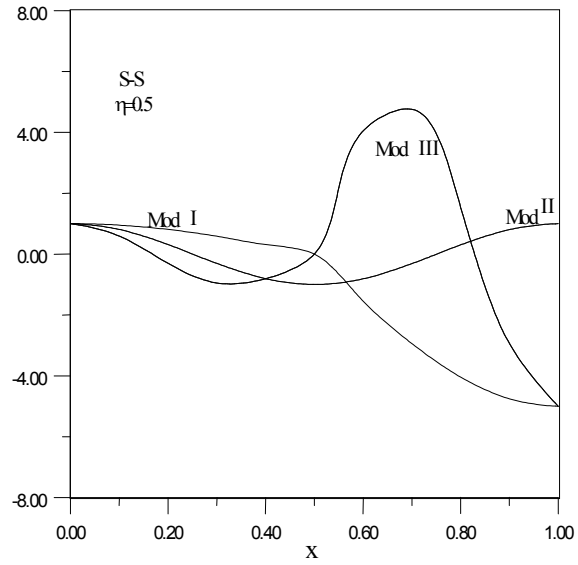
Şekil 2.28. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 = 2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



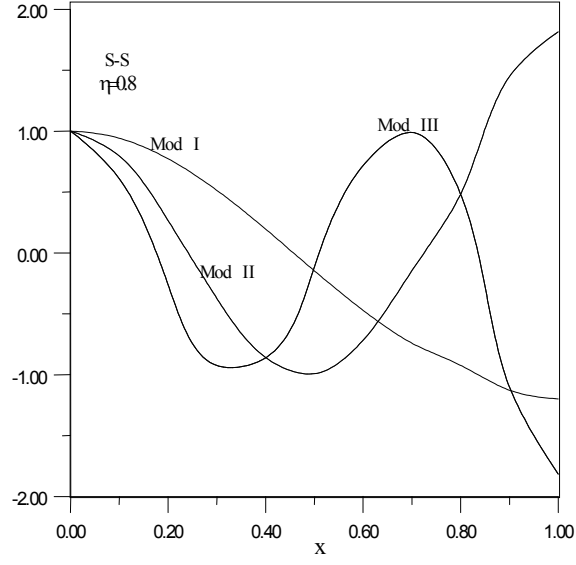
Şekil 2.29. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2 = 5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



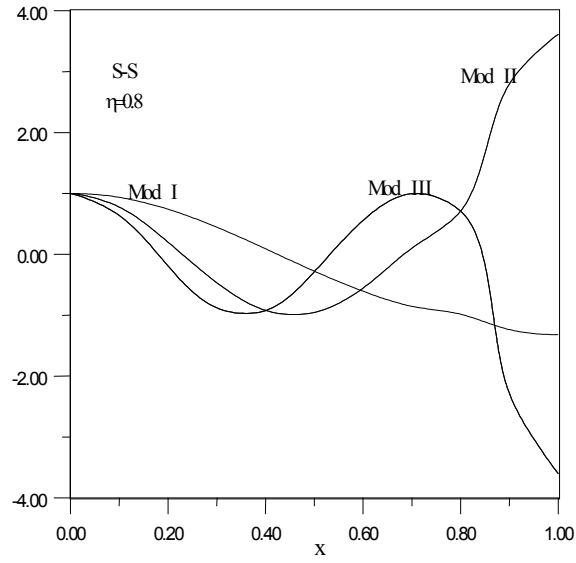
Şekil 2.30. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



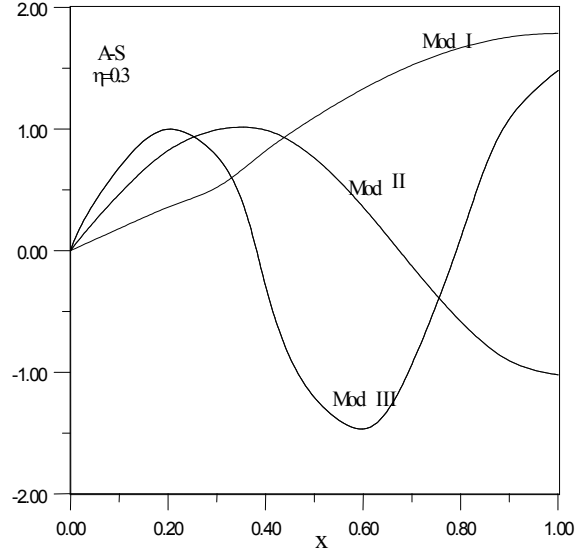
Şekil 2.31. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



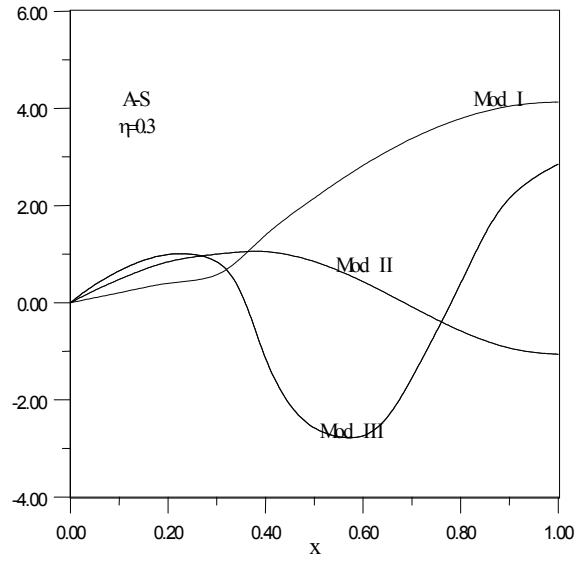
Şekil 2.32. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



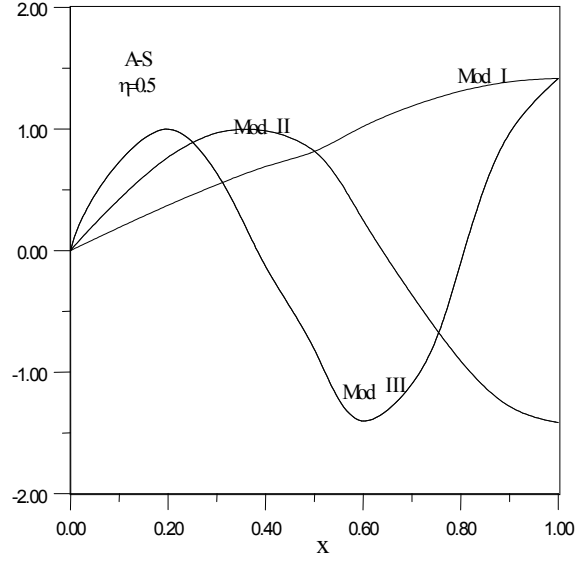
Şekil 2.33. EPDC’ta S-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



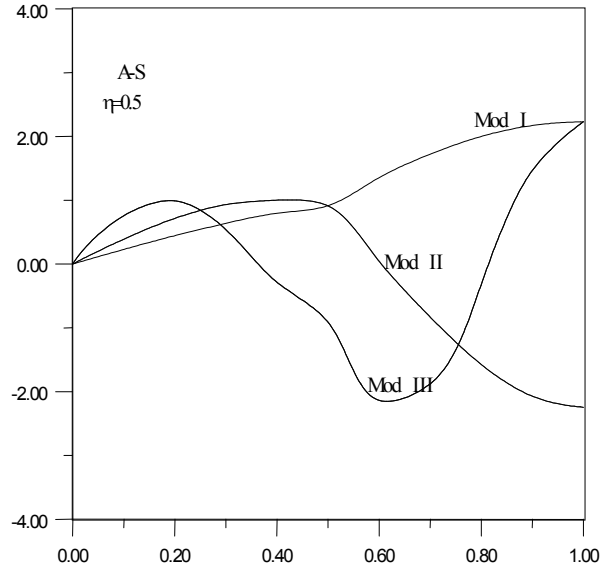
Şekil 2.34. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



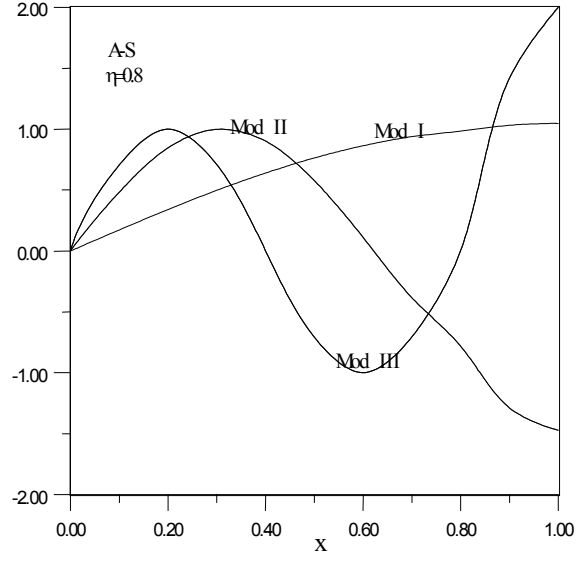
Şekil 2.35. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.3$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



