

**T.C.**

**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PARÇALI BİR BİÇİM KAPALI SİCİM İÇİN CASIMIR ENERJİ**

**DERYA ENGİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**TEZ YÖNETİCİSİ PROF. DR. MUSTAFA ÖZCAN**

**EDİRNE 2013**

**PARÇALI BİR BİÇİM KAPALI SİCİM İÇİN CASIMIR ENERJİ**

**DERYA ENGİN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**2013**

**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof.Dr.Mustafa Özcan  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Ş. Erol Okan  
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa Özcan  
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Fizik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmza

Prof. Dr. Mustafa Özcan

.....

Prof. Dr. Metin Aydoğdu

.....

Yrd. Doç. Dr. Fikret Işık

.....

Tarih: 16 /04/2013

**T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**FİZİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**  
**DOĞRULUK BEYANI**

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

16 / 04 / 2013

Derya Engin

Yüksek Lisans Tezi  
Parçalı Bir Biçim Kapalı Sicim İçin Casimir Enerji  
T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı

## ÖZET

Bu çalışmada parçalı bir biçim kapalı sicimdeki enine salınımlara sahip skaler alanın Casimir enerjisi hesaplandı. Parçalı sicim, gerilimleri  $T_1$  ve  $T_2$ , kütle yoğunlukları  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  değerlerine sahip farklı malzemeden oluşmuştur.

Öncelikle iki parçalı kapalı sicim için biri normal diğeri burmasız sınır değer şartlarına sahip skalar alanın hem gerilimlerinin oranına hem de parçalı sicimin uzunlukları oranına göre frekans dağılımları elde edilerek kuantum vakum enerjisi hesaplandı. Gerilimlerinin oranları ve uzunlukları özelleştirilerek Casimir enerjisi ayrı ayrı yeniden hesaplandı. Yapılan hesaplamaların sonucunda her durumda Casimir enerji negatif olarak bulundu. İkinci olarak da iki parçalı kapalı sicim için biri normal diğeri burmalı sınır değerlerine sahip skalar alan göz önüne alındı. Burmalı sınır değer şartlarına sahip skalar alanın gerilimlerinin ve uzunluklarının oranına bağlı olarak frekans dağılımları elde edilerek her özel durum için negatif Casimir enerji değeri elde edildi. Hem burmalı hem de burmasız sınır değer koşullarına göre ortaya çıkan sonsuz vakum enerji ifadelerinde kesici fonksiyonlu modlarının toplamı ile regülarizasyon yöntemi kullanılmıştır.

Yıl : 2013

Sayfa Sayısı : 91

Anahtar Kelimeler : Casimir enerji, Parçalı bir biçim sicim, Burmalı ve Burmasız skalar alan.

Graduate Thesis

Casimir Energy For A Piecewise Uniform Closed String

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Physics

## ABSTRACT

In this work we calculated the Casimir energy of the transverse oscillation of scalar field in a piecewise uniform string. The string is made of two different materials which has tensions as  $T_1$  and  $T_2$  also mass density  $\rho_1$  and  $\rho_2$ . We obtain the negative value of the Casimir energy for all  $s \left( = \frac{L_2}{L_1} \right)$  and  $x \left( = \frac{T_1}{T_2} \right)$  values. Afterwards, the scalar field is considered which has normal and twisted boundary conditions for a piecewise closed string. Frequency dispersion for twisted and untwisted scalar field is obtained with respect to length ratio and tension. The Casimir energy for twisted and untwisted scalar field in a piecewise uniform string is found is strictly negative value for all special cases. The Casimir energy is giving rise to the attracting force for the twisted and the untwisted scalar field in a piecewise uniform string is calculated by using the mode summation with cutoff functions.

Year : 2013

Number of Pages : 91

Keywords : Casimir energy, Piecewise uniform string, Twisted and Untwisted scalar field.

## TEŞEKKÜRLER

Fizik eğitiminim ve tez çalışmam süresince engin ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, birlikte çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Mustafa Özcan'a ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, her daim desteklerini benden esirgemeyen çok sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

**ÖZET**

**ABSTRACT**

**TEŞEKKÜRLER**

**İÇİNDEKİLER**

**SİMGELER DİZİNİ**

**TABLO VE ŞEKİLLER**

**1. GİRİŞ**

**2. BURMASIZ PARÇALI SİCİM**

**2.1 Özel Durumlar**

**A.  $x \rightarrow 0$  ve  $x \rightarrow 1$**

**B.  $L_1 = L_2$**

**2.2  $s=3, 5, \dots$  Tek Tamsayı Değerleri**

**2.3  $s=2, 4, \dots$  Çift Tamsayı Değerleri**

**3. BURMALI PARÇALI SİCİM**

**3.1 Özel Durumlar**

**A.  $x \rightarrow 0$  ve  $x \rightarrow 1$**

**3.2  $s=3, 5, \dots$  Tek Tamsayı Değerleri**

**3.3  $s=2, 4, \dots$  Çift Tamsayı Değerleri**

**SONUÇ**

**KAYNAKLAR**

**ÖZGEÇMİŞ**



## SİMGELER DİZİNİ

- : D'Alembert operatörü
- $ds^2$  : Uzay zamanda iki nokta arasındaki uzaklığın karesi
- $x = \frac{T_1}{T_2}$  : Sicim gerilimleri oranı
- $\omega$  : Frekanslar
- $s = \frac{L_2}{L_1}$  : Kapalı sicimi oluşturan parçaların uzunluklarının oranı
- $F(x)$  : Frekans dağılım denklemindeki gerilim terimi
- $\tilde{E}_0$  : Kesici fonksiyon ile regülarize edilmiş kuantum boşluk enerjisi
- $\bar{E}_0$  : Sonsuz geometrideki kuantum vakum enerjisi
- $E_b$  : Yeniden normalize edilmiş burmasız bir biçim sicimdeki kuantum boşluk enerjisi
- $E_{bb}$  : Yeniden normalize edilmiş burmalı bir biçim sicimdeki kuantum boşluk enerjisi
- $E_{ren}$  : Yeniden normalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

## TABLO VE ŞEKİLLER

Şekil 1.1: Aralarında  $a$  uzaklığı bulunan yüksüz iki paralel levha

Şekil 1.2: Elektromagnetik alanın vakumdaki modlarının gösterimi

Şekil 2.1:  $L_1, L_2$  uzunluklu ve toplamları  $L_1 + L_2 = 2\pi R_0$  olan iki farklı malzemedenden yapılmış burmasız parçalı sicim

Şekil 2.2: Sicimin geometrik yapısı

Şekil 2.3.a: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.3.b: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.4: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=1$  için grafiği

Şekil 2.5: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=100$  için grafiği

Şekil 2.6: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=5, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.7: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=5, F=1$  için grafiği

Şekil 2.8: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=5, F=100$  için grafiği

Tablo 2.1: Burmasız sicim için  $F=0.1, 1, 100$ ' e karşılık gelen  $s=3,5,7$  değerleri tablosu

Şekil 2.9: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=8$  için grafiği

Şekil 2.10: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=1, F=8$  için grafiği

Tablo 2.2:  $s=3, 5, 7$  için enerji değerleri tablosu

Şekil 2.11.a: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=2, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.11.b: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=2, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.12: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=2, F=1$  için grafiği

Şekil 2.13: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=2, F=100$  için grafiği

Şekil 2.14: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=4, F=0.1$  için grafiği

Şekil 2.15: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=4, F=1$  için grafiği

Şekil 2.16: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=4, F=100$  için grafiği

Tablo 2.3: Burmasız sicim için  $F=0.1, 1, 100$ ' e karşılık gelen  $s=2,4,6$  değerleri tablosu

Şekil 2.17: Burmasız skalar alanın frekans dağılımının  $s=2, F=8$  için grafiği

Tablo 2.4:  $s=2, 4, 6$  için enerji değerleri tablosu

Grafik 2.1.a: Burmasız sicimlerde  $s'$  in tek değerleri için enerji grafiği

Grafik 2.1.b: Burmasız sicimlerde  $s'$  in çift değerleri için enerji grafiği

Tablo 2.5:  $F=8$  ve  $s=1, 2, 3$  için enerji değerleri tablosu

Şekil 3.1.a: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=0.1$  için grafiği

Şekil 3.1.b: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=3, F=0.1$  için grafiği

Şekil 3.2: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=3$ ,  $F=0.5$  için grafiği  
Şekil 3.3: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=3$ ,  $F=1$  için grafiği  
Şekil 3.4: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=5$ ,  $F=0.1$  için grafiği  
Şekil 3.5: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=5$ ,  $F=0.5$  için grafiği  
Şekil 3.6: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=5$ ,  $F=1$  için grafiği  
Tablo 3.1: Burmalı sicim için  $F=0.1, 0.5, 1$ ' e karşılık gelen  $s=3, 5, 7$  değerleri tablosu  
Şekil 3.7: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=3$ ,  $F=8$  için grafiği  
Şekil 3.8: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=1$ ,  $F=8$  için grafiği  
Tablo 3.2:  $s=3, 5, 7$  için enerji değerleri tablosu  
Şekil 3.9.a: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=2$ ,  $F=0.1$  için grafiği  
Şekil 3.9.b: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=2$ ,  $F=0.1$  için grafiği  
Şekil 3.10: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=2$ ,  $F=0.5$  için grafiği  
Şekil 3.11: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=2$ ,  $F=1$  için grafiği  
Şekil 3.12: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=4$ ,  $F=0.1$  için grafiği  
Şekil 3.13: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=4$ ,  $F=0.5$  için grafiği  
Şekil 3.14: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=4$ ,  $F=1$  için grafiği  
Tablo 3.3: Burmalı sicim için  $F=0.1, 0.5, 1$ ' e karşılık gelen  $s=2, 4, 6$  değerleri tablosu  
Şekil 3.15: Burmalı skalar alanın frekans dağılımının  $s=2$ ,  $F=8$  için grafiği  
Tablo 3.4:  $s=2$  için enerji değerleri tablosu  
Tablo 3.5:  $s=1, 2, 3$  için enerji değerleri tablosu

## BÖLÜM 1

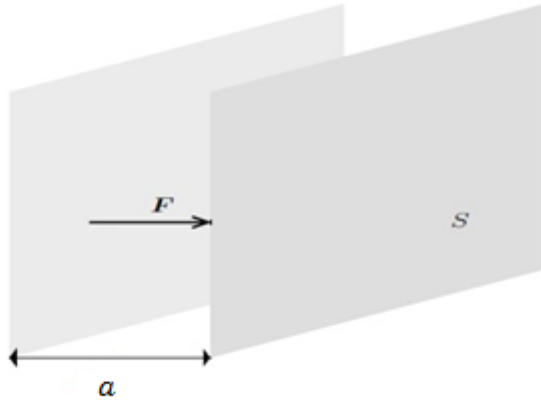
### GİRİŞ

1948 yılında H.G.B Casimir yüksüz  $a$  uzunluğu ile birbirinden ayrılmış paralel iletken iki levhanın birbirlerini çektiğini önerdi ve bu çekici kuvvetinin birim alan başına

$$\frac{F}{S} = - \frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4} \quad (1.1)$$

şekli ile ifade edildiğini gösterdi [1]. Burada  $\hbar$  Planck sabiti,  $c$  ışık hızı ve  $a$  levhalar arasındaki uzaklıktır. Daha sonraları bu kuvvet Casimir kuvveti olarak adlandırıldı ve son yıllarda deneysel olarak da doğrulandı [2,3,4,5]. Casimir kuvveti hiçbir şeyin olmadığı uzay zamanda yüksüz iki metal plaka arasındaki çekici kuvvet olarak bilinir. Casimir kuvveti tamamıyla kuantum mekaniksel bir olaydır. Çünkü içinde Planck sabiti ( $\hbar$ ) bulunmaktadır. Aynı zamanda göreliliği de içermektedir ki içinde ( $c$ ) ışık hızı bulunmaktadır. Casimir kuvveti herhangi bir etkileşim terimine sahip değildir.

Casimir etkisi teorik fiziğin değişik alanlarında çalışılmış ve hala çalışılmaya devam etmektedir. Bu konuda yapılanlar detaylı bir şekilde incelenmiştir [6,7,8,9,10,11].



**Şekil 1.1** Aralarında  $a$  uzaklığı bulunan yüksüz iki paralel levha

Casimir paralel levhalardaki çekici kuvvetin aynısını küresel kabuk için de ümit ederek elektron modelini oluşturmak istedi. Yapılan çalışmalar bize ideal küresel iletken kabuğun Casimir enerjisinin işaretinin paralel plakalardan farklı olduğunu gösterdi. İdeal küresel iletken kabuğun Casimir enerjisi pozitif olarak bulundu [12]. Bu da itici kuvvet üretir.

Farklı geometrilere örneğin paralel levha, küre ve silindir geometrisinde renormalize edilmiş Casimir enerjinin ürettiği kuvvetler

$$\begin{aligned} F_{levha} &= -\frac{0.0411}{a^4} \\ F_{küre} &= \frac{0.003674}{a^4} \\ F_{silindir} &= -\frac{0.003674}{(2a)^4} \end{aligned} \text{ olarak bulunmuştur [13,14].}$$

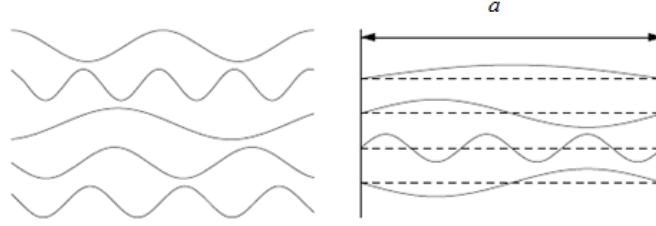
Klasik elektrodinamikte yüksüz paralel plakalar arasında itici veya çekici bir kuvvet yoktur. Bu nedenle Casimir kuvvet çok sıra dışıdır. Daha sonraki çalışmalarda değişik geometrilere de değişik regülarizasyon yöntemleri uygulanarak Casimir kuvveti teorik olarak elde edilmiştir.

Boyer tarafından küresel kabuğun Casimir enerjisi hesaplanmış ve pozitif olarak bulunmuştur [12]. Boyer'in kullandığı regülarizasyon yöntemi oldukça karmaşıktır. Daha sonraları küresel kabuktaki Casimir enerji Milton ve arkadaşları tarafından yeniden farklı regülarizasyon yöntemi ile Boyer' in bulduğu sonuç doğrulanmıştır [13]. Küresel kabuktaki elektromagnetik alanın kuantum vakum enerjisi son zamanlarda modların toplamı yöntemi kullanılarak yeniden elde edilmiştir [15,16].

Milton ve arkadaşları tarafından silindir geometrideki iletken kabuğun Casimir enerjisinin paralel plakalardan elde edilen Casimir enerji ile aynı işarete sahip olduğu gösterilmiştir [14]. Casimir enerjinin işareti geometriden geometriye, topolojiye ve manifoldun boyutuna göre değişmektedir [17,18]. Casimir enerjinin negatif olması çekici kuvvet; pozitif olması ise itici kuvvet üretir. Bu negatif enerji geniş anlamda teknolojik olarak uygulama olanağına sahiptir.

Casimir etki mikroskobikten çok makroskobik ölçeklerde daha karakteristiktir. Örneğin; çekici kuvvetin büyüklüğü yapılan deneylerde görüldüğü gibi  $1\text{cm}^2$  alan başına  $1\mu\text{m}$  uzaklıkta  $1,3 \times 10^{-7} \text{N}$ ' dır. Bu kuantum için beklendiği gibi küçük bir etki değildir.

Kuantum alan teorisine göre boşluk, (şekil 1.2) görüldüğü gibi aslında ( $T=0$  sıcaklıkta) sıfır noktasında tüm frekansların salınımları ile doludur. Casimir etki bize, boşluğun boş olmadığını, burada sonsuz enerjiye sahip geri zeminde elektromagnetik alanın bulunduğunu söyler [7,11]. Casimir etki boşluk düşüncemizi tamamıyla değiştirmiştir.



**Şekil 1.2** Elektromagnetik alanın vakumdaki modlarının gösterimi

Vakum salınımlarının toplam enerjisi sonsuza eşittir. Halbuki deneylerin bize gösterdiği, paralel plakalarda olduğu gibi, Casimir etki sonlu bir etkidir. Sonlu Casimir vakum enerjisi değişik matematiksel yöntemler ile elde edilir. Bunun yolu da kuantum sürecinde bazı fiziksel enerji hesaplamalarında olduğu gibi sonsuzlukların belirlenmesi ile mümkündür. Sonsuzlukların belirlenmesine regülarizasyon ve bu sonsuzlukların fiziksel yorumlarla çıkartılmasına da renormalizasyon denir. Bu yöntemleri kullanarak yeniden normalleştirilmiş kuantum vakum enerjisi yani Casimir enerji sonlu olarak elde edilir.

Günümüzde her türlü geometride ve boyutta ortaya çıkan bu sonsuzlukların üstesinden gelebileceğimiz ortak yegane bir regülarizasyon yöntemine sahip olmadığımızdan her bir problem farklı regülarizasyon yöntemleri ile çözülme zorunluluğu ortaya çıkarmaktadır.

Bazı materyaller ve geometrik yapılandırmalar ile Casimir kuvvetin ilgi çekici ve sıra dışı olduğu gösterilmiştir [11].

Casimir kuvvetin günümüz teknolojisine çok geniş uygulama alanları ürettiği gözlemleniyor [11]. Casimir etki, nanomekanik ve mikro mekanik robot teknolojisinde kullanılmaya adaydır.

Son zamanlarda Isham tarafından [19,20] dikkat çekildiği gibi uzay-zamanda burmalı alanın davranışı tanımlanmıştır. Örneğin uzay-zamandaki  $S^1 \times R^3$  topolojisine sahip yapıların hem burmalı hem de burmasız alanları çalışılmıştır. Burmasız alanlar periyodik olmasına rağmen burmalı skalar alanlar anti periyodik şartları sağlamaktadır. Burmalı alan ile burmasız alan yapılandırmalarının kuantum sonuçlarının birbirlerine eşit olmadığı detaylı bir şekilde irdelenmiştir [21].

Görelî olmayan kuantum mekanikteki burmalı alan yapıları tartışılmıştır. Buna bir örnek verecek olursak hidrojen atomunda Coulomb alanında burmalı parçacığın enerji seviyeleri ve öz fonksiyonları detaylı bir şekilde tartışılmıştır [21]. Burmalı hidrojen atomu ile burmasız hidrojen atomunun enerji seviyelerinin birbirinden farklı biçimde şekillendiği L. H. Ford tarafından gösterilmiştir [21].

Bu çalışmada parçalı bir biçim kapalı sicimdeki enine salınımlara sahip skaler alanın Casimir enerjisi hesaplanılacak. Parçalı sicim, gerilimleri  $T_1$  ve  $T_2$  ve kütle yoğunlukları  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  değerlerine sahip farklı malzemedden oluşmuştur [22].

Öncelikle iki parçalı kapalı sicim için biri normal diğeri burmasız sınır değer şartlarına sahip alanın hem gerilimlerinin oranına hem de sicimin uzunlukları oranına göre frekans dağılımları elde edilerek kuantum vakum enerjisi hesaplanılacaktır. Gerilimlerinin oranlarını ve uzunluklarını özelleştirerek Casimir enerjisi ayrı ayrı yeniden hesaplanılacaktır. Yapılan hesaplamaların sonucunda her durumda Casimir enerji negatif olarak bulunmuştur. İkinci olarak da iki parçalı kapalı sicim için biri normal diğeri burmalı sınır değerlerine sahip skalar alan göz önüne alınacaktır [23]. Burmalı sınır değer şartlarına sahip skaler alanın gerilimlerinin ve uzunluklarının oranına bağlı olarak frekans dağılımları elde edilerek Casimir enerjisi hesaplanılacaktır. Hem burmalı hem de burmasız sınır değer koşullarına göre ortaya çıkan sonsuz vakum enerji ifadelerinde kesici fonksiyonlu modlarının toplamı ile regülarizasyon yöntemi kullanılacaktır.

Bilindiđi gibi kütle çekimini de içerecek Şekilde temel etkileŐmelerin tasvir edilebilmesi fiziğin en önemli problemlerindedir. Bu anlamda burmalı ve burmasız alanın davranışı önemli bir yere sahiptir. Sicim modellemesinin bu alanda önemli rolleri olduğu görülmektedir.

Kozmolojide galaksi oluŐumunun anlaŐılmasında da sicim modelleri önemli bir yer tutmaktadır. Kuantum dalgalanmaları ile halka evrimi ve dinamiği arasındaki iliŐkinin anlaŐılması güncel bir araŐtırma konusudur [23].

ÇalıŐmamızda tek biçim parçalı bir sicimin kuantum boşluk enerjisi, kesici fonksiyon ile Euler-Maclaurin toplam formülü kullanılarak yeniden elde edilecektir. Sırasıyla burmalı ve burmasız parçalı sicim için değişken ayırma yöntemi ile iki farklı malzemedен yapılmış sicimin ayrı ayrı dalga denklem zmleri bulunarak ve üzümlere enine salınımları ve sicim gerilimlerini içeren süreklilik denklemleri uygulanarak frekans dağılım ifadeleri elde edilecektir. Bu işlemler sırasında karŐılaŐılan sonsuzlukların üstesinden regülarizasyon ve renormalizasyon teknikleri uygulanarak gelinecektir. İŞlemler sonucunda elde edilen verilerin grafik gösterimleri sunulacaktır.

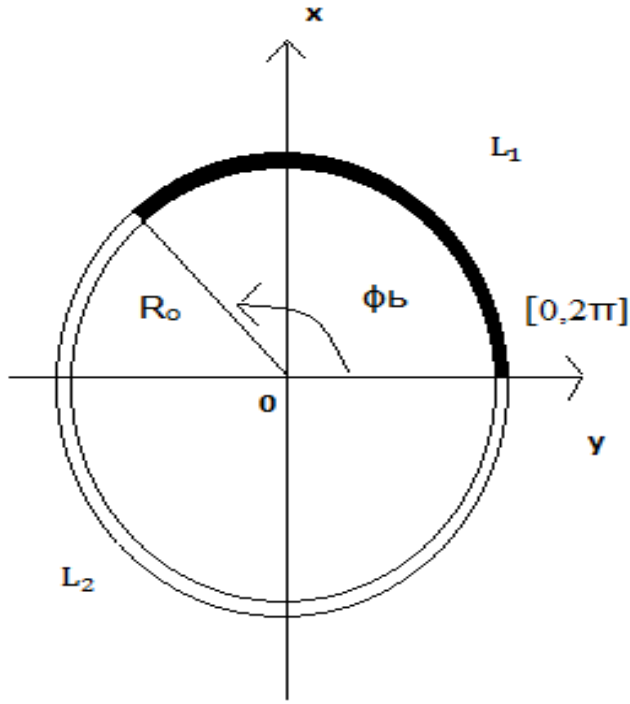
Çalışmamızın birinci bölümünde farklı gerilimlere ve kütle yoğunluklarına sahip parçalı kapalı sicimin normal ve burmasız sınır değer Şartlarına göre frekans dağılım ifadesi elde edilecek ve buradan hareketle kuantum vakum enerjisi hesaplanacaktır.

İkinci blmde ise aynı sicim için normal ve burmalı sınır değer koŐulları ele alınarak frekans dağılım ifadesi bulunacak ve kuantum vakum enerjisi tartıŐılacaktır.



## BÖLÜM 2

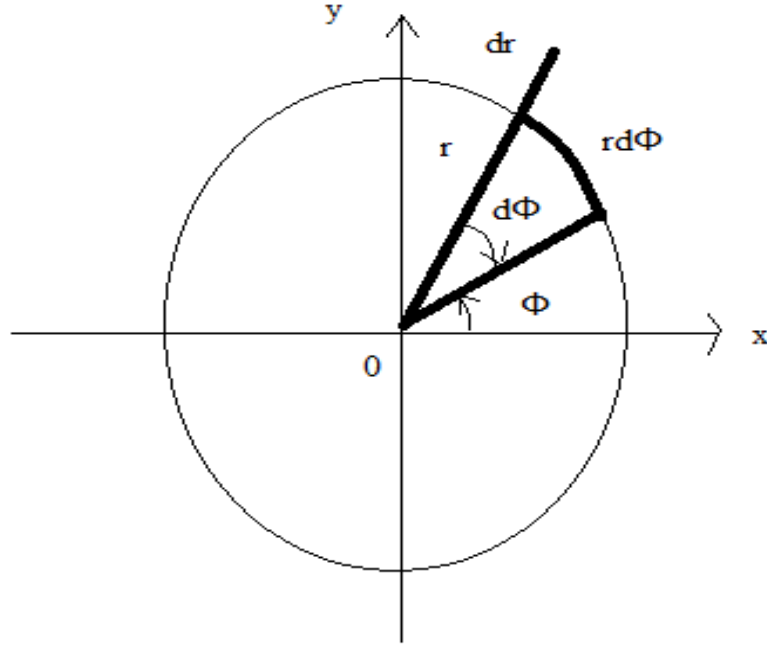
### BURMASIZ PARÇALI SİCİM



*Şekil 2.1*  $L_1, L_2$  uzunluklu ve toplamları  $L_1 + L_2 = 2\pi R_0$  olan iki farklı malzemeden yapılmış burmasız parçalı sicim

Bu bölümde  $L_1, L_2$  uzunluklu ve toplamları  $L_1 + L_2 = 2\pi R_0$  olan iki farklı malzemeden yapılmış kapalı bir sicim parçasına yerleştirilmiş kütleli skalar alanın kuantum vakum enerjisini hesaplayacağız.

Burada  $[0, \phi_b]$  aralıktaki parçayı  $L_1$  ve  $[\phi_b, 2\pi]$  aralıktaki parçayı  $L_2$  uzunlukları olarak tanımlayalım. (şekil 2.1)



**Şekil 2.2** Sicimin geometrik yapısı

Sicim üzerindeki kütleless skaler alanın sağladığı dalga denklemi  $\square\psi=0$ ' dır. Burada;

$\square=\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  D'Alembert operatörüdür,

$\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ' dir,

$$\square\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi. \quad (2.1)$$

Dalga denkleminin çözümü için en uygun koordinat seçimi şekil (2.2) geometrik yapı ile yeniden yazarsak;

$$x=R_0\cos\phi, y=R_0\sin\phi, \phi\in[0,2\pi], R_0=\text{sabit} \quad (2.2)$$

Uzay zamanda iki nokta arasındaki uzaklığın karesi olmak üzere

$$ds^2=dt^2-R_0^2d\phi^2 \text{ olmak üzere} \quad (2.3)$$

(2.1), D'Alembert operatörünü yeniden yazarsak

$$\square=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \quad (2.4)$$

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\psi=0 \quad (2.5)$$

Skalar alanın sağlayacağı dalga denklemini elde ederiz. Değişken ayırma yöntemi ile dalga denkleminin çözümü

$$\psi=T(t)\Phi(\phi)$$

olarak bu çözümü (2.5) denkleminde yerleştirdiğimizde

$$\frac{d^2 T}{dt^2}+\omega^2 T=0 \text{ ve} \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}+m^2 \Phi=0 \quad \text{denklemlerini elde ederiz.}$$

$$\text{Burada } \omega=\frac{m}{R_0} \quad (2.7)$$

T(t) ve  $\Phi(\phi)$  sağladığı denklem çözümleri ile dalga denkleminin genel çözümü

$$\Psi(\phi,t)=e^{-i\omega t}[Ae^{-im\phi} + Be^{im\phi}] \text{ olarak bulunur.} \quad (2.8)$$

Hala  $\omega$  ve  $m$  hakkında herhangi bir bilgiye sahip değiliz.

Genel çözümü iki parçalı sicim için ayrı ayrı ifade etmek istersek, birinci tür malzemeden yapılmış bölge için genel çözüm

$$\psi_1=e^{-i\omega t}[A_1 \cos m\phi + B_1 \sin m\phi], \quad (2.9)$$

Farklı malzemeye sahip ikinci bölge için

$$\psi_2=e^{-i\omega t}[A_2 \cos m\phi + B_2 \sin m\phi] \quad \text{çözümünü yazarız} \quad (2.10)$$

Burada  $A_1, A_2, B_1$  ve  $B_2$  birer sabittir.

İki tür sınır değer koşullarına sahibiz. İlki enine salınımların sağladığı birinci grup süreklilik şartını sağlayan koşullar

$$\psi_1(\phi=0)=\psi_2(\phi=2\pi) \quad (2.11.1)$$

$$\psi_1(\phi=\phi_b)=\psi_2(\phi=\phi_b) \quad (2.11.2)$$

İkincisi ise  $T_1$  ve  $T_2$  sicimindeki farklı gerilimleri göstermek üzere ifade bulan diğer süreklilik şartıdır.

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} \quad (2.12.1)$$

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_b} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_b} \quad (2.12.2)$$

(2.9) ve (2.10) denklemlerinden üretilen çözümleri normal noktadan gelen süreklilik şartlarına (2.11 ve 2.12) denklemlerine uygulayacak olursak

$$A_1 - A_2 \cos 2\pi m - B_2 \sin 2\pi m = 0 \quad (2.13)$$

$$A_1 \cos m\phi_b + B_1 \sin m\phi_b - A_2 \cos m\phi_b - B_2 \sin m\phi_b = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{T_1}{T_2} m B_1 + m A_2 \sin 2\pi m - m B_2 \cos 2\pi m = 0 \quad (2.15)$$

$$-\frac{T_1}{T_2} m A_1 \sin m\phi_b + m \frac{T_1}{T_2} B_1 \cos m\phi_b + m A_2 \sin m\phi_b - m B_2 \cos m\phi_b = 0 \quad (2.16)$$

İfadeleri elde edilir.