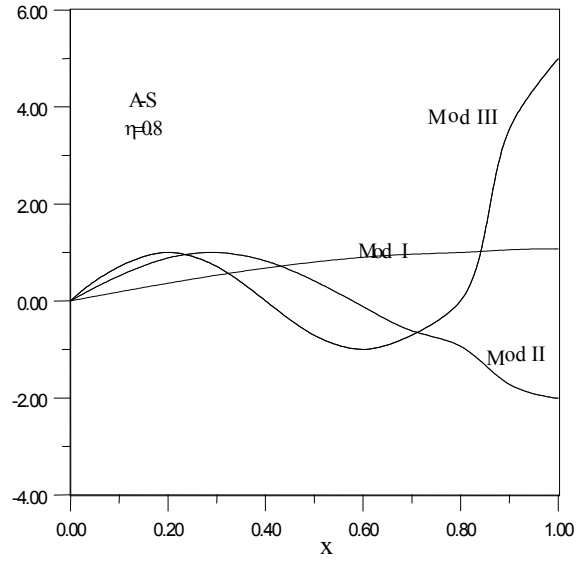
Şekil 2.36. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 = 2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



Şekil 2.37. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.5$ ($E_1/E_2 = 5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.



Şekil 2.38. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=2$, $m_1/m_2=2$) koşulunda ilk üç mod şekli.



Şekil 2.39. EPDC’ta A-S sınır şartlarında ve $\eta=0.8$ ($E_1/E_2=5$, $m_1/m_2=5$) koşulunda ilk üç mod şekli.

2.5. Eksenel Doğrultuda Elastisite Modülü Parabolik Değişen Yoğunluğu Sabit Olan Çubukların Titreşim Analizi

Düzgün olmayan bir çubuğa ait hareket denklemi en genel formda aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial x} [A(x)E(x) \frac{\partial u}{\partial x}] = \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Bir önceki konuda da belirtildiği üzere (2.4)'te $A(x)$ 'in değişmediği varsayılarak türevler alınıp harmonik titreşim kabulü ile düzenleme yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

Harmonik titreşim kabulü:

$$u(x,t) = F(x) \sin(\omega t) \quad (2.21)$$

$$E(x) \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{dE(x)}{dx} \frac{dF}{dx} + \omega^2 \rho(x) F = 0 \quad (2.22)$$

Burada;

$$E(x) = (ax + b)^2, \quad \rho(x) = \text{sabit} \quad (2.35)$$

$z=ax+b$ şeklinde yeni bir değişken tanımlanır ve bu değişken (2.22)'de yerine yazılırsa,

$$a^2 z^2 \frac{d^2 F}{dz^2} + 2a^2 z \frac{dF}{dz} + \beta^2 F = 0 \quad (2.36)$$

elde edilir.

(2.36)'da yeni bir dönüşüm uygulanırsa;

$$z = e^t, \quad t = \ln z \quad (2.37)$$

Dönüşüm sonucunda;

$$(D^2 + D + \frac{\beta^2}{a^2})F = 0 \quad (2.38)$$

Burada $D=d/dz$ olarak ifade edilir.

(2.38)'deki diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$F(x) = \frac{1}{ax+b} \left\{ C_1 \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta} \ln(ax+b)}{2} \right] + C_2 \cos \left[\frac{\sqrt{\Delta} \ln(ax+b)}{2} \right] \right\} \quad (2.39)$$

$\Delta = 1 - 4\beta^2 / a^2$ olarak tanımlanmıştır.

(2.12)'deki sınır şartları ve (2.35)'teki malzeme özelliklerini kullanarak homojen olmayan bu çubukta (2.39) çözülebilir. Çizelge 2.1'den 2.3'e kadar farklı sınır şartlarındaki aksenal çubuktaki frekans parametreleri aşağıda verilmektedir.

Çizelge 2.1. Üniform olmayan A-A çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 3.141 | 2.664 | 2.183 |
| 2 | 6.283 | 5.316 | 4.327 |
| 3 | 9.424 | 7.972 | 6.482 |

Çizelge 2.2. Üniform olmayan A-S çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | 1.571 | 1.685 | 0.590 |
| 2 | 4.714 | 6.161 | 2.324 |
| 3 | 7.854 | 10.681 | 4.251 |

Çizelge 2.3. Üniform olmayan S-S çubuğunun ($E=(ax+b)^2$, $m=sabit$) boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayini

| Mod | Üniform | $E_1/E_2 = 2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ |
|-----|---------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1 | 3.141 | 3.906 | 1.386 |
| 2 | 6.283 | 8.422 | 3.282 |
| 3 | 9.424 | 12.950 | 5.223 |

2.6. Ritz Metodu

Sürekli fonksiyonel derecelendirilmiş çubuk veya kirişlerin titreşim problemlerine ait denklemlerin analitik çözümü mümkün değildir. Bu yüzden sonlu elemanlar, sonlu farklar, diferansiyel kuadratür veya Ritz Metodu gibi sayısal yöntemler kullanılabilir.

Ritz Metodunda(Whitney), problem çözümünde, yerdeğiştirme alanı geometrik sınır şartlara uygun olmalıdır.

Çubuğun serbest titreşimi için yerdeğiştirme şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$u(x,t) = U(x) \sin \omega t \quad (2.40)$$

Bu çalışmada boyutsuz koordinatlar $\xi=x/L$ olarak belirlendikten sonra, yerdeğiştirme bileşeni aşağıdaki formda seçilmiştir:

$$U(\xi) = \sum_{m=m_0}^M C_m \xi^m (\xi-1)^p \quad (2.41)$$

C_m belirsiz sabitleri göstermektedir. p 'yi 0 veya 1 seçmek sırayla, serbest ve ankastre sınır şartlarını ifade etmektedir. Ritz Metodu'nda geometrik sınır koşullarını sağlayan

yer değiştirme bileşenleri kullanılır. Bu kinematik sınır şartlarıyla ilgili şartlar (2.12)'de daha önce gösterilmiştir. Kinematik koşullar Ritz Metoduna uygun olarak izelge 2.4'de verilmiştir.

Çizelge 2.4. ubuk için kinematik koşullar.

| Sınır Koşulu Tipi | $x=0,1$ 'da |
|-------------------|-------------|
| A | $u = 0$ |
| S | $u \neq 0$ |

Ritz metodu aksenal derecelendirilmiş çubuklar için 3 farklı sınır koşulunu uygulanmaktadır. A-A, A-S ve S-S. Uygun başlangıç indisleri (2.36)'ya göre seçilerek kinematik sınır şartlarına uygulanmaktadır.

Çizelge 2.5. (2.36)'daki başlangıç indisleri

| Sınır Koşulu Tipi | m_0 |
|-------------------|-------|
| A | 1 |
| S | 0 |

Serbest titreşim problemleri çözümünde, (2.36) ve (2.35), (2.8) ve (2.9)'da yerine koyulup, Türev alabilmek için Ritz metodu ($T_{\max}-U_{\max}$) fonksiyoneli aşağıdaki gibi minimize edilirse;

$$\frac{\partial(T_{\max} - U_{\max})}{\partial C_m} = 0 \quad m = m_0, \dots, M$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int m(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int E(x) A(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$
(2.42)

elde edilir.

$M \times M$ adet, lineer ve homojen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi olarak yazılabilir.

$$(K - \beta^2 M) \Delta = 0$$
(2.43)

Burada, (2.43)'de K ve M sırasıyla katılık ve kütle matrisleridir. β , frekans parametresi ve Δ bilinmeyen sabitlerin (C_m) vektörüdür. Özdeğer probleminde katsayılar determinantı sıfıra eşittir. Her bir özdeğer, (2.39)'da yerine koyulursa, özdeğer vektörü veya genlik değerleri elde edilmiş olur. Mod şekilleri her frekansta, (2.39)'da gösterildiği gibi özdeğer vektörlerine karşılık gelmektedir.

Çizelge 2.6.'da frekans parametresi β 'nın ilk üç değeri verilmiştir. Frekans değerlerini incelersek, 5 ve 6'da kullanılan terimlere kadar değerler birbirine çok yakındır. Bundan ötürü, bu çalışmada 6 terim kullanılacaktır. Burada bulduğumuz frekans değerleri, analitik sonuçlarla kıyaslandığında çok yakın değerler elde edilmektedir.

Çizelge 2.6. Ünlform ve üniform olmayan çubuk için S-S sınır şartlarında boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayininde yakınsama çalışması

| M | Ünlform çubuk | | | E ₁ /E ₂ =5, m ₁ /m ₂ =5 | | |
|--------------------|---------------|-----------|-----------|--|-----------|-----------|
| | β_1 | β_2 | β_3 | β_1 | β_2 | β_3 |
| 4 | 3.1424 | 7.7460 | 13.042 | 3.3931 | 7.6191 | 13.1865 |
| 5 | 3.1424 | 6.3061 | 13.042 | 3.3887 | 6.4812 | 12.5457 |
| 6 | 3.1416 | 6.3057 | 9.5381 | 3.3886 | 6.4567 | 9.6632 |
| 7 | 3.1415 | 6.2837 | 9.5371 | 3.3885 | 6.4572 | 9.6632 |
| (Tse ve ark. 1978) | 3.141593 | 6.283185 | 9.424778 | - | - | - |

Farklı sınır koşullarında ve farklı malzeme özelliklerinde aksnel derecelendirilmiş çubuğun boyutsuz frekans parametrelerinin yakınsama çalışmasıyla hesabı Çizelge 2.7-2.9'da gösterilmektedir. Frekans parametreleri A-A sınır şartları için azalmaktadır.

Çizelge 2.7. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-A çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 3.141 | 3.123 | 3.052 | 2.155 | 1.226 |
| 2 | 6.283 | 6.274 | 6.229 | 4.345 | 2.532 |
| 3 | 9.424 | 9.458 | 9.430 | 6.677 | 3.876 |

Çizelge 2.8. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 1.571 | 1.793 | 2.057 | 1.093 | 0.658 |
| 2 | 4.714 | 4.803 | 4.987 | 3.265 | 1.916 |
| 3 | 7.854 | 7.962 | 8.064 | 5.488 | 3.390 |

Çizelge 2.9. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan S-S çubuğunun boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 3.141 | 3.196 | 3.388 | 2.203 | 1.343 |
| 2 | 6.305 | 6.331 | 6.457 | 4.375 | 2.656 |
| 3 | 9.538 | 9.557 | 9.663 | 6.976 | 4.487 |

BÖLÜM 3

KİRİŞLER

3.1. Giriş

Kirişler mühendislik uygulamalarında örnek olarak: makine, inşaat, gemi inşaatı ve havacılık mühendisliğinde sıkça kullanılan bir yapı elemanıdır. Uygulamada dinamik kuvvetler kirişlerde etkili olur. Bu yüzden kirişlerin dinamik davranışları mühendislik problemleri için önemlidir. Eksenel derecelendirilmiş kirişler bu uygulamalardaki yeni yaklaşımdır. Kirişlerde geometrinin veya malzeme özelliklerinin değişimi, mühendisler için yeni tasarım seçenekleri yaratmaktadır.

Burada, 2. bölümde çubuk için incelendiğimiz eksenel derecelendirilmiş çubuk, kiriş için incelenmektedir. İlk olarak, kirişin hareket denklemini yazacağız. Daha sonra parçalı ve sürekli derecelendirilmiş eksenel kirişin yönetici denklemini çözülmektedir. En sonunda boyutsuz frekanslar değişik sınır koşullarında bulunmaktadır.

3.2. Newton Metodu

Üniform olmayan kiriş için geometrik ve malzeme özelliklerinin ele alalım. Uzunluğu dx ve kütleyi $mAdx$ alırsak,

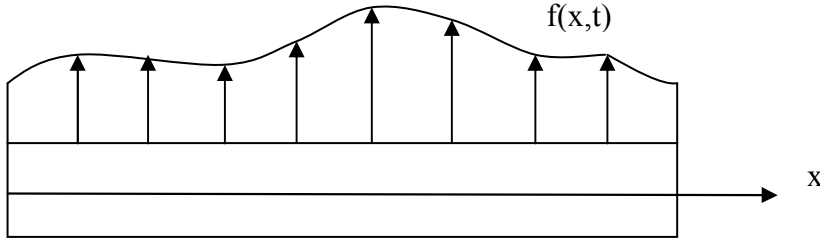
Newton'un ikinci yasası düşey ekseninde uygulanırsa,

$$\left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] - V(x,t) + f(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \quad (3.1)$$

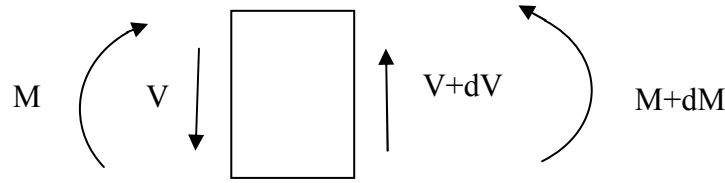
elde edilir.

z eksenine göre moment yazılırsa,

$$\left[M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx \right] - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.2)$$



Şekil 3.1. Genel yayılı yüklü kiriş



Şekil 3.2. Kirişin hacim elemanı ve kesit tesirleri

(3.2)'yi çözersek;

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) = 0, \quad 0 < x < L \quad (3.3)$$

(3.1) ve (3.3) birleştirilir ve düzenlenirse,

$$-\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad (3.4)$$

Eğilme momenti, yerdeğiştirme ilişkisi incelenirse,

$$M(x,t) = E(x)I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad (3.5)$$

(3.3) kullanılarak kesme kuvveti aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad 0 < x < L \quad (3.6)$$

(3.5), (3.4)'te yerine yazılırsa, üniform olmayan malzemenin parçalı diferansiyel denkleminde titreşim denklemi elde edilir.

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L \quad (3.7)$$

Eğer Atalet Momenti(I) sabit alınırsa,

$$IE \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2 \frac{dE}{dx} I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + I \frac{d^2 E}{dx^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) = -\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L$$

(3.8)

Bu denklem üniform olmayan kirişlerin hareket denklemdir. Ek olarak E(x)'I sabit alırsak, bu denklem üniform kirişlere ait hareket denklemini verir.

$$-EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

3.3. Virtüel İşler Prensibi

Hamilton prensibi kullanarak yönetici denklemi şu şekilde yazılmaktadır,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W) dt = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.10)$$

T kinetik enerjidir,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x)A \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]^2 dx \quad (3.11)$$

V potansiyel enerjidir,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E(x)I \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (3.12)$$

ve W düşey kuvvetin yaptığı iş değerini verir.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L f(x,t) w dx \quad (3.13)$$

(3.11-3.13), (3.10)'da yazılırsa, (3.9)'u yönetecek sınır şartları elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0 \quad yada \quad \delta w = 0 \quad (3.14a)$$

$$(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0 \quad yada \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.14b)$$

Bu koşullar için klasik sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanır.

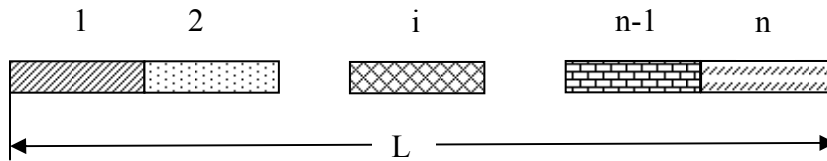
$$\text{Basit Destekli(B): } w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{Ankastre(A): } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\text{Serbest(S): } \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0 \quad (3.15)$$

3.4. Eksenel Parçalı Derecelendirilmiş Kirişler(EPDK)

n parçalı eksenel derecelendirilmiş kiriş ele alınsın (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Eksenel parçalı derecelendirilmiş kiriş

Herbir parça EPDK için hareket denklemi şu şekilde yazılır,

$$IE_i \frac{d^4 w_i}{dx^4} - m_i \omega^2 w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

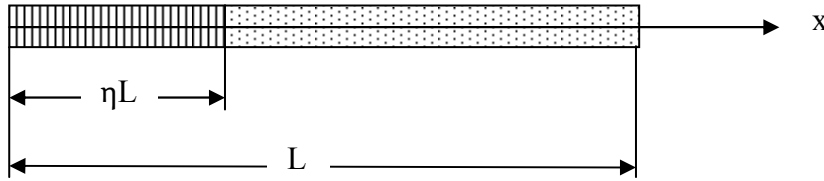
n , kirişteki eleman sayısını ifade eder.

(3.16)'nın çözümünde sınır şartları (3.15)'te verilmiştir. Bu sınır koşulları iki parçalı bir kirişe uygun olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
 w_j &= w_{j+1}, \\
 \frac{\partial w_j}{\partial x} &= \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x}, \\
 E_j I_j \frac{\partial w_j}{\partial x} &= E_{j+1} I_{j+1} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x}, \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(E_j I_j \frac{\partial w_j}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_{j+1} I_{j+1} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} \right) \quad j = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17)'deki sınır şartları (3.16)'da uygulanırsa, EPDK için serbest titreşim frekans değerleri bulunabilir.

İki parçalı bir EPDK aşağıdaki şekilde gösterilir.