Burada  $x = \frac{T_1}{T_2}$  'dir. (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) denklemlerini toplu olarak yeniden yazarsak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos 2\pi m & -\sin 2\pi m \\ \cos m\phi_b & \sin m\phi_b & -\cos m\phi_b & -\sin m\phi_b \\ 0 & mx & m \sin 2\pi m & -m \cos 2\pi m \\ -mx \sin m\phi_b & mx \cos m\phi_b & m \sin m\phi_b & -m \cos m\phi_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Bu eşitliği sıfır yapan şey 4x4 matris determinantının sıfır olmasıdır.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos 2\pi m & -\sin 2\pi m \\ \cos m\phi_b & \sin m\phi_b & -\cos m\phi_b & -\sin m\phi_b \\ 0 & mx & m \sin 2\pi m & -m \cos 2\pi m \\ -mx \sin m\phi_b & mx \cos m\phi_b & m \sin m\phi_b & -m \cos m\phi_b \end{bmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

Bu işlemin sonucu frekans dağılım ifadesini verir [22].

$$(1-x)^2 \cos \omega(L-2L_1) - (1+x)^2 \cos \omega L + 4x = 0 \quad (2.18)$$

$s = \frac{L_2}{L_1}$  olmak üzere frekans dağılımını yeniden yazarsak

$$(1-x)^2 \cos \omega L_1(s-1) - (1+x)^2 \cos \omega L_1(s+1) + 4x = 0 \text{ olur.} \quad (2.19)$$

(2.19) denkleminde  $x \rightarrow 1/x$  olarak denklemi yazdığımızda yeniden (2.19) denklemini aynı biçimde elde ederiz. Bu değişmezlik  $0 \leq x \leq 1$  olduğunu söyler.

İlerideki çalışmalarda daha uygun bir ifade olarak frekans dağılımını kullanmak için

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) + F(x) \sin^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s+1) \right) = 0 \quad (2.20)$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada  $F(x) = \frac{4x}{(1-x)^2}$  dir.

Bütün olası modların dağılımı  $x$  ve  $s$  özel değerleri verilerek (2.19) ve (2.20) dağılım denklemlerinden elde edilir.

Genel olarak renormalize edilmiş Casimir enerji  $E_{1+2}$  için 1 ve 2 parçalarından oluşan bütün modların toplamını içeren sıfır nokta enerjisi ile  $E_b$  tek parçalı bir biçim sicimin sıfır nokta enerjisinin farkına eşittir [22,23].

$$E_{ren} = E_{1+2} - E_b \quad (2.21)$$

Kuantum vakum enerji hesaplamaları frekans dağılımına doğrudan bağlı olduğundan sistemimizin üreteceği frekansları (2.20) denkleminde elde ederiz.

(2.20) denklemi  $x = \frac{T_1}{T_2}$  ve  $s = \frac{L_2}{L_1}$  gibi boyutsuz değişkenlere bağlı olarak elde edildiğinden kuantum vakum enerji hesaplamalarını  $x$  ve  $s$  lere bağlı kalarak ayrı ayrı göz önüne alacağız. Gerilimlerin oranı  $0 \leq x \leq 1$  aralığında olduğundan öncelikle  $x$ 'in uç durumlarına göre davranışını inceleyeceğiz. Sonrasında  $x$ 'in uç durumlar dışında alabileceği değerleri göz önüne alarak  $s$  (sicim uzunlukları oranı) değerlerini tek ve çift pozitif tamsayı olarak Casimir enerjisi hesaplayacağız.

## 2.1 Özel Durumlar

Bir biçim burmasız sicimde kuantum vakum enerjisi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \quad (2.22)$$

Şeklinde yazılır.  $x \rightarrow 1$  ve  $x \rightarrow 0$  durumları için kuantum vakum enerjisinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\omega$  değerlerinin bulunması gerekir. Belirtilen durumlara göre  $\omega$  değerlerini ve kuantum boşluk enerjilerini hesaplayalım.

### A. $x \rightarrow 1$ ve $x \rightarrow 0$

$x = \frac{T_1}{T_2}$  olduğundan  $x$ 'in 1'e eşit olması sicimdeki  $T_1$  ve  $T_2$  gerilimlerinin birbirine eşit olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle bir biçim kapalı aynı malzemeden yapılmış sicime karşı gelir.

(2.20) frekans dağılım denkleminde  $x=1$  yazacak olursak;

$\cos \omega L = 1$  elde edilir.

$\cos 2\pi n = 1$  eşitliğinden

$\omega = \frac{2\pi n}{L}$  ve  $n=1,2,3$  modların dağılımı bulunur.

Böylece bir biçim kapalı aynı malzemeden yapılmış sicim için kuantum vakum enerjisi

$$E = 2 \times \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{L} \quad (2.23)$$

şeklinde yazılır.

Eşitliğin sağındaki 2 çarpanı dejenere durumu belirtmektedir.

(2.23) denklemi ıraksak bir yapıya sahiptir. İlk olarak bu ıraksaklıkların üstesinden gelmemiz gerekir. Kesici fonksiyon ile tanımlı kuantum sıfır nokta enerjisi açık bir şekilde sonsuzlukların belirlenmesini sağlar.

Sonsuzlukları belirlemek için kesici fonksiyonlu kuantum vakum enerjisi

$$\tilde{E}_0 = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \quad (2.24)$$

olarak yazılır.

Kesici fonksiyon aracılığı ile (2.24) denklemindeki sonsuzlukları regülarize edecektir. Buradaki  $\alpha$  kesici parametresi olarak tanımlanır. İşlemlerin sonucunda  $\alpha \rightarrow 0$  a gidecektir.

Renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi ise

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\tilde{E}_0 - \bar{E}_0] \quad (2.25)$$

(2.24) denklemindeki sonsuz toplamı hesaplayabilmek için Euler-Maclaurin toplam formülünü kullanacağız [24,25,26].

Euler Maclaurin Toplam Formülü

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) &= \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(\infty) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(\infty) - f^{(2s-1)}(0)] \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{B_{2m} - B_{2m}[x - [x]]}{(2m)!} f^{(2m)}(x) dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

Burada  $f(x)$  fonksiyonunun sürekli ve gerekli bütün türevlerinin var olduğu kabul edilmiştir. Bu formül çok kullanışlı olup değişik amaçlar için kullanılabilir.  $m$  sonlu bir sayı olarak seçildiğinde verilen bir serinin (sonlu veya sonsuz) toplamını integral artı bir takım düzeltme terimleri olarak yazmak mümkün olur. Uygulamalarda integral terimi süreklilik limitine karşı gelir.  $m$  nin sonsuz olduğu durumlarda ise, eldeki seriyi çok daha hızlı yakınsayan bir başka seriye dönüştürmek için de kullanılır [26].

Şimdi (2.24) toplam ifadesine Euler-Maclaurin toplam formülünü uygulayalım.

$$f(n) = \frac{2\pi}{L} n e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \text{ dir.} \quad (2.27)$$

$$f(\infty) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f^{(1)}(n) = \frac{\partial f}{\partial n}$$

$$f^{(1)}(n) = e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \left[ \frac{2\pi}{L} - \alpha \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 n \right]$$

$$f^{(1)}(\infty) = 0 \quad f^{(1)}(0) = \frac{2\pi}{L}$$

$$f^{(2)}(n) = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}$$

$$f^{(2)}(n) = e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \left[ -2\alpha \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 + \alpha^2 \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 n \right]$$

$$f^{(2)}(\infty) = 0 \quad f^{(2)}(0) = -2\alpha \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2$$

$$f^{(3)}(n) = \frac{\partial^3 f}{\partial n^3}$$

$$f^{(3)}(n) = e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \left[ 3\alpha^2 \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 + \alpha^3 \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 n \right]$$

$$f^{(3)}(\infty) = 0 \quad f^{(3)}(0) = 3\alpha^2 \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3$$

⋮

⋮

(2.28)

(2.26) denkleminde sağdaki ilk integrali göz önüne alacak olursak

$$\frac{2\pi}{L} \int_0^\infty x e^{-\alpha x \frac{2\pi}{L}} dx = \frac{L}{2\pi\alpha^2} \text{ 'dir.}$$

(2.28) deki ifadeyi denklem (2.26) da yerine yerleştirdiğimizde



$$\begin{aligned}\tilde{E}_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{L} n e^{-\alpha n \frac{2\pi}{L}} \\ &= \frac{L}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{6L} + \frac{1}{30} \alpha^2 \frac{\pi^3}{L^3} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif tam katları şeklindedir}] \quad (2.29)\end{aligned}$$

Sonsuz uzunluktaki sicimin kuantum boşluk enerjisini hesaplayalım. Bunun için ifadeyi  $L'$  ye bölelim.

$$\frac{\tilde{E}_0}{L} = \frac{1}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{6L^2} + \frac{\alpha^2\pi^3}{30L^4} + O(\alpha)$$

$L \rightarrow \infty$  alındığında

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tilde{E}_0}{L} = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \text{ olduğundan}$$

$$\text{Buda } \bar{E}_0 = \frac{L}{2\pi\alpha^2} \text{ karşı gelir.} \quad (2.30)$$

Sonsuz geometrideki kuantum vakum enerjisini elde ederiz. Buradan da anlaşıldığı gibi sonsuzluk  $L'$  den bağımsız olan ilk terimde ortaya çıkar. Dolayısıyla biz bu terimi  $\bar{E}_0$  olarak adlandırırız. Bu ifadeyi  $\tilde{E}_0$  'dan çıkartıp  $\alpha \rightarrow 0$  'a götürdüğümüzde tıpkı yüksüz iki paralel plakada olduğu gibi bir biçim sicimin üzerine yerleştirilmiş olan kütleless skaler alanın renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi bulunur.

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\tilde{E}_0 - \bar{E}_0]$$

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{6L} \text{ renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisidir.} \quad (2.31)$$

Tek parçalı bir biçim sicimin sıfır nokta enerjisini çalışmamızın ilerleyen kısımlarında  $E_b$  diye adlandıracağız. 1 ve 2. parçaların hesaplarının katkılarından bu terimi çıkarttığımızda geriye kalan terim bize renormalize edilmiş bir biçim iki farklı malzmeden yapılmış kapalı sicimin kuantum vakum enerjisini verecektir.

Şimdi

$x \rightarrow 0$  durumunu göz önüne alalım

$x = \frac{T_1}{T_2}$  olduğundan  $T_1 \rightarrow 0$ ,  $T_2 \rightarrow \infty$  anlamındadır.  $x \rightarrow 0$  durumu için frekans dağılımını hesaplayalım.

Bu durumda (2.20) denkleminde  $x=0$  alırsak

$$\sin\omega L_1 \sin\omega L_2 = 0$$

Bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı modların  $x \rightarrow 0$  limitinde nasıl bir karakterde olduğunu belirleyecektir.

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L_1}$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L_2}$$

(2.32)

$$n=1,2,3\dots$$

Bu mod dağılımına göre kuantum vakum enerjisi

$$E = 2 \times \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$$

$$E = 2 \times \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{L}$$

(2.33)

Casimir enerji (2.22) denkleminde

$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$  şeklinde parçalayarak kesici fonksiyonu kullanarak yeniden yazalım.

Burada;

$$\tilde{E}_1 = \frac{\pi}{2L_1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-an\frac{\pi}{L_1}}$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{\pi}{2L_2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-an\frac{\pi}{L_2}}$$

olarak yazılır.

(2.34)

$\tilde{E}_1$  kısmını hesaplayalım

$$\tilde{E}_1 = \frac{\pi}{2L_1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-an\frac{\pi}{L_1}}$$

Euler-Maclaurin toplam formülünü bu toplamlar için yeniden göz önüne alacak olursak

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(\infty) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(\infty) - (0)]$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{B_{2m} - B_{2m}[x - [x]]}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx .$$

$\tilde{E}_1$  için

$$f(n) = \frac{\pi}{2L_1} n e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_1}}$$

$$f(\infty) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f^{(1)} = e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_1}} \left[ \frac{\pi}{2L_1} - \frac{n\alpha}{2} \left( \frac{\pi}{L_1} \right)^2 \right]$$

$$f^{(1)}(\infty) = 0 \quad f^{(1)}(0) = \frac{\pi}{2L_1}$$

$$f^{(2)}(n) = e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_1}} \left[ -\alpha \left( \frac{\pi}{L_1} \right)^2 + \frac{n\alpha^2}{2} \left( \frac{\pi}{L_1} \right)^3 \right]$$

$$f^{(2)}(\infty) = 0 \quad f^{(2)}(0) = -\alpha \left( \frac{\pi}{L_1} \right)^2$$

$$f^{(3)}(n) = e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_1}} \left[ \frac{3\pi}{2L_1} \left( \frac{\pi\alpha}{L_1} \right)^2 - \frac{\pi n}{2L_1} \left( \frac{\pi\alpha}{L_1} \right)^3 \right]$$

$$f^{(3)}(\infty) = 0 \quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{2} \left( \frac{\pi}{L_1} \right)^3 \alpha^2 \quad (2.35)$$

bulunur.

Euler-Maclaurin toplam formülündeki ilk terim

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x \frac{\pi}{L_1}} dx = \frac{L_1^2}{\pi^2 \alpha^2}$$

şeklinde yazılır. Böylece regülarize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$\tilde{E}_1 = \frac{L_1}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{24L_1} + \frac{1}{480} \alpha^2 \frac{\pi^3}{L_1^3} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif tam katları şeklindedir}] \quad (2.36)$$

Aynı işlemi  $\tilde{E}_2$  için de uygularsak;

$$\tilde{E}_2 = \frac{L_2}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{24L_2} + \frac{1}{480}\alpha^2 \frac{\pi^3}{L_2^3} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif tam katları şeklindedir}] \quad (2.37)$$

$$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 \quad (2.38)$$

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\tilde{E}_0 - \bar{E}_0]$$

Sonsuzluğu üreten terimler sırasıyla

$$\frac{L_1}{2\pi\alpha^2} \text{ ve } \frac{L_2}{2\pi\alpha^2} \text{ oluşur.}$$

$x \rightarrow 0$  iken iki parçalı kapalı sicimdeki kuantum vakum enerjisi

$E_{ren} = (E_1 + E_2) - E_b$  olduğundan ve bir biçim kapalı sicimdeki renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$E_b = -\frac{\pi}{6L} \text{ alırsak ((2.31) denkleminde gelen terim)} \quad (2.39)$$

Böylece renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} - 4 \right] \text{ bulunur.} \quad (2.40)$$

$s$  parametresine bağlı olarak yeniden yazacak olursak

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ \frac{L_1+L_2}{L_1} + \frac{L_1+L_2}{L_2} - 4 \right]$$

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ 1 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_1}{L_2} + 1 - 4 \right] L_1 \text{ 'i iki uzunluktan küçük olanı olarak alırsak,}$$

$$s = \frac{L_2}{L_1} \text{ den}$$

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ s + \frac{1}{s} + 2 - 4 \right] \quad s \geq 1 \text{ için}$$

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ s + \frac{1}{s} - 2 \right] \quad [22]. \quad (2.41)$$

$x \rightarrow 0$  için elde ettiğimiz renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi ifadesi asla pozitif değildir.  $s=1$  için alabileceği en büyük değer sıfırdır.