Şekil 3.4. Eksenel iki parçalı derecelendirilmiş kiriş

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \beta^4 w_1 &= 0, \\
 \frac{d^4 w_2}{dx^4} + \gamma^4 \beta^4 w_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Burada,

$$\beta^4 = \frac{m_1 \omega^2 L^4}{E_1 I_1}, \quad \gamma^4 = \alpha_m \alpha_E, \quad \alpha_m = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{and} \quad \alpha_E = \frac{E_1}{E_2} \tag{3.19}$$

(3.17)'nin genel çözümü şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= A_1 \sin(\beta x) + B_1 \cos(\beta x) + C_1 \sinh(\beta x) + D_1 \cosh(\beta x), \\
 w_2(x) &= A_2 \sin(\beta x) + B_2 \cos(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + D_2 \cosh(\beta x),
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır.

A_i, B_i, C_i ve D_i ($i=1$ ve 2) kararsız sabitlerdir.

Bu bölümde EPDK'nin titreşiminde B-B, A-A ve A-S sınır şartında çalışılmaktadır.

(3.18)'deki sekiz homojen denklemden, (3.20)'de gördüğümüz üzere sekiz bilinmeyen sabit elde edilir. Her bir sınır şartı için karakteristik denklemler aşağıda gösterilmektedir.

B-B sınır şartları için:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & S(\gamma\beta) & C(\gamma\beta) & SH(\gamma\beta) & CH(\gamma\beta) \\
 0 & 0 & -\gamma^2\beta^2 S(\gamma\beta) & -\gamma^2\beta^2 C(\gamma\beta) & \gamma^2\beta^2 SH(\gamma\beta) & \gamma^2\beta^2 CH(\gamma\beta) \\
 S(\beta\eta) & SH(\beta\eta) & -S(\gamma\beta\eta) & -C(\gamma\beta\eta) & -SH(\gamma\beta\eta) & -CH(\gamma\beta\eta) \\
 \beta C(\beta\eta) & \beta CH(\beta\eta) & -\gamma\beta C(\gamma\beta\eta) & \gamma\beta S(\gamma\beta\eta) & -\gamma\beta CH(\gamma\beta\eta) & -\gamma\beta SH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1\beta^2 S(\beta\eta) & E_1\beta^2 SH(\beta\eta) & E_2\gamma^2\beta^2 S(\gamma\beta\eta) & E_2\gamma^2\beta^2 C(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^2\beta^2 SH(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^2\beta^2 CH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1\beta^3 C(\beta\eta) & E_1\beta^3 CH(\beta\eta) & E_2\gamma^3\beta^3 C(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 S(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 CH(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 SH(\gamma\beta\eta)
 \end{vmatrix} = 0$$

(3.21)

Burada, $S=\sin$, $C=\cos$, $SH=\sinh$ ve $CH=\cosh$ şeklinde tanımlanmıştır.

A-A sınır şartları için:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & S(\gamma\beta) & C(\gamma\beta) & SH(\gamma\beta) & CH(\gamma\beta) \\
 0 & 0 & \gamma\beta C(\gamma\beta) & -\gamma\beta S(\gamma\beta) & \gamma\beta CH(\gamma\beta) & \gamma\beta SH(\gamma\beta) \\
 S(\beta\eta)-SH(\beta\eta) & C(\beta\eta)-CH(\beta\eta) & -S(\gamma\beta\eta) & -C(\gamma\beta\eta) & -SH(\gamma\beta\eta) & -CH(\gamma\beta\eta) \\
 \beta C(\beta\eta)-CH(\beta\eta) & -\beta S(\beta\eta)-\beta SH(\beta\eta) & -\gamma\beta C(\gamma\beta\eta) & \gamma\beta S(\gamma\beta\eta) & -\gamma\beta CH(\gamma\beta\eta) & -\gamma\beta SH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1\beta^2 S(\beta\eta)-E_1\beta^2 SH(\beta\eta) & -E_1\beta^2 C(\beta\eta)-E_1\beta^2 CH(\beta\eta) & E_2\gamma^2\beta^2 S(\gamma\beta\eta) & E_2\gamma^2\beta^2 C(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^2\beta^2 SH(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^2\beta^2 CH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1\beta^3 C(\beta\eta)-E_1\beta^3 CH(\beta\eta) & E_1\beta^3 S(\beta\eta)-E_1\beta^3 SH(\beta\eta) & E_2\gamma^3\beta^3 C(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 S(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 CH(\gamma\beta\eta) & -E_2\gamma^3\beta^3 SH(\gamma\beta\eta)
 \end{vmatrix} = 0$$

(3.22)

A-S sınır şartları için:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 0 & -\gamma^2 \beta^2 S(\gamma\beta) & -\gamma^2 \beta^2 C(\gamma\beta) & \gamma^2 \beta^2 SH(\gamma\beta) & \gamma^2 \beta^2 CH(\gamma\beta) \\
 0 & 0 & -\gamma^3 \beta^2 C(\gamma\beta) & -\gamma^3 \beta^2 S(\gamma\beta) & \gamma^3 \beta^2 CH(\gamma\beta) & \gamma^3 \beta^2 SH(\gamma\beta) \\
 S(\beta\eta) - SH(\beta\eta) & C(\beta\eta) - CH(\beta\eta) & -S(\gamma\beta\eta) & -C(\gamma\beta\eta) & -SH(\gamma\beta\eta) & -CH(\gamma\beta\eta) \\
 \beta C(\beta\eta) - CH(\beta\eta) & -\beta S(\beta\eta) - \beta SH(\beta\eta) & -\gamma \beta C(\gamma\beta\eta) & \gamma \beta S(\gamma\beta\eta) & -\gamma \beta CH(\gamma\beta\eta) & -\gamma \beta SH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1 \beta^2 S(\beta\eta) - E_1 \beta^2 SH(\beta\eta) & -E_1 \beta^2 C(\beta\eta) - E_1 \beta^2 CH(\beta\eta) & E_2 \gamma^2 \beta^2 S(\gamma\beta\eta) & E_2 \gamma^2 \beta^2 C(\gamma\beta\eta) & -E_2 \gamma^2 \beta^2 SH(\gamma\beta\eta) & -E_2 \gamma^2 \beta^2 CH(\gamma\beta\eta) \\
 -E_1 \beta^2 C(\beta\eta) - E_1 \beta^2 CH(\beta\eta) & E_1 \beta^2 S(\beta\eta) - E_1 \beta^2 SH(\beta\eta) & E_2 \gamma^3 \beta^2 C(\gamma\beta\eta) & -E_2 \gamma^3 \beta^2 S(\gamma\beta\eta) & -E_2 \gamma^3 \beta^2 CH(\gamma\beta\eta) & -E_2 \gamma^3 \beta^2 SH(\gamma\beta\eta)
 \end{vmatrix} = 0$$

(3.23)

Şunları not etmekte yarar vardır: B-B’de $C_1=0$ ve A-A ve A-S’de $C_2=0$ ’dır.

3.5. EPDK için Sayısal Sonuçlar ve Yorum

Farklı sınır koşulları ve farklı E_1/E_2 , m_1/m_2 oranları için EPDK’de boyutsuz frekans parametreleri grafik olarak Şekil 3.5-3.22’de gösterilmektedir. $\eta=0$ olduğu sol uçta boyutsuz frekans parametresi sol uçtaki üniform malzemenin özelliklerini göstermektedir.

Aşağıdaki kurallara göre malzemeleri gruplandırırız:

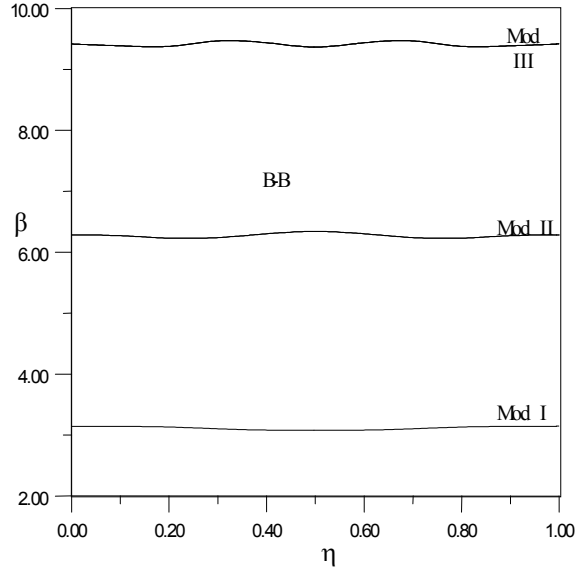
Malzeme I : $E_1/E_2 > 1$ ve $m_1/m_2 > 1$ (Örnek: Çelik (Yüksek rijitlik ve yoğunluk)-Alüminyum (Düşük rijitlik ve yoğunluk))

Malzeme II : $E_1/E_2 > 1$ ve $m_1/m_2 < 1$ (Örnek: Çelik (Yüksek rijitlik, düşük yoğunluk)-Bakır (Düşük rijitlik, yüksek yoğunluk))

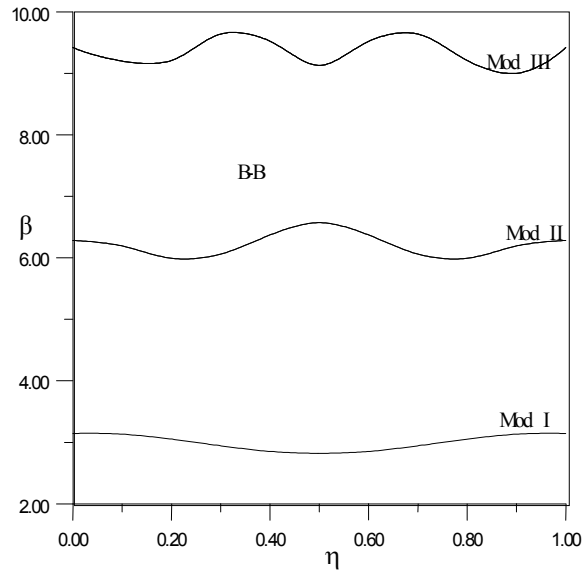
Şekil 3.5-3.10’da boyutsuz frekans parametreleri B-B sınır koşulları için verilmektedir. Burada E_1 ve m_1 sırasıyla, sol uçtaki Elastisite modülü ve yoğunluğu; E_1 ve m_1 sağ uçtaki özellikleri göstermektedir.

$E_1 > E_2$ ve $m_1 > m_2$ durumunda, boyutsuz frekanslar Şekil 3.5-3.7 verilmektedir. Bu şekillere göre, boyutsuz frekansındaki değişim η parametresine bağlıdır. EPDK ile EPDC değerlerini kıyasladığımızda birbirinden farklı frekans değerleri bulunur. Yüksek

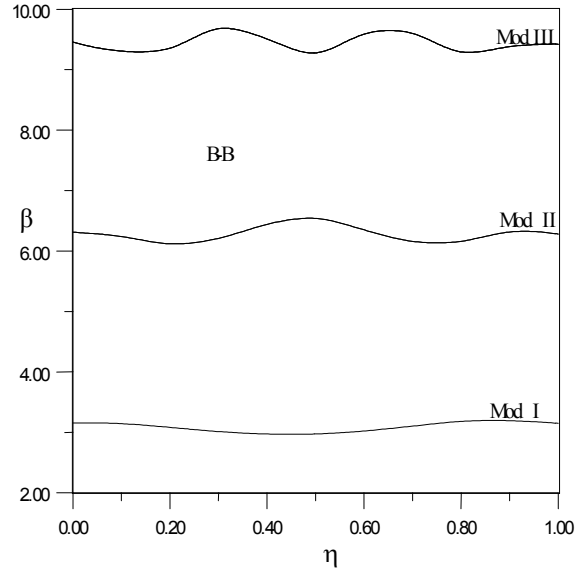
modlarda en yüksek frekanslar değişik η değerlerinde gözlenir. Frekans parametreleri $\eta=0.5$ 'e göre simetrik sonuçlar vermektedir. Frekans parametrelerindeki bu salınım davranışı optimizasyon amaçlı kullanılabilir.



Şekil 3.5. Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=2$).

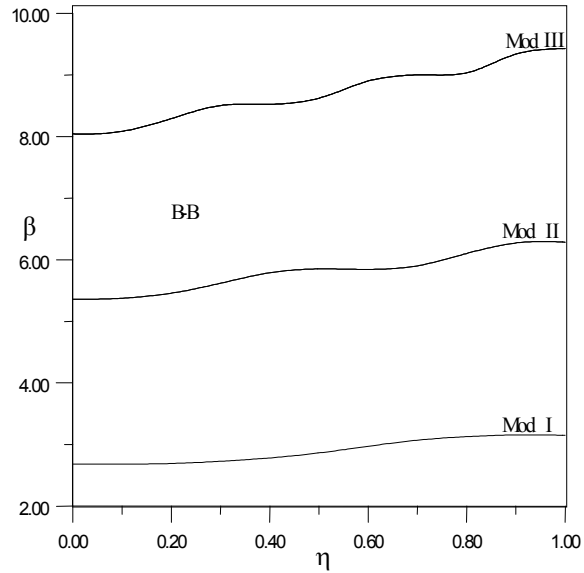


Şekil 3.6. Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).

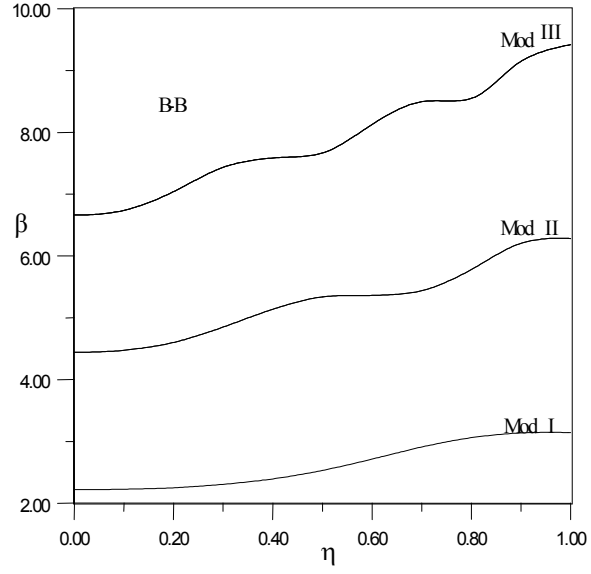


Şekil 3.7. Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).

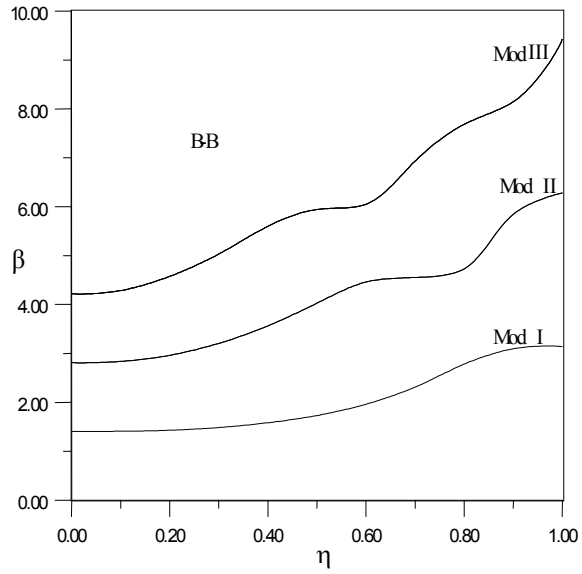
B-B sınır şartları için $E_1>E_2$ ve $m_1<m_2$ koşullarında boyutsuz frekans parametreleri Şekil 3.8-3.10'da gösterilmektedir. Boyutsuz frekans parametresi η 'in artışıyla monoton olarak artmaktadır.



Şekil 3.8. Eksenel parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).

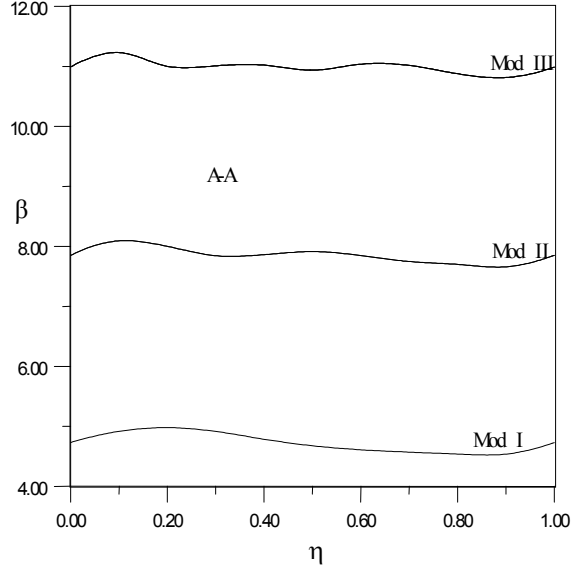


Şekil 3.9. Aksenal parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=0.5$).

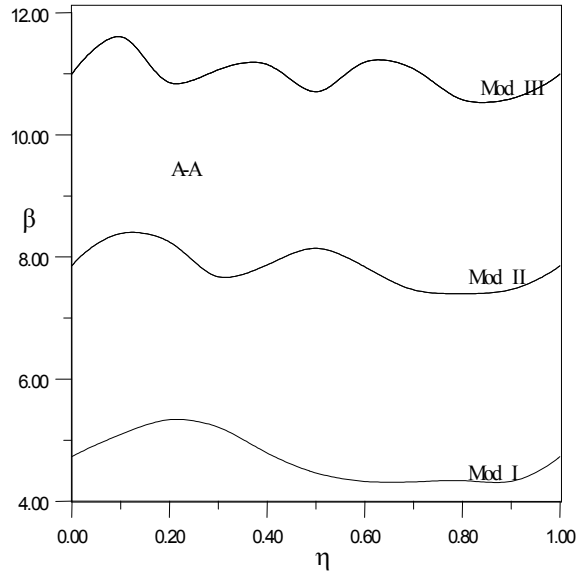


Şekil 3.10. Aksenal parçalı derecelendirilmiş B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$).