## B. $L_1=L_2$

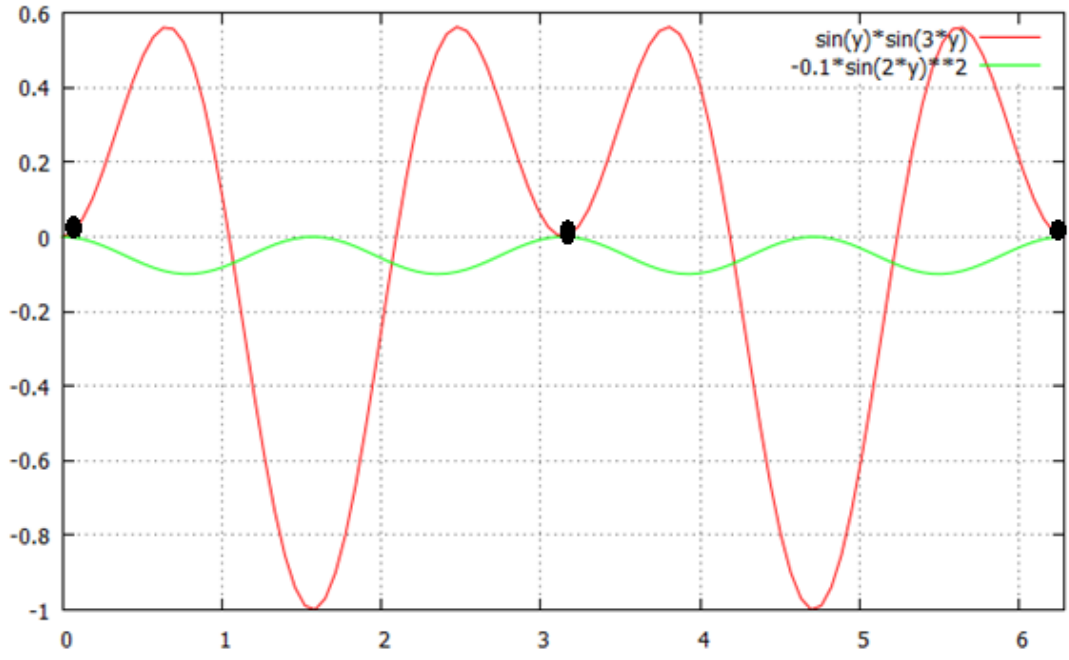
Bu özel durum işlemleri önemli ölçüde basite indirgemıştır. En genel  $x$  için (2.20) frekans dağılım denklemine  $s=1$  koşulunu uyguladığımızda  $x=1$  durumu için bulduğumuz renormalize edilmiş Casimir enerjisi yeniden  $s=1$  durumu için elde ederiz.

### 2.2 $s=3, 5\dots$ Tek Tamsayı Değerleri

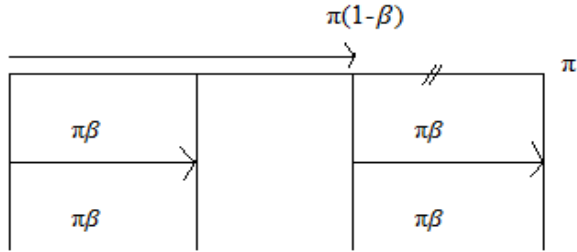
Bu bölümde (2.20) frekans dağılım denkleminde hareketle parçalı sicimlerin uzunlukları oranını bir doğal sayı tanımlayarak her  $x=\frac{T_1}{T_2}$  değerlerine göre frekans dağılımını elde ederek Casimir enerjisi hesaplanacaktır. İşlemimize öncelikle sicim uzunlukları oranını pozitif tek tam sayı olarak frekans değerlerini bulmaya çalışalım.

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) + F(x) \sin^2\left(\omega \frac{L_1}{2} (s+1)\right) = 0$$

denkleminde  $\omega L_1 = y$  seçerek  $F=0.1, 1$  ve  $100$  değerlerinde sırasıyla  $s=3$  ve  $s=5$  için ürettiği modların grafiklerini çizerek buluruz.

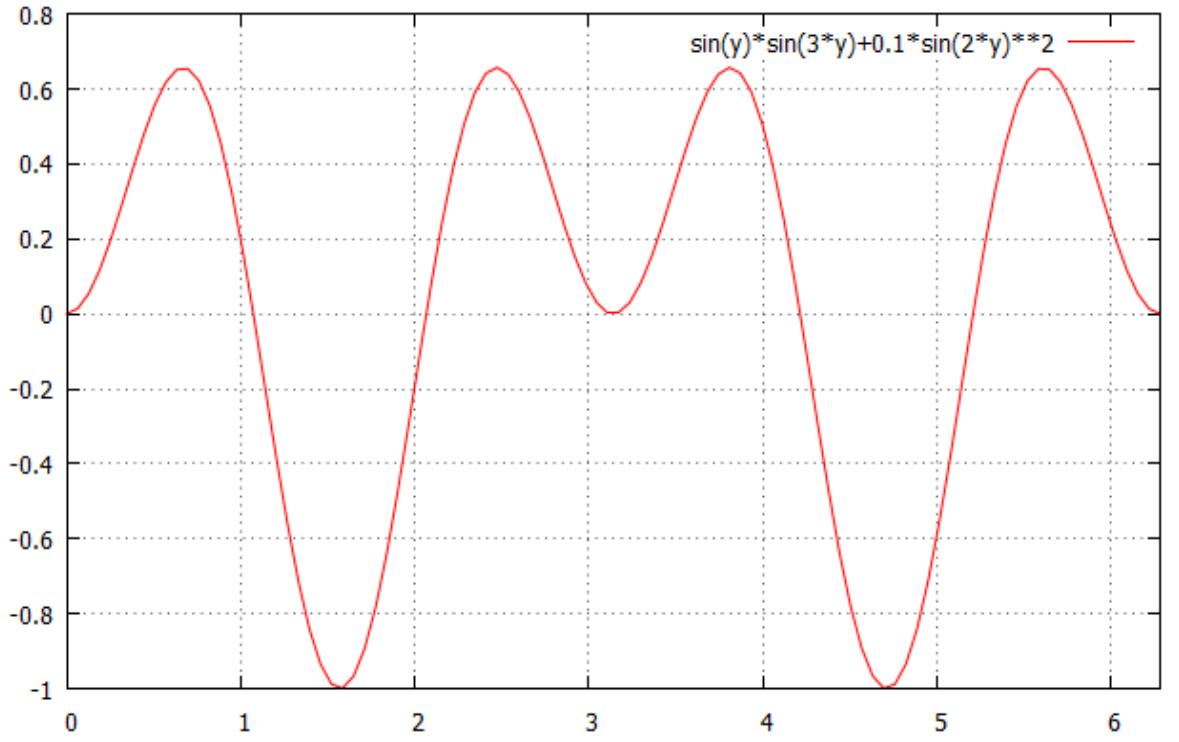


$\vdots$                      $\vdots$                      $\vdots$   
 $\vdots$                      $\vdots$                      $\vdots$



*Şekil 2.3.a.(2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=3, F=0.1$  grafiği*

Şekil 2.3.a' da dejenere değerler nokta ile gösterilmiştir. Bu noktalar aynı anda iki terimi birbirinden bağımsız sıfır yapan değerlerdir. Bu dejenere değerlerin dışında da  $\omega'$  ları  $\beta$  değerlerine bağlı olarak belirleyeceğiz.



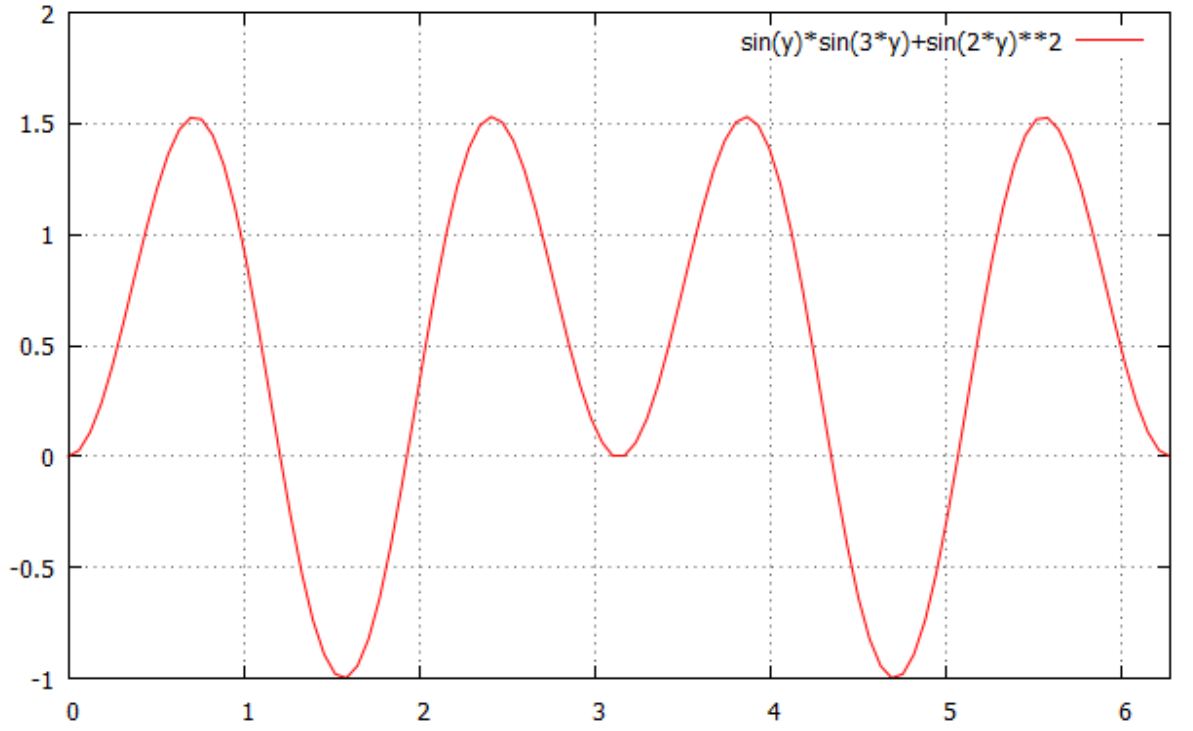
**Şekil 2.3.b.** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=0.1$  grafiği

$s=3$  ve  $F=0.1$  seçilerek (2.20) denklemini

$\sin y \sin 3y + 0.1 \sin^2 2y = 0$  şekline dönüştür.

Buradan da görüleceği gibi denklemin kökleri  $\pi$  periyodunda kendini tekrarladığından, (2.3.b) grafiğini kullanarak  $\omega$  değerlerini  $\beta$ 'ya bağlı olarak belirleriz.

$$\beta\pi = 1.08 \rightarrow \beta = 0.3439$$



*Şekil 2.4 (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=1$  grafiği*

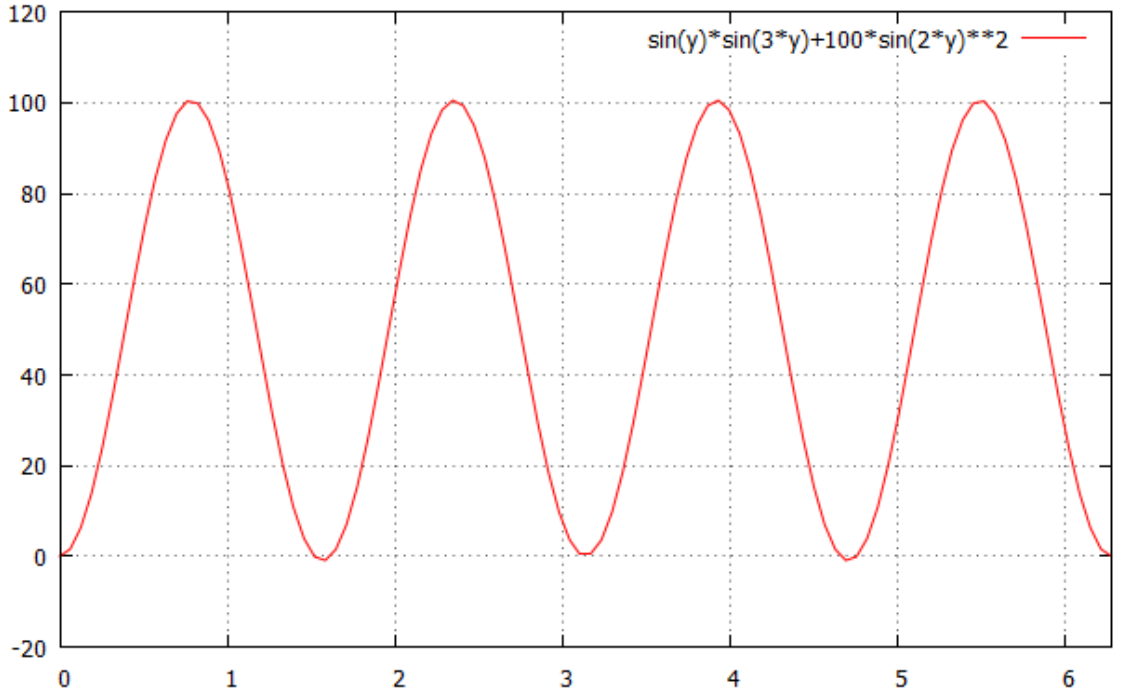
$s=3$  ve  $F=1$  için frekans dağılım denklemini

$\sin y \sin 3y + \sin^2 2y = 0$  haline gelir.

denkleminin kökleri  $\pi$  periyodunda kendini tekrarlar. Bu kökler  $\beta$  değerlerine göre belirlenir.

$$\beta\pi = 1.2166 \rightarrow \beta = 0.3874$$





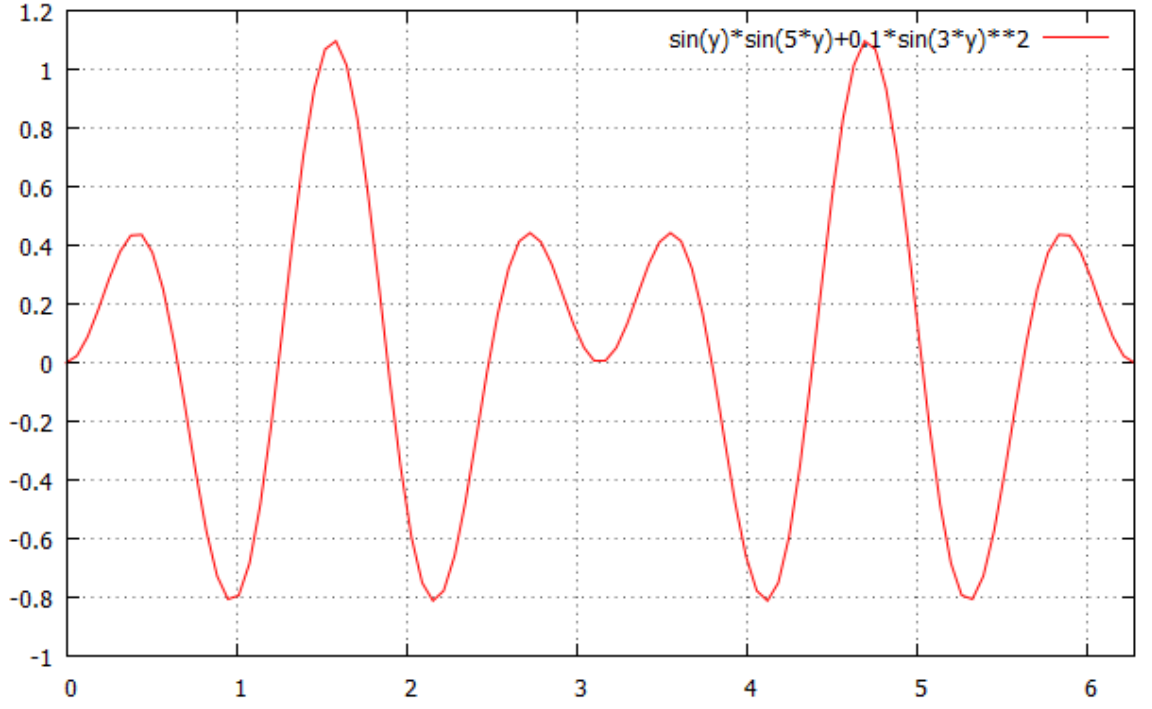
*Şekil 2.5 (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=100$  grafiği*

$s=3$  ve  $F=100$  değerleri için frekans dağılım denklemi

$$\sin y \sin 3y + 100 \sin^2 2y = 0 \text{ olur.}$$

$$\beta\pi = 1.5277 \rightarrow \beta = 0.4865$$

Şekil (2.5) de de görüldüğü gibi kendini  $\pi$  periyodunda tekrar eden grafiğimizde 1 tane  $\beta$  değeri bulunur.