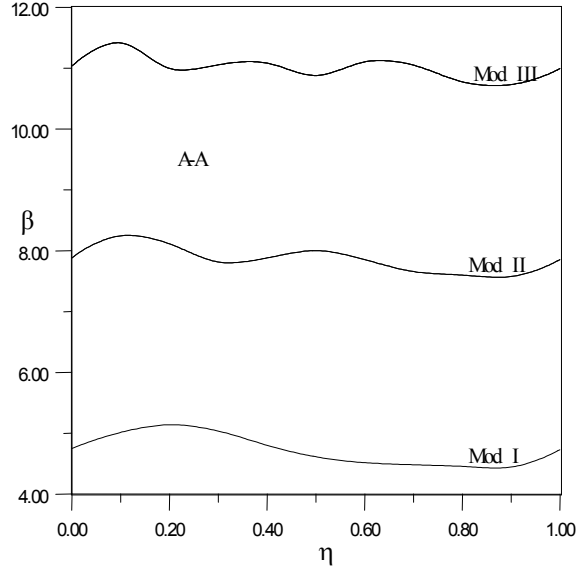
Şekil 3.11-3.16'da boyutsuz frekans parametreleri A-A sınır şartları için verilmiştir. Şekil 3.11-3.13'de boyutsuz frekanslar $E_1 > E_2$ ve $m_1 > m_2$ koşulu için bulunmaktadır. Bu şekillerden de görüldüğü üzere A-A sınır şartları B-B sınır şartlarına benzerlik gösterir.



Şekil 3.11. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$).

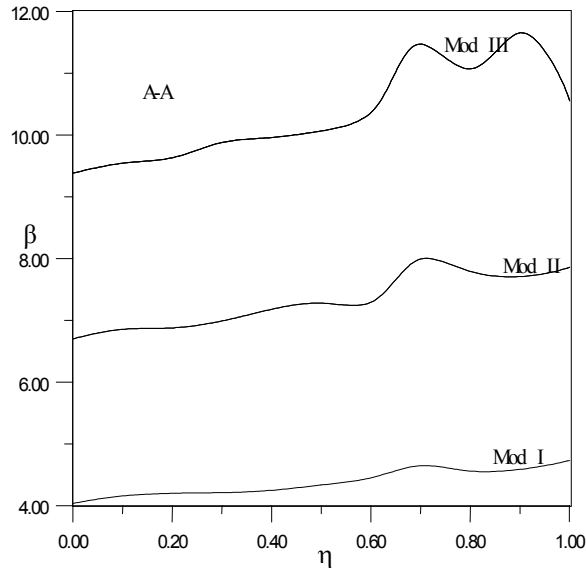


Şekil 3.12. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).

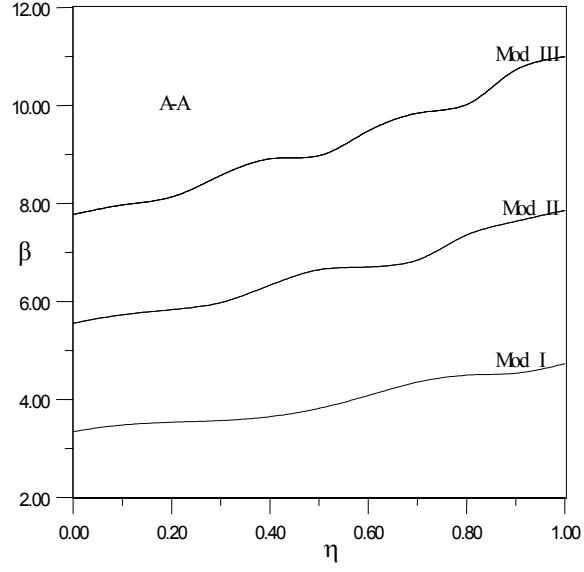


Şekil 3.13. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).

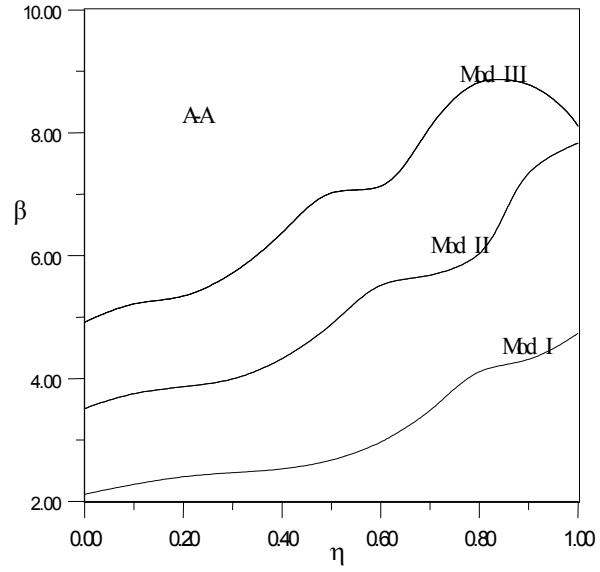
A-A sınır şartlarında $E_1>E_2$ ve $m_1<m_2$ koşulundaki boyutsuz frekanslar Şekil 3.14-3.16’de verilmiştir. Burada artan η değerine göre boyutsuz frekans parametresi monoton olarak artmaktadır.



Şekil 3.14. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).

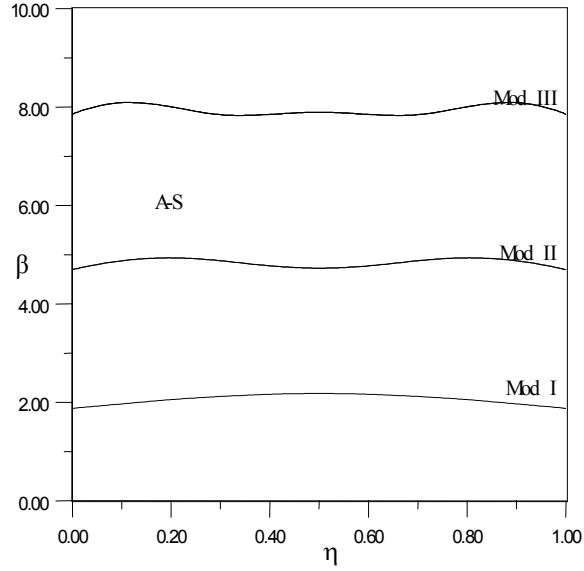


Şekil 3.15. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=0.5$).

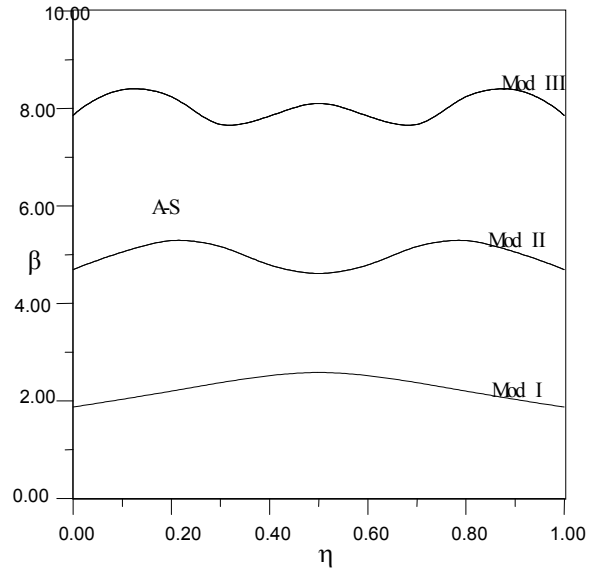


Şekil 3.16. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$).

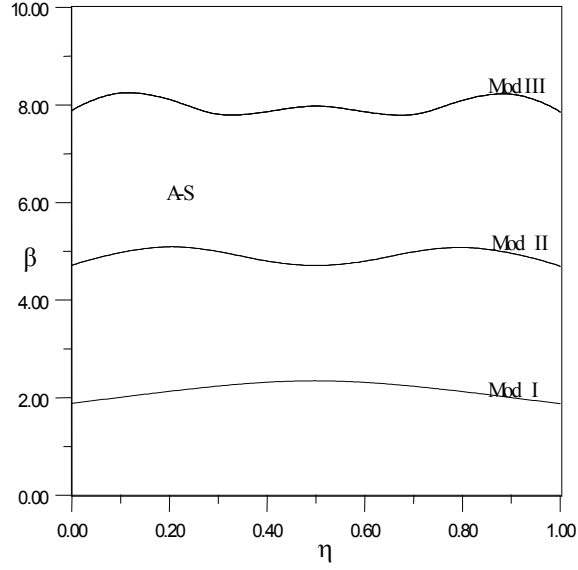
Şekil 3.17-3.19’de A-S mesnetli kiriş için $E_1 > E_2$ ve $m_1 > m_2$ şartları için boyutsuz frekans parametreleri verilmiştir. Bu şekillere göre, frekansların η ile değişimi A-A ve B-B’ye benzerdir. Frekans parametreleri, A-A’daki gibi $\eta=0.5$ ’e göre simetrik özellik göstermektedir.