**Şekil 2.6** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=0.1$  grafiği

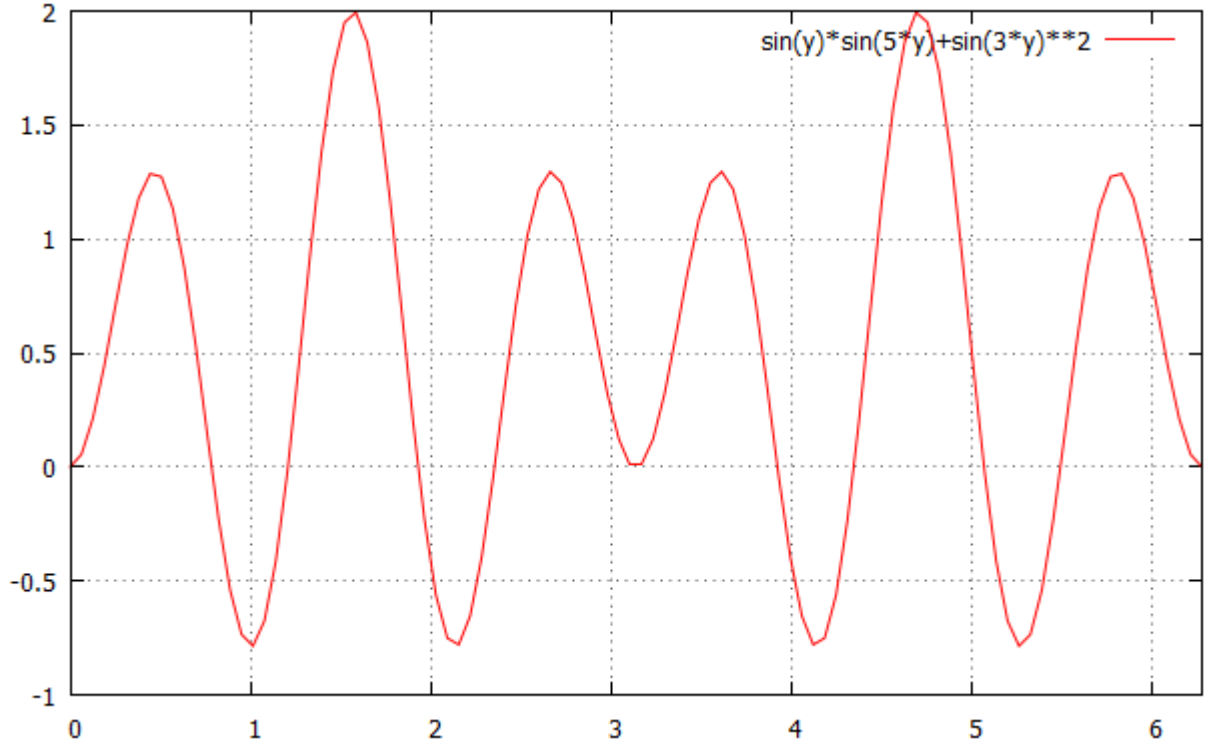
$s=5$  ve  $F=0.1$  için (2.20) denklemi

$\sin y \sin 5y + 0.1 \sin^2 3y = 0$  şekline gelir. Buradan da

$s=5$  için grafikten hareket ile 2 adet  $\beta$  değeri bulunur.

$$\beta_1 \pi = 0.6327 \rightarrow \beta_1 = 0.2014$$

$$\beta_2 \pi = 1.2539 \rightarrow \beta_2 = 0.3993$$



**Şekil 2.7** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=1$  grafiği

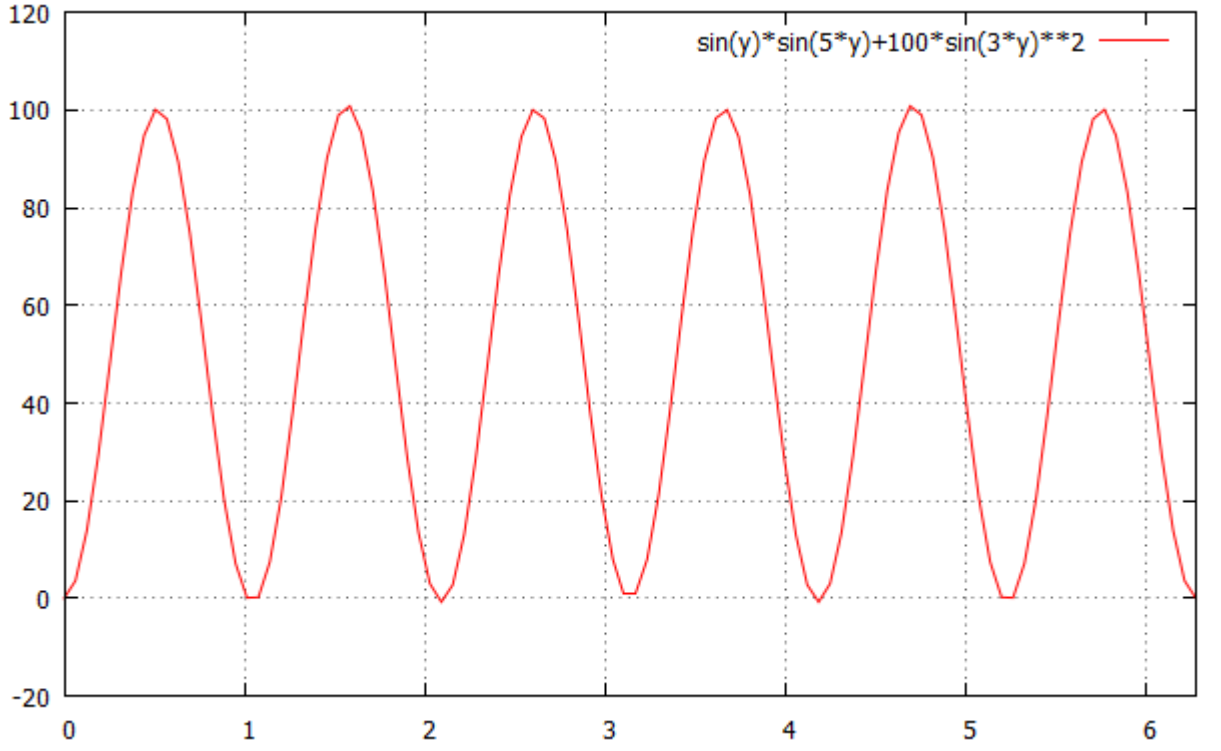
$s=5$  ve  $F=1$  için

$\sin y \sin 5y + \sin^2 3y = 0$  olur.

Grafikten de görüleceği gibi modların dağılım fonksiyonu kendini  $\pi$  periyodunda tekrar ediyor. Benzer şekilde  $s=5$  için 2 adet  $\beta$  değeri okunur.

$$\beta_1 \pi = 0.6319 \rightarrow \beta_1 = 0.2012$$

$$\beta_2 \pi = 0.2539 \rightarrow \beta_2 = 0.3993$$



**Şekil 2.8** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=100$  grafiği

$s=5$  ve  $F=100$  değerleri için modların dağılım denklemi

$\sin y \sin 5y + 100 \sin^2 3y = 0$  olur. Modların dağılım fonksiyonunu veren grafikten

$$\beta_1 \pi = 1.0175 \rightarrow \beta_1 = 0.3239$$

$$\beta_2 \pi = 1.2473 \rightarrow \beta_2 = 0.3972$$

Bu  $\beta$  değerlerini buluruz.

$s=7$  için  $\beta$  değerleri Brevik ve Nielsen'in değerleri ile uyumludur. Farklı  $s$  ve

$F$  lere göre  $\beta$  değerleri Tablo (2.1) de gösterildiği gibi yeniden elde edilmiştir [22].

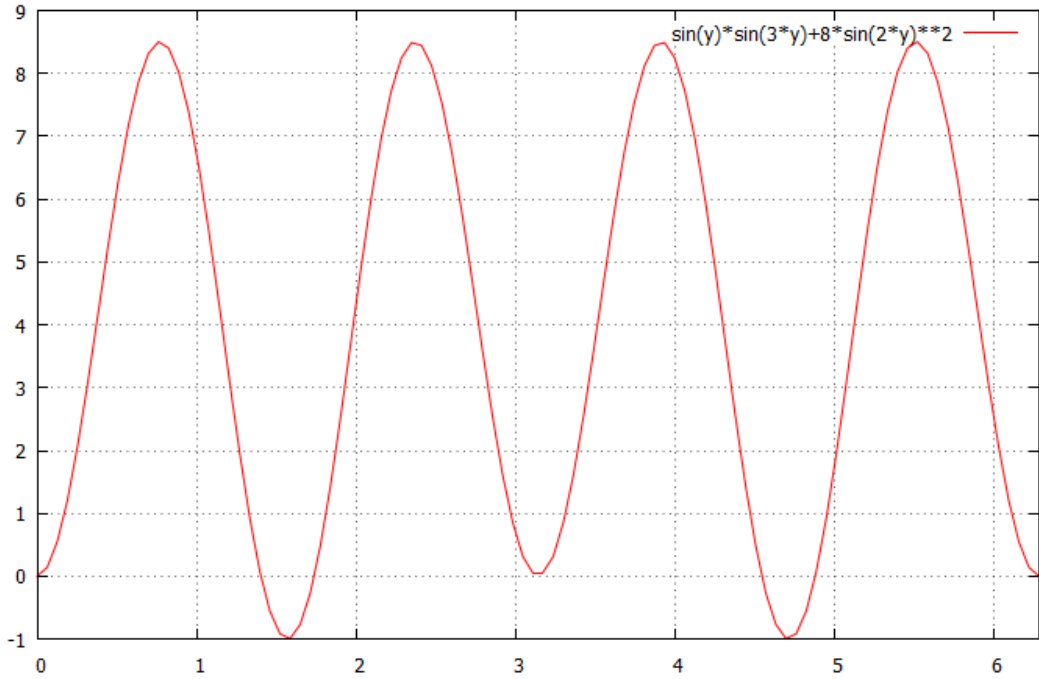
**Tablo 2.1** Burmasız sicim için  $F=0.1,1,100$ 'e karşılık gelen  $s=3,5,7$  değerleri tablosu

<b>F</b>	<b>S=3</b>	<b>S=5</b>	<b>S=7</b>
<b>0.1</b>	<b>0.3439</b>	<b>0.2014</b> <b>0.3993</b>	<b>0.1517</b> <b>0.2847</b> <b>0.4313</b>
<b>1</b>	<b>0.3874</b>	<b>0.2012</b> <b>0.3993</b>	<b>0.1893</b> <b>0.2785</b> <b>0.4468</b>
<b>100</b>	<b>0.4865</b>	<b>0.3239</b> <b>0.3972</b>	<b>0.2441</b> <b>0.2553</b> <b>0.4921</b>

Aşağıda açıkça görüldüğü gibi grafikten okuduğumuz  $\beta$  değerlerini cebirsel olarak da hesapladığımızda bulduğumuz sonuçlar ile örtüşmektedir.

$s$ ' in 1 ve 3 değerleri için  $x=0.5$  seçerek dispersiyon denkleminde yerine yazalım.

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) + F(x) \sin^2\left(\omega \frac{L_1}{2} (s+1)\right) = 0, \quad F(x) = \frac{4x}{(1-x)^2} \text{ dir.}$$



**Şekil 2.9** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=3, F= 8$  grafiği

$\pi\beta_1 = 1.4051$   $\beta_1 = 0.4472$  olarak grafikten elde edilir. Bu değeri cebirsel olarak yeniden elde edelim.

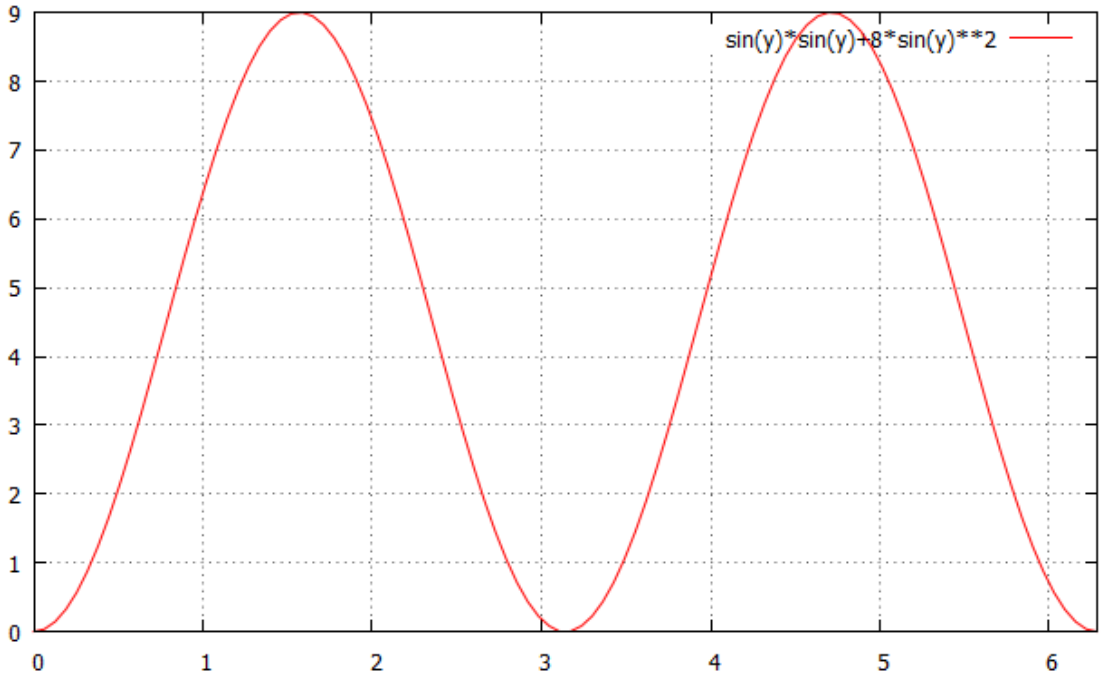
$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) + 8 \sin^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s + 1) \right) = 0$$

$\omega L_1 = t$  diyelim

$$\sin 3t \sin t + 8 \sin^2 2t = 0 \text{ olur.}$$

Bu transandantal denklemin çözümünden  $\sin^2 t = y$  seçimi yaparak

$\beta_1 = 0.4466$  bulunur. Bu cebirsel sonuç grafikteki değerle büyük oranda örtüşmektedir.



**Şekil 2.10** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=1$ ,  $F=8$  grafiği

$s=1$  için  $\beta_1=0$  bulunur.

Elde ettiğimiz modların dağılımını kullanarak  $s=3,5,7 \dots$  tek tamsayı değerleri için renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisini hesaplayalım. Yukarıdaki grafiklerden de elde edildiği gibi frekanslar dejenere dallanma ve çift dallanma değerleri olarak elde edilen mod dağılımları sırasıyla

$$\omega_{L_1} = \begin{cases} \pi n \\ \pi(\beta + n) \\ \pi(1 - \beta + n) \end{cases}$$

yazılır. Burada

$\omega = \frac{n}{L_1}$  dejenere dallanma,

$$\omega = \frac{\pi(\beta+n)}{L_1} \quad \text{ve} \quad \omega = \frac{\pi(1-\beta+n)}{L_1} \quad \text{çift dallanmalardır.} \quad (2.42)$$

İki parçalı sicim için kuantum vakum enerjisi bu frekanslara göre yazacak olursak

$E = E_1 + E_2$  olur.

$$E = E_{dejenere\ dallanma} + \sum E_{çift\ dallanmalar}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{L_1} + \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \pi(\beta_i + n) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(1 - \beta_i + n)}{L_1} \right\} \quad (2.43)$$

Burada  $L_1 = \frac{L}{s+1}$  dir.

(2.43) denklemindeki her bir toplamı kesici fonksiyon kullanılarak ayrı ayrı hesaplayacağız. Öncelikle ilk toplamı göz önüne alalım. İlk toplam dejenere dallanmadan gelen terimlerdir.

$$\tilde{E}_{dejenere\ dallanma} = 2x \frac{1}{2} \frac{\pi(s+1)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha\pi(s+1)n}{L}} \quad (2.44)$$

(2.44) denklemindeki toplamı hesaplayabilmek için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-tn} = \frac{e^{-t}}{(e^{-t} - 1)^2} \quad (2.45)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn} = \frac{1}{e^t - 1} \quad (2.46)$$

İfadeleri kullanılacaktır.

Buradaki

$$t = \frac{\pi\alpha(s+1)}{L} \quad \text{ve} \quad s = \frac{L_2}{L_1} \quad \text{dir.}$$

Yapılan uzun işlemlerin sonucunda

$$\tilde{E}_{dejenere dallanma} = \frac{1}{\alpha t} - \frac{t}{12\alpha} + O(t^2) \quad \text{bulunur.} \quad (2.47)$$

(2.47)'yi renormalize edersek ( $\alpha \rightarrow 0$  durumunda)

$$\tilde{E}_{dejenere dallanmalar} = -\frac{\pi(s+1)}{12L} \quad (2.48)$$

(2.43) denklemindeki son iki toplamı kesici fonksiyonlar ile tekrar yazacak olursak

$$\tilde{E}_{çift dallanmalar} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(\beta+n)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(\beta+n)}{L_1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(1-\beta+n)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(1-\beta+n)}{L_1}}$$

elde ederiz. (2.49)

Yukarıdaki (2.44) ve (2.45) sonuçlarını (2.49) da kullanarak regülarize edilmiş kuantum vakum enerjisi buluruz.

$$\tilde{E}_{çift dallanmalar} = \frac{1}{\alpha t} + \frac{1}{6\alpha} - \frac{t}{4\alpha} [\beta^2 + (1-\beta)^2] + O(t^2) \quad (2.50)$$

Böylece renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$E_{ren} = E_1 + E_2 - E_b$$

$$E_{ren} = \frac{\pi s(s-1)}{12L} - \frac{\pi(s+1)}{4L} \sum_{i=1}^{\frac{(s-1)}{2}} [\beta_i^2 + (1-\beta_i)^2] \quad (2.51)$$

şeklinde bulunur. Bu sonuç [22] ile uyum içerisindedir. Sayısal olarak Tablo 2.2 de enerji değerleri listelenmiştir.



**Tablo 2.2** s=3,5,7 için enerji değerleri tablosu  $E\left(\frac{L}{\pi}\right)$

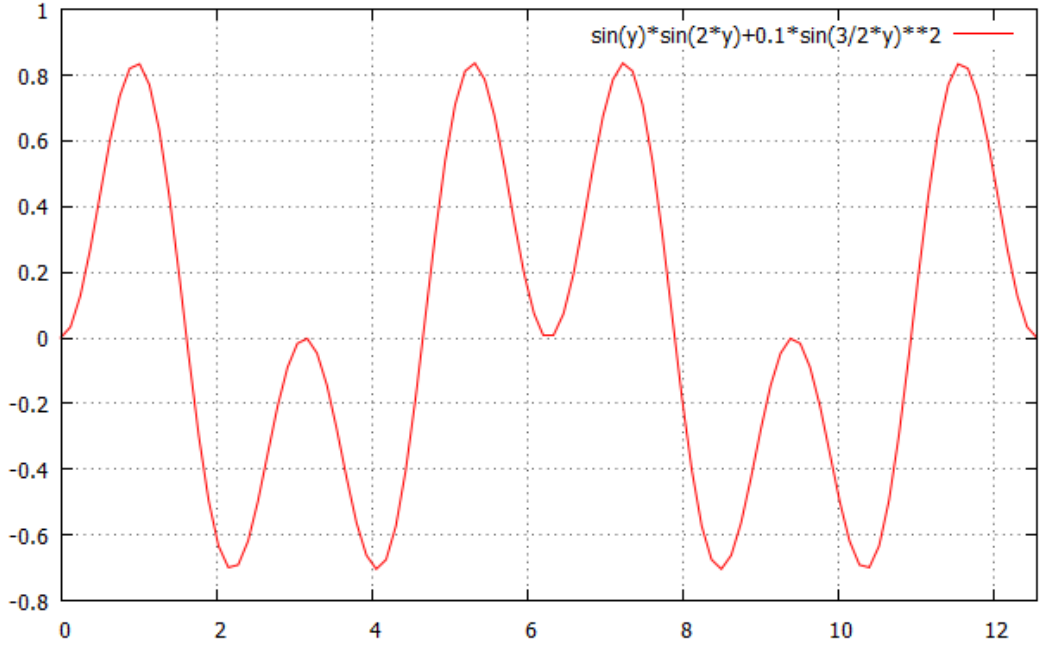
<b>F</b>	<b>S=3</b>	<b>S=5</b>	<b>S=7</b>
<b>0.1</b>	<b>-0.0501</b>	<b>-0.1186</b>	<b>-0.1892</b>
<b>1</b>	<b>-0.02645</b>	<b>-0.0650</b>	<b>-0.0932</b>
<b>100</b>	<b>-0.0004</b>	<b>-0.0010</b>	<b>-0.0168</b>

### 2.3 s=2, 4 Çift Tamsayı Değerleri

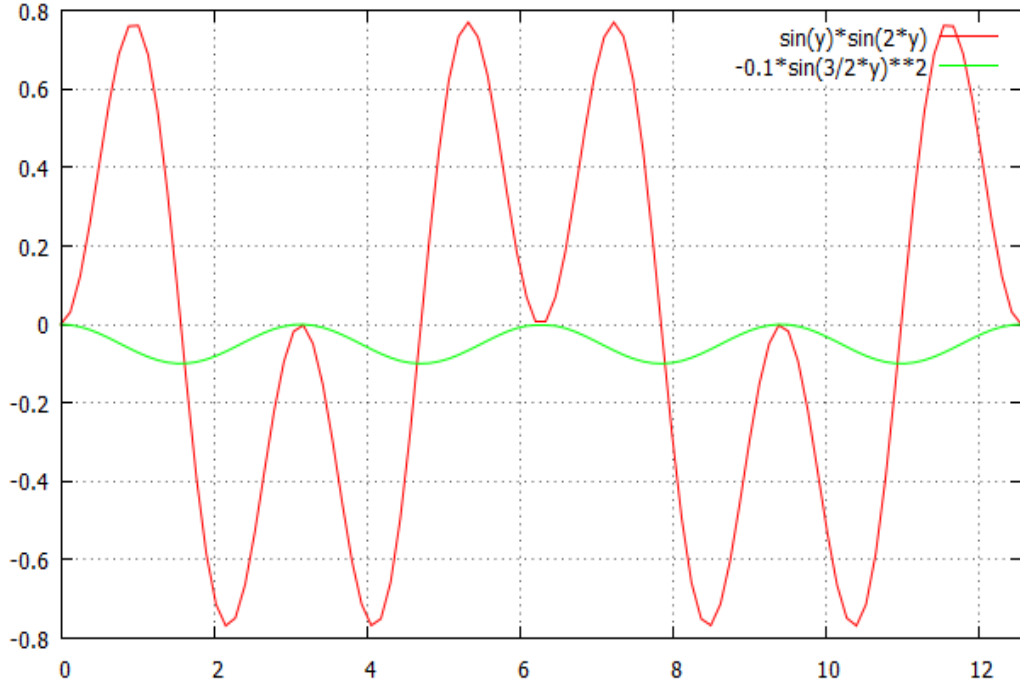
(2.20) frekans dağılımından hareket ile parçalı sicimlerin uzunlukları oranını bir çift doğal sayı tanımlayarak her  $x=\frac{T_1}{T_2}$  değerlerine göre frekans dağılımı kullanarak Casimir enerjisi hesaplayacağız.

$$\sin(\omega L_1 s)\sin(\omega L_1)+F(x)\sin^2\left(\omega \frac{L_1}{2}(s+1)\right)=0$$

frekans dağılım denkleminde  $\omega L_1=y$  seçerek  $F=0.1, 1$  ve  $100$  değerlerinde sırasıyla  $s=2$  ve  $s=4$  için üretilen modlar grafiklerin aracılığı ile bulunur.



Şekil 2.11.a. (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=2, F=0.1$  grafiği



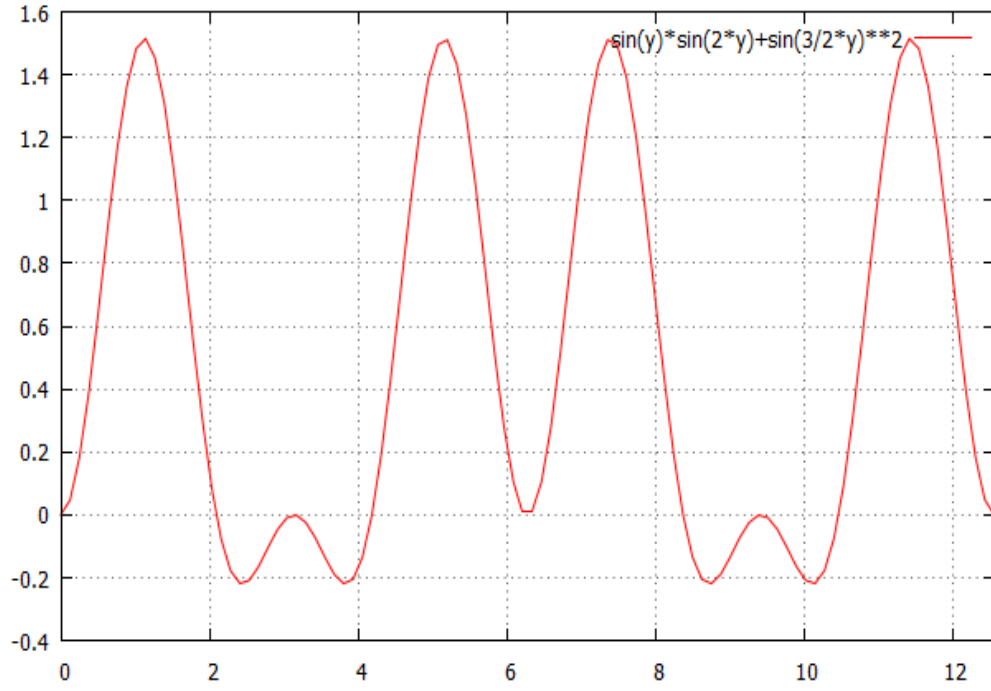
**Şekil 2.11.b** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=0.1$  grafiği

$s=2$  ve  $F=0.1$  için  $\sin y \sin 2y + 0.1 \sin^2 \frac{3}{2}y = 0$  denklemine dönüşür.

Fonksiyonlar  $2\pi$  periyodunda kendini tekrar eder.  $0, 2\pi$  ve  $4\pi \dots$  noktalarında dejenere değerler görülmektedir. Bu grafikten elde ettiğimiz  $\beta$  değerleri

$$\beta_1 = 1.5716 \rightarrow \beta_1 = 0.5005$$

$$\beta_2 \pi = 3.1399 \rightarrow \beta_2 = 0.9999 \text{ bulunur.}$$



**Şekil 2.12** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=1$  grafiği

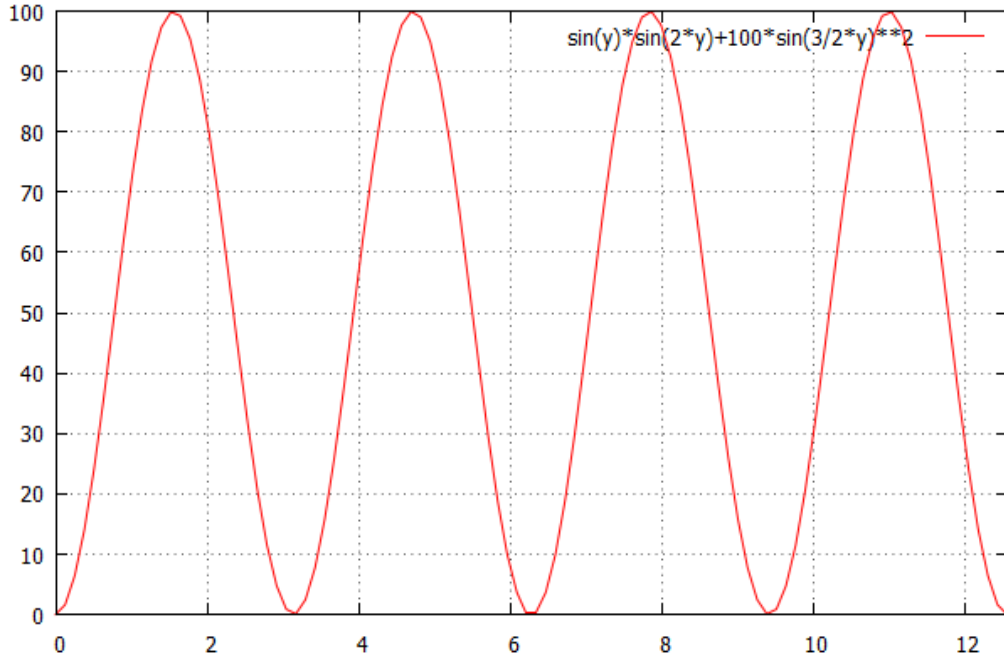
$s=2$  ve  $F=1$

$$\sin x \sin 2x + \sin^2 \frac{3}{2}x = 0$$

denklemden yola çıkarak çift tek tamsayı değerlerinde 's' sayısı kadar  $\beta$  değeri okunmaktadır.