Şekil 3.17. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=2$).

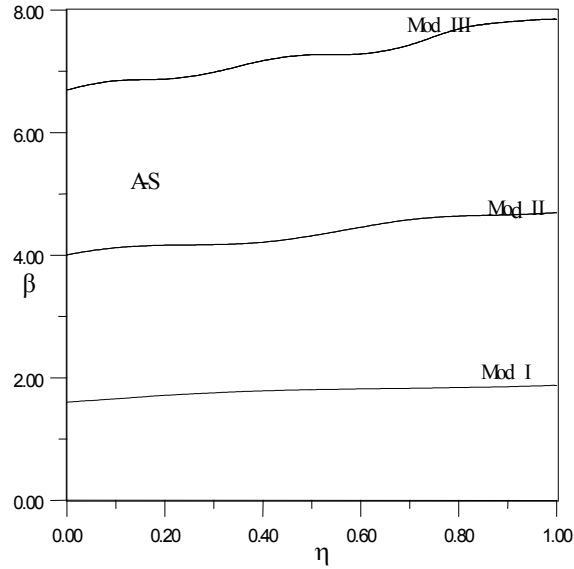


Şekil 3.18. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=5$).

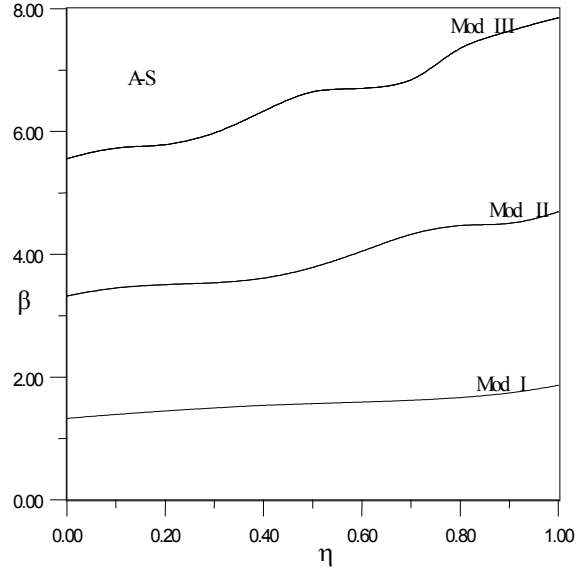


Şekil 3.19. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=70\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =2710\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Alüminyum]).

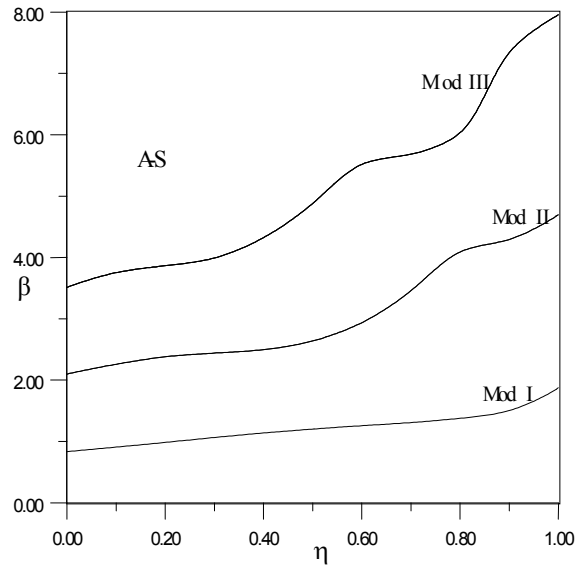
Şekil 3.20-3.22’de, $E_1>E_2$ ve $m_1<m_2$ A-S için, frekans η ile monoton olarak arttığı görülmektedir..



Şekil 3.20. Aksenal parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1=200\text{GPa}$, $E_2=120\text{ GPa}$; $m_1=7860\text{ kg/m}^3$, $m_2 =8910\text{ kg/m}^3$ [Çelik-Bakır]).



Şekil 3.21. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=2$; $m_1/m_2=0.5$).



Şekil 3.22. Eksenel parçalı derecelendirilmiş A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresinin η ile değişimi ($E_1/E_2=5$; $m_1/m_2=0.2$).

3.6. Ritz Metodu

Daha önce çubuk probleminde belirtildiği gibi kiriş için kinetik sınır şartları Çizelge 3.1’de gösterilmiştir.

$$\frac{\partial(T_{\max} - U_{\max})}{\partial C_m} = 0 \quad m = m_0, \dots, M$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int m(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.23)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int E(x) I(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Çizelge 3.1. Sınır koşullarına bağlı olarak kirişin kinetik şartları

| Sınır Koşulu Tipi | $x=0,1$ |
|-------------------|-----------------------|
| B | $w = 0$ |
| A | $w = 0, w_{,\xi} = 0$ |
| S | $w \neq 0$ |

Eksenel derecelendirilmiş kirişte üç farklı sınır koşuluyla çalışılmıştır. Bunlar: B-B, A-A, A-S’dir. Kinematik sınır koşulları uygun başlangıç indisine göre (3.14)’e göre seçilmiştir. Bu indisler Çizelge 3.2’de verilmektedir.

Çizelge 3.2. (2.23)’teki başlangıç indisleri

| Sınır Koşulu Tipi | m_0 |
|-------------------|-------|
| B | 1 |
| A | 2 |
| S | 0 |

Çizelge 3.3'de β yani ilk üç frekans parametresinin yakınsama çalışması gösterilmektedir.

Frekans parametresinin yakınsaması incelendiğinde 5 ve 6. Terimler arasındaki maksimum fark binde 2'dir. Bu sebeple bundan sonraki frekanslar 6 terim için bulunmuştur.

Çizelge 3.3. Üniorm ve üniorm olmayan B-B kirişi için boyutsuz ilk üç frekans parametresinin tayininde yakınsama çalışması

| M | Üniorm kiriş | | | $E_1/E_2 = 5, m_1/m_2 = 5$ | | |
|--------------------|--------------|-----------|-----------|----------------------------|-----------|-----------|
| | β_1 | β_2 | β_3 | β_1 | β_2 | β_3 |
| 2 | 3.309 | 7.085 | - | 3.207 | 7.140 | - |
| 3 | 3.141 | 7.085 | 11.480 | 3.117 | 6.846 | 11.532 |
| 4 | 3.141 | 6.296 | 11.480 | 3.109 | 6.324 | 11.000 |
| 5 | 3.141 | 6.296 | 9.500 | 3.109 | 6.294 | 9.533 |
| 6 | 3.141 | 6.283 | 9.500 | 3.109 | 6.291 | 9.480 |
| (Tse ve ark. 1978) | 3.141593 | 6.283185 | 9.424778 | - | - | - |

Üniorm olmayan B-B, A-A ve A-S kirişindeki ilk üç frekans değeri Ritz metoduyla bulunmuştur. Kirişin Elastisite Modülü ve yoğunluğu x 'e bağlı lineer değişken olarak seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
 E(x) &= E_1 \left[\left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right) x + 1 \right] \\
 m(x) &= m_1 \left[\left(\frac{m_2}{m_1} - 1 \right) x + 1 \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Çizelge 3.4-3.6'da sırasıyla, farklı E_1/E_2 ve m_1/m_2 için S-S, A-A ve A-S kirişlerinde boyutsuz frekans parametreleri görülmektedir. Şekillerden de gözleneceği

gibi üniform olmayan B-B ve A-A kirişlerinde boyutsuz frekans parametresi giderek azalmakta, buna rağmen aynı E_1/E_2 ve m_1/m_2 A-S kirişinde giderek artmaktadır. Homojen kirişe ait frekans parametresiyle parçalı değişen kirişe ait frekans parametresi kıyaslanırsa, parçalı kirişte en çok değişim malzeme II'de gözlenir.