$$\beta_1 \pi = 1.5716 \rightarrow \beta_1 = 0.5005$$

$$\beta_2 \pi = 3.1134 \rightarrow \beta_2 = 0.9991$$



**Şekil 2.13** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=10$  grafiği

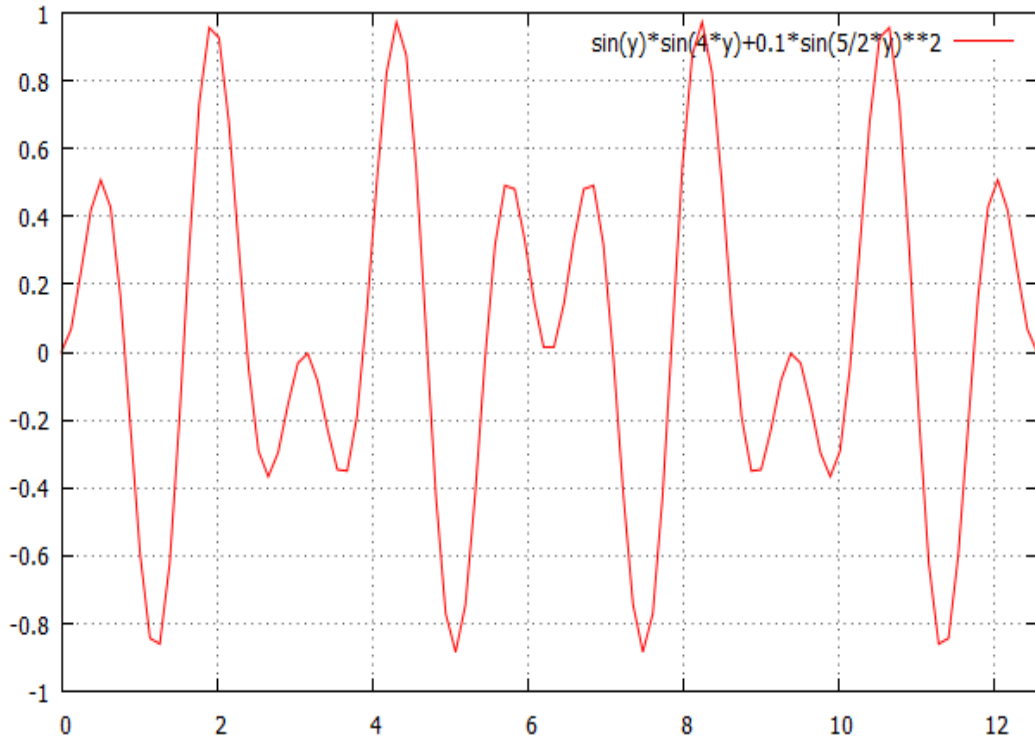
$s=2$  ve  $F=100$

$$\sin y \sin 2y + 100 \sin^2 \frac{3}{2}y = 0$$

$s=2$  için 2 adet  $\beta$  değeri okunmaktadır.

$$\beta_1 \pi = 1.5716 \rightarrow \beta_1 = 0.5005$$

$$\beta_2 \pi = 3.1334 \rightarrow \beta_2 = 0.9991$$



**Şekil 2.14** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=4$ ,  $F=0.1$  grafiği

$s=4$  ve  $F=0.1$

$$\sin y \sin 4y + 0.1 \sin^2 \frac{5}{2} y = 0$$

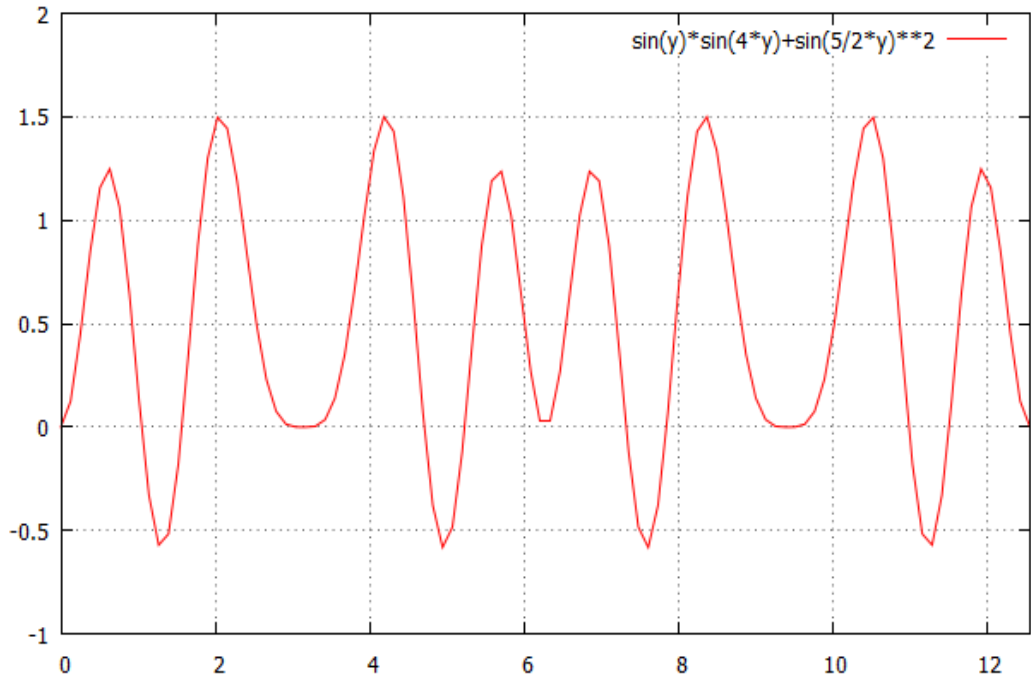
$s=4$  için 's' kadar yani 4 adet  $\beta$  değeri grafikten okunmaktadır.

$$\beta_1 \pi = 0.8304 \rightarrow \beta_1 = 0.2644$$

$$\beta_2 \pi = 1.5782 \rightarrow \beta_2 = 0.5026$$

$$\beta_3 \pi = 2.3855 \rightarrow \beta_3 = 0.7597$$

$$\beta_4 \pi = 3.1399 \rightarrow \beta_4 = 0.9999$$



**Şekil 2.15** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=4$ ,  $F=1$  grafiği

$s=4$  ve  $F=1$  için (2.20) denklemini

$$\sin y \sin 4y + \sin^2 \frac{5}{2}y = 0 \text{ bulunur.}$$

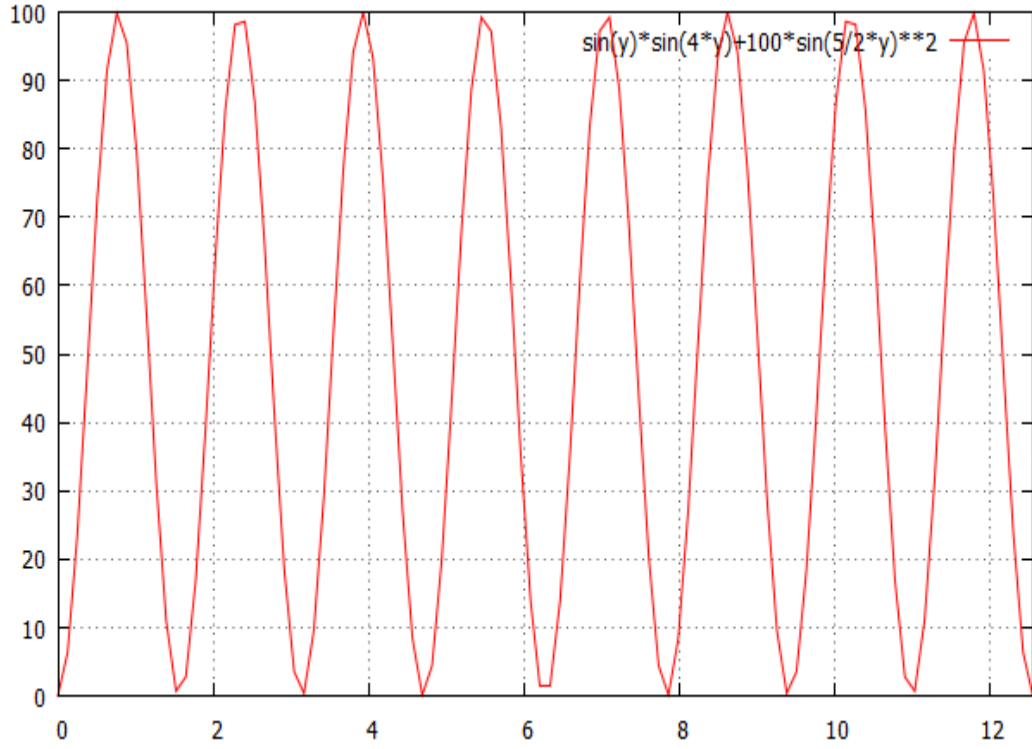
çift tamsayılar için çizilen frekans dağılım fonksiyonu  $2\pi$  periyodunda kendini tekrarlar.

$$\beta_1\pi = 0.7907 \rightarrow \beta_1 = 0.2518$$

$$\beta_2\pi = 1.5716 \rightarrow \beta_2 = 0.5005$$

$$\beta_3\pi = .3657 \rightarrow \beta_3 = 0.7534$$

$$\beta_4\pi = 3.1134 \rightarrow \beta_4 = 0.9915$$



**Şekil 2.16** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=4$ ,  $F=100$  grafiği

$s=4$  ve  $F=100$  için (2.20) denklemi

$\sin y \sin 4y + 100 \sin^2 \frac{5}{2}y = 0$  kullanarak,

$$\beta_1 \pi = 1.2179 \rightarrow \beta_1 = 0.3877$$

$$\beta_2 \pi = 1.2937 \rightarrow \beta_2 = 0.4750$$

$$\beta_3 \pi = 2.4909 \rightarrow \beta_3 = 0.7929$$

$$\beta_4 \pi = 2.5377 \rightarrow \beta_4 = 0.8078$$

$s=6$  için 6 adet  $\beta$  değeri sırasıyla,

$$F=0.1 \rightarrow 0.1756, 0.3319, 0.5025, 0.6624, 0.8340 \text{ ve } 0.9608$$

$$F=1 \rightarrow 0.2149, 0.3233, 0.5171, 0.6388, 0.8382 \text{ ve } 0.9080$$

$$F=100 \rightarrow 0.2783, 0.2925, 0.5628, 0.5804, 0.8535 \text{ ve } 0.8610$$

olarak bulunur [22].

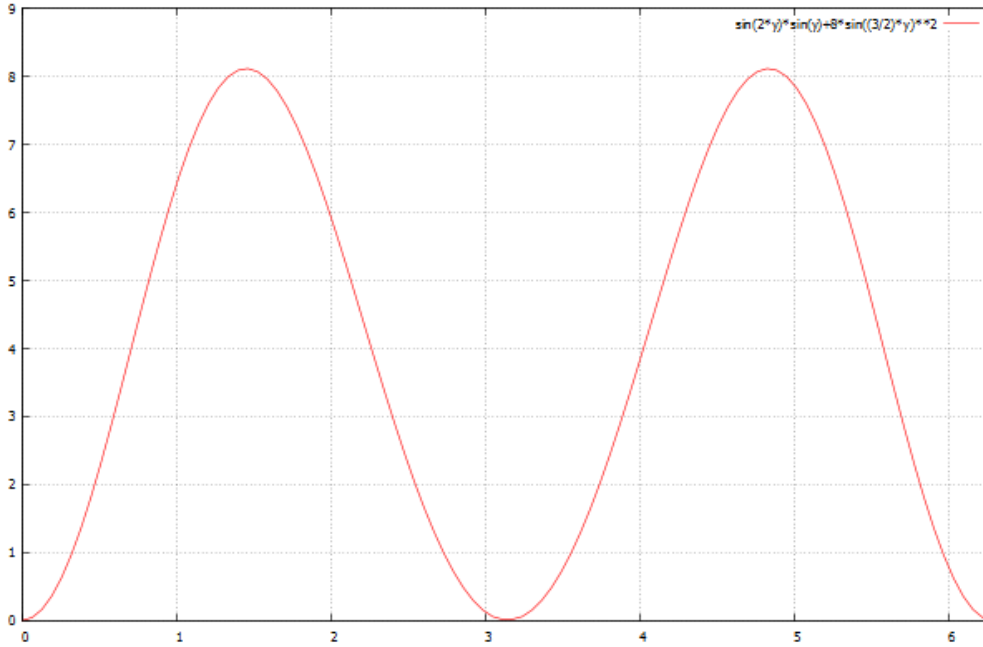


**Tablo 2.2** Burmasız sicim için  $F=0.1, 1, 100$ 'e karşılık gelen  $s=2, 4, 6$  değerleri tablosu

$F$	$S=2$	$S=4$	$S=6$
0.1	0.5005	0.2644	0,1756, 0.3319
	0.9999	0.5026	0.5025, 0.6624
		0.7597	0.8340, 0.9608
		0.9999	
1	0.5468	0.2518	0.2149, 0.3232
	0.8256	0.5005	0.5171, 0.6388
		0.7534	0.8382, 0.9080
		0.9915	
100	0.6487	0.3877	0.2783, 0.2925
	0.6853	0.4118	0.5628, 0.5804
		0.7929	0.8535, 0.8613
		0.8078	

Grafikten okuduğumuz  $\beta$  değerleri cebirsel olarak da hesaplandığında

$s$ ' in 2 değerleri için  $F(0.5)$  'de  $\beta_1 = 0.7322$  ve  $\beta_2 = 0.6081$  değerleri bulunmuştur. Bu sonuçlar tablo değerleri ile örtüşmektedir.