Çizelge 3.4. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan B-B kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 3.141 | 3.135 | 3.109 | 2.625 | 2.044 |
| 2 | 6.283 | 6.286 | 6.291 | 5.255 | 4.096 |
| 3 | 9.424 | 8.910 | 8.441 | 7.923 | 6.155 |

Çizelge 3.5. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-A kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 4.730 | 4.708 | 4.634 | 3.932 | 3.015 |
| 2 | 7.854 | 7.831 | 7.763 | 6.562 | 5.063 |
| 3 | 10.990 | 10.385 | 9.731 | 9.316 | 7.263 |

Çizelge 3.6. Malzeme özellikleri lineer bir fonksiyon olarak değişen ($E=ax+b$, $m=cx+d$) üniform olmayan A-S kirişinin boyutsuz ilk üç frekans parametresi

| Mod | Üniform | $E_1/E_2=2,$ $m_1/m_2=2$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.5$ | $E_1/E_2=5,$ $m_1/m_2=0.2$ |
|-----|---------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 1.875 | 2.024 | 2.176 | 1.598 | 1.282 |
| 2 | 4.693 | 4.715 | 4.789 | 4.059 | 3.283 |
| 3 | 7.856 | 7.738 | 7.685 | 6.511 | 4.843 |

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Bu tezde ekseni doğrultusunda malzeme özellikleri parçalı ve sürekli formda değişen çubuk ve kirişlerin serbest titreşimi incelenmiştir.

Parçalı fonksiyonel çubuk ve kirişlerin hareket denklemlerinin çözümünde klasik değişkenlere ayırma yöntemine dayanan genel bir formülasyon geliştirilmiştir.

Malzeme özellikleri aksenal doğrultuda sürekli bir fonksiyona göre değişen çubuk ve kirişlerin değişim formlarında Legendre yöntemi ile çözüm bulunmuştur.

Ardından en genel halde Ritz yöntemiyle formülasyon yapılmıştır.

Çubukların ve kirişlerin titreşim davranışlarının aksenal derecelendirme ile kontrol edilebileceği sonucuna varılmıştır. Parçalı çubuklarda aynı çubuk hacmi için oranların değiştirilmesi ile farklı frekansların elde edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmalar kayma deformasyon teorileri ile geliştirilebilir. Paket programlar kullanılarak ve deneyler yapılarak çalışma genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Anandakumar, G. and Kim, J.H., 2010, 'On the Modal Behavior of a Three-dimensional Functionally Graded Cantilever Beam: Poisson's Ratio and Material Sampling Effects', *Composites Structures*, 92, 1358-1371.

Abrate, S., 1995, 'Vibration of Non-uniform Rods and Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 185, 703-716.

Aydogdu, M. and Taskin, V., 2007, 'Free Vibration of Functionally Graded Beams With Simply Supported Edges', *Materials and Design*, 28, 1651-1656.

Aydogdu, M. and Filiz, S., 2010 in press, 'Vibrating Analysis of Piecewise and Continuously Axially Graded Rods and Beams', *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis*, Nova Publishers, USA, ISBN: 978-1-61668-217-0.

Bahadır Mertan, 2001, 'Free Vibration Analysis of Functionally Graded Simply Supported Rectangular Thin Plates', Boğaziçi University.

Bapat, C.N., 1995, 'Vibration of Rods with Uniformly Tapered Sections', *Journal of Sound and Vibration*, 185, 185-189.

Batra, R.C. and Jin, J., 2004, 'Natural Frequencies of a Functionally Graded Anisotropic Rectangular Plate', *Journal of Sound and Vibration*, 282, 509-516.

Calio, I. and Elishakoff., 2005, 'Closed Form Solutions for Axially Graded Beam-Columns', *Journal of Sound and Vibration*, 280, 1083-1094.

Conway, H.D. and Dubil, J.F., 1965, 'Vibration Frequencies of Truncated-cone and Wedge Beams', *Journal of Applied Mechanics*, 32, 932-934.

Caruntu, D.I., 2007, 'Classical Jacobi Polynomials, Closed-form Solutions for Transverse Vibrations', *Journal of Sound and Vibration*, 306, 467-495.

Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. and Reddy, J. N., 2003, 'A New Beam Finite Element for The Analysis of Functionally Graded Materials', *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, 519-539.

Cranch, E.T. and Adler, A. A., 1956, 'Bending Vibrations of Variable Section Beams', *Journal of Applied Mechanics*, 23, 103-108.

Ece, M. C., Aydogdu, M. and Taskin, V., 2007, 'Vibration of a Variable Cross-Section Beam', *Mechanics Research Communications*, 34, 78-84.

Eisenberger, M., 1991, 'Exact Longitudinal Vibration Frequencies of a Variable Cross-section Rod', *Applied Acoustics*, 34, 123-130.

Elishakoff, I. and Guede, Z., 2004, 'Analytical Polynomial Solutions for Vibrating Axially Graded Beams' *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11, 517-533.

Elishakoff, I. and Johnson, V., 2005, 'Apparently The First Closed Form Solution of Vibrating Inhomogeneous Beam with a Tip Mass', *Journal of Sound and Vibration*, 286, 1057-1066.

Hiedebercht, A.C., 1967, 'Vibration of Non-uniform Simply Supported Beams', *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 93, 1-15.

Huang, Y. and Li, X.F., 2010, 'A New Approach for Free Vibration of Axially Functionally Graded Beams with Non-uniform Cross-section', *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2291-2303.

Kane, M. and Yavuzkurt, S., 2009, 'Calculation of Gas Turbine Blade Temperatures Using an Iterative Conjugate Heat Transfer Approach', *International Symposium on Heat Transfer in Gas Turbine Systems*.

Kim, Y.W., 2005, 'Temperature Dependent Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates', *Journal of Sound and Vibration*, 284, 531-549.

Koizumi, M., 1993, 'The Concept of FGM', *Ceramic Engineering Science Proceeding*, 34, 3-10.

Kumar, B.M. and Sujith, R.I., 2000, 'Exact Solutions for the Longitudinal Vibration of Non-uniform Rods', *Journal of Sound and Vibration*, 207, 721-729.

Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H. and Rossi, R.E., 1996, 'Free Vibration of Beams of Bi-linearly Varying Thickness', *Ocean Engineering*, 23, 1-6.

Li, Q.S., 2000, 'Exact Solution for Free Longitudinal Vibration of Non-uniform Rods', *Journal of Sound and Vibration*, 234, 1-19.

Loy, C.T., Lam, K.Y. and Reddy, J.N., 1999, 'Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells', *International Journal of Mechanical Sciences*, 41, 309-324.

Maalawi, K.Y., 2009, 'Optimization of Elastic Columns Using Axial Grading Concept', *Engineering Structures*, 31, 2922-2929.

Murin, J., Aminbaghai, M. and Kutis, V., 2010, 'Exact Solution of the Bending Vibration Problem of FGM Beams with Variation of Material Properties', *Engineering Structures*, 32, 1631-1640.

Naguleswaran, S., 1994, 'Vibration in the Two Principal Planes of a Nonuniform Beam of Rectangular Cross-section, One Side of Which Varies as the Square Root of the Axial Co-ordinate', *Journal of Sound and Vibration*, 172, 305-319.

Praveen, G.N. and Reddy J.N., 1998, 'Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic –Metal Plates', *International Journal of Solids and Structures*, 35, 4457-4476.

Pronsato, M.E., Laura, P.A.A. and Juan, A., 1999, 'Transverse Vibrations of a Rectangular Membrane with Discontinuously varying density', *Journal of Sound and Vibration*, 222, 341-344.

Qian, L. F. and Batra, R. C., 2005, 'Design of Bidirectional Functionally Graded Plate for Optimal Natural Frequencies', *Journal of Sound and Vibration*, 280, 415-424.

Sankar, B.V., 2001, 'An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams', *Composites Science and Technology*, 61, 689-696.

Singh, K. V. and Li G., 2009, 'Buckling of Functionally Graded and Elastically Restrained Non-uniform Columns', *International Journal of Composites Part B: Engineering*, 40, 393-403.

Suresh, S. and Mortensen, A., 1997, 'Functionally Graded Metals and Metal-Ceramic Composites', *International Materials Reviews*, 42, 85-116.

Tse, F.S., Morse, I.E. and Rolland T.H., 1978, 'Mechanical Vibrations-Theory and Applications', Allyn and Bacon Publishers, Boston, USA, ISBN: 0205066704/ 0-205-06670-4.

Uymaz, B. and Aydogdu, M., 2007, 'Three-dimensional Vibration Analyses of Functionally Graded Plates Under Various Boundary Conditions', *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863.

Vel, S.S. and Batra R.C., 2004, 'Three-dimensional Exact Solution for The Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates', *Journal of Sound and Vibration*, 272, 703-730.

Whitney, J.M., 1987, 'Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates', Technomic Publishing Co Inc.

Wu, L., Wang, Q. and Elishakoff, I., 2005, 'Semi-inverse Method for Axially Graded Beams with an Anti-symmetric Vibration Mode', *Journal of Sound and Vibration*, 284, 1190-1202.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Edirne’de doğdu. Orta öğretimini Eskişehir Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2007 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesinin Makine Mühendisliği Bölümünden mezun oldu.