**Şekil 2.17** (2.20) frekans dağılım denkleminin  $s=2, F=8$  grafiği

Elde ettiğimiz grafikleri kullanarak  $s=2,4,\dots$  çift tamsayı değerleri için renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisini hesaplayalım. Öncelikle frekans dağılımlarını yazalım.

$$\omega L_1 = \begin{cases} 2\pi n \\ \pi(\beta + 2n) \\ \pi(2 - \beta + 2n) \end{cases} \quad (2.52)$$

Kuantum vakum enerji dejenere dallanma ve çift dallanmaların toplamlarından oluşur.

$$E = E_{dejenere\ dallanma} + \sum E_{çift\ dallanmalar}$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{L_1} + \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \pi(\beta_i + 2n) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2 - \beta_i + 2n)}{L_1} \right\} \quad (2.53)$$

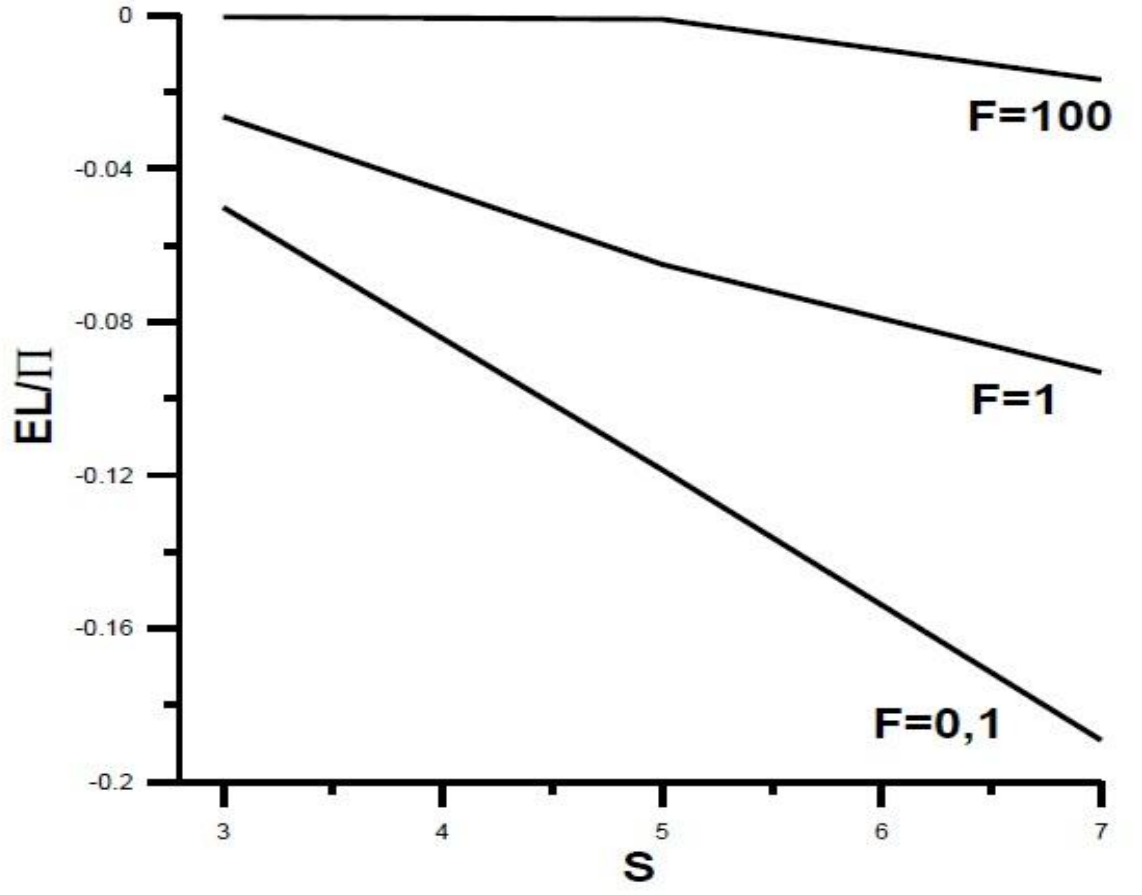
S pozitif çift tam sayılar için kesici fonksiyon kullanarak elde edilen kuantum vakum enerjisine (2.45) ve (2.46) denklemlerinin sonuçları ile renormalize edilmiş kuantum vakum enerji uzun ve benzer işlemlerin sonucunda

$$E_{ren} = \frac{\pi(2s + 1)}{6L} - \frac{\pi(s + 1)}{8L} \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + (2 - \beta_i)^2 \quad (2.54)$$

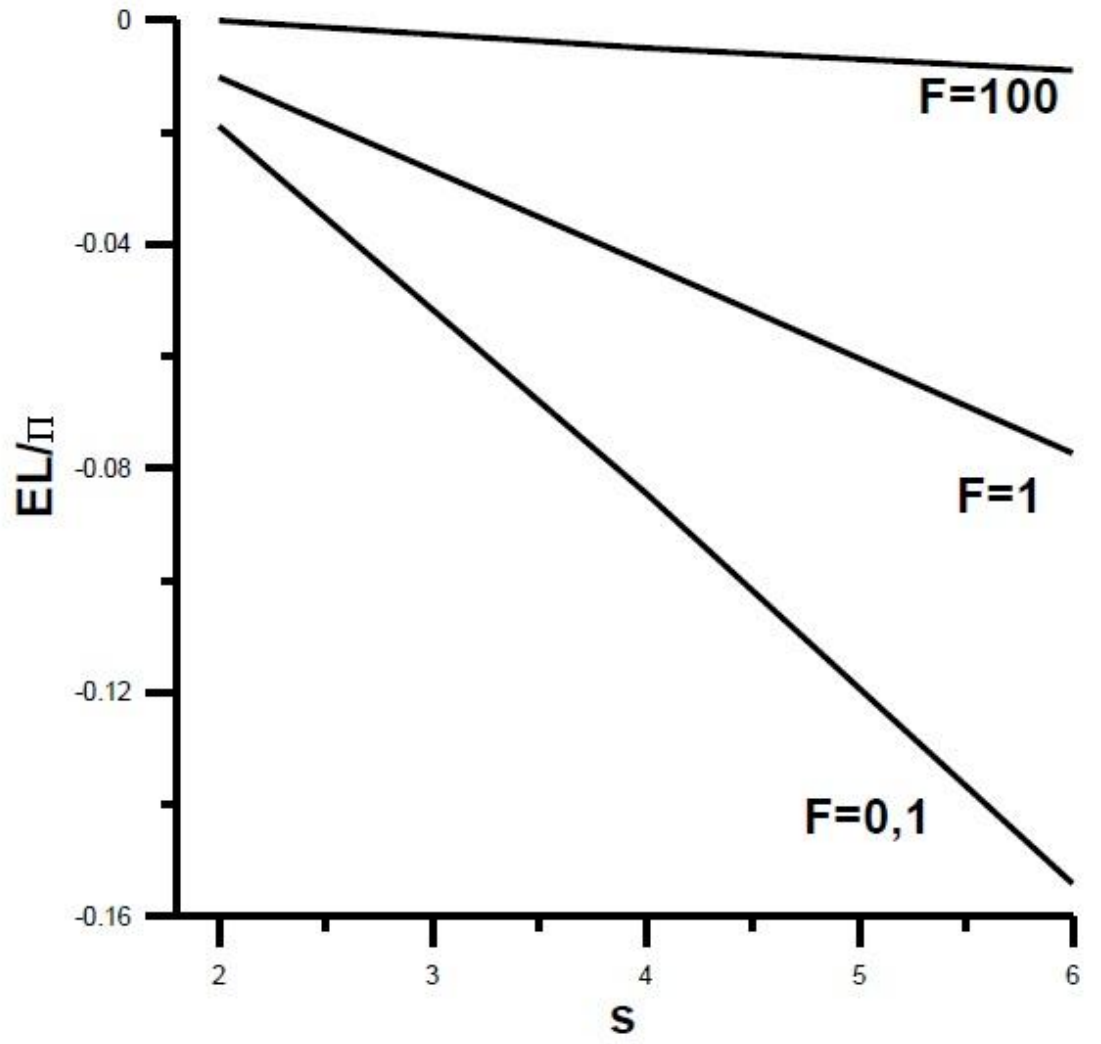
bulunur. Grafiklerden elde edilen  $\beta$  değerleri kullanılarak bazı s değerleri için Tablo 2.4 de kuantum vakum enerji değerleri gösterilmiştir. Sonuçlar [22] ile aynıdır.

**Tablo 2.4** s=2,4,6 için enerji değerleri tablosu  $E\left(\frac{L}{\pi}\right)$

<b>F</b>	<b>S=2</b>	<b>S=4</b>	<b>S=6</b>
<b>0.1</b>	<b>-0.0189</b>	<b>-0.0844</b>	<b>-0.1541</b>
<b>1</b>	<b>-0.0102</b>	<b>-0.0435</b>	<b>-0.0773</b>
<b>100</b>	<b>-0.0001</b>	<b>-0.0008</b>	<b>-0.0014</b>



**Grafik 2.1.a** Burmasız sicimlerde  $s$ 'in 3,5,7 tek değerleri için enerji grafiği



**Grafik 2.1.b** Burmasız sicimlerde  $s$ 'in 2,4,6 çift değerleri için enerji grafiği

**Tablo 2.5**  $x=\frac{1}{2}$  ve  $s=1, 2, 3$  için enerji değerleri tablosu

<b>F(x)</b>	<b>s=1</b>	<b>s=2</b>	<b>s=3</b>
<b>F(<math>\frac{1}{2}</math>)</b>	<b>0</b>	$-\frac{\pi}{447.76L}$	$-\frac{\pi}{178.57L}$

$x = \frac{1}{2}$  özel durumu için  $s=1,2,3$  değerlerine bağlı kalarak kuantum vakum enerji değerleri listelenmiştir.

## BÖLÜM 3

### BURMALI PARÇALI SİCİM

Bu bölümde  $L_1$  ve  $L_2$  uzunluklarında biri normal ve diğeri burmalı (Twisted) sınır şartına sahip olan iki farklı malzemeden yapılmış, kapalı bir sicim parçasına yerleştirilmiş kütleli skalar alanın kuantum vakum enerjisini hesaplayacağız.

Bölüm 2' de elde edildiği gibi dalga denklemlerinin genel çözümleri bir boyutlu yüzey geometrisinde

$$\Psi(\phi,t)=e^{-i\omega t}[Ae^{-im\phi} + Be^{im\phi}] \text{ şeklindedir.} \quad (3.1)$$

Bu genel çözümü iki parçalı sicim için yeniden ifade etmek istersek

Birinci tür malzemeden yapılmış bir boyutlu yüzey geometrisi için

$$\psi_1=e^{-i\omega t}[A_1 \cos m\phi + B_1 \sin m\phi], \quad (3.2)$$

ve ikinci tür malzemeye sahip geometrideki alanın çözümleri için

$$\psi_2=e^{-i\omega t}[A_2 \cos m\phi + B_2 \sin m\phi] \text{ dir.} \quad (3.3)$$

Burada  $A_1, A_2, B_1$  ve  $B_2$  birer sabittir.

Şimdi bu genel çözüme biri normal ve biri de burmalı süreklilik şartlarını uygulayacak olursak

Burmalıdan gelen süreklilik şartı

$$\psi_1(\phi=0) = -\psi_2(\phi=2\pi), \quad (3.4.1)$$

ve normal noktadan gelen süreklilik şartı ise

$$\psi_1(\phi=\phi_b)=\psi_2(\phi=\phi_b) \text{ dir.} \quad (3.4.2)$$

İkinci grup süreklilik şartları ise

Burmalıdan gelen süreklilik şartı

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = -T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=2\pi} , \quad (3.5.1)$$

ve normal noktadan gelen süreklilik şartı

$$T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_b} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_b} \quad \text{şeklinde yazılır.} \quad (3.5.2)$$

Burada  $T_1$  ve  $T_2$  sicim üzerindeki farklı gerilimleri göstermektedir.

Birinci ve ikinci bölgenin çözümleri (3.2) ve (3.3) denklemlerine süreklilik şartlarını sırasıyla uyguladığımızda

$$A_1 + A_2 \cos 2\pi m + B_2 \sin 2\pi m = 0 \quad (3.6)$$

$$A_1 \cos m\phi_b + B_1 \sin m\phi_b - A_2 \cos m\phi_b - B_2 \sin m\phi_b = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{T_1}{T_2} m B_1 - m A_2 \sin 2\pi m + m B_2 \cos 2\pi m = 0 \quad (3.8)$$

$$-\frac{T_1}{T_2} m A_1 \sin m\phi_b + \frac{T_1}{T_2} m B_1 \cos m\phi_b + m A_2 \sin m\phi_b - m B_2 \cos m\phi_b = 0 \quad (3.9)$$

İfadeleri elde edilir.

Burada  $x = \frac{T_1}{T_2}$  olarak denklemleri matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos 2\pi m & \sin 2\pi m \\ \cos m\phi_b & \sin m\phi_b & -\cos m\phi_b & -\sin m\phi_b \\ 0 & mx & m \sin 2\pi m & m \cos 2\pi m \\ -mx \sin \phi_b & mx \cos m\phi_b & m \sin \phi_b & -m \cos m\phi_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{elde ederiz.}$$

Bu eşitliğin sıfır olması 4x4 matrisinin determinantının sıfır olması ile mümkündür.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos 2\pi m & \sin 2\pi m \\ \cos m\phi_b & \sin m\phi_b & -\cos m\phi_b & -\sin m\phi_b \\ 0 & mx & -m \sin 2\pi m & m \cos 2\pi m \\ -mx \sin \phi_b & mx \cos m\phi_b & m \sin \phi_b & -m \cos m\phi_b \end{bmatrix} = 0$$

Uzun işlemler sonucunda burmalı alan için frekansların dağılım denklemini

$$(1-x)^2 \cos \omega(2L_1 - L) - (1+x)^2 \cos \omega L - 4x = 0 \quad (3.10)$$

olarak elde ederiz [23].



İlerideki çalışmalarda daha uygun kullanıma sahip olacağından frekans dağılımını

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) - F(x) \cos^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s + 1) \right) = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde de yazabiliriz.

$$\text{Burada } F(x) = \frac{4x}{(1-x)^2} \text{ ve } s = \frac{L_2}{L_1} \text{ dir.} \quad (3.12)$$

Burmasız sicim için bölüm 2'de (2.20) frekans dağılım denklemini yeniden yazacak olursak

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) + F(x) \sin^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s + 1) \right) = 0$$

(3.11) denklemindeki farklar açıkça görülmektedir. (3.11) denkleminde  $x$ ' leri  $1/x$  olarak tanımladığımızda denklem değişmez kalır. Bu da  $0 \leq x \leq 1$  olduğunu söyler.

Kuantum vakum enerjisi;

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \quad (3.13)$$

olduğundan, burmalı alanın sahip olduğu frekanslar (3.11) denkleminin çözümlerinden elde edilecektir. Burmalı skalar alanın frekans dağılım denklemi tıpkı burmasız skalar alanın dağılım denklemlerinde olduğu gibi boyutsuz iki değişkene göre düzenlenmektedir. Kuantum vakum enerji hesaplamasında bu iki boyutsuz değişkene göre frekans dağılımını bulmamız gerekir. Ayrıca renormalize edilmiş iki parçalı kapalı sicimdeki burmalı skalar alanın kuantum vakum enerjisi

$$E_{ren} = E_1 + E_2 - E_{bb} \quad (3.14)$$

şekli ile ifade edilir. Burada  $E_{bb}$  bir biçim malzemeden yapılmış sicimdeki burmalı skalar alandaki renormalize edilmiş kuantum enerjisidir. Bir biçim renormalize edilmiş burmalı skalar alanın kuantum vakum enerjisi bir biçim renormalize edilmiş burmasız skalar alanın enerjisinden tamamen farklıdır. Geometrilere aynı olmasına rağmen alan farklılığı enerji işaretini değiştirmiştir.

Frekans dağılımları boyutsuz  $x$  ve boyutsuz  $s$ ' lere bağılı olduğundan öncelikle  $x$ ' lerin özel durumlarını göz önüne alarak renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisini hesaplayacağız. Sonrasında ise 0 ve 1'den farklı  $x$ 'ler ve  $s$  boyutsuz değişkeni pozitif tamsayı olan durumlar için renormalize edilmiş enerji değerleri bulunacaktır.

### 3.1 Özel Durumlar

#### A. $x \rightarrow 1$

$x = \frac{T_1}{T_2}$  olduğundan  $x$ 'in 1'e eşit olması  $T_1$  ve  $T_2$  gerilimlerinin birbirine eşit olduğunu ifade eder. Diğer bir deyişle bu durum bir biçim kapalı sicime karşı gelir.

(3.11) frekans dağılım denklemine  $x=1$ 'i uygulayacak olursak;

$$\cos \omega L = -1 \quad \text{elde edilir.} \quad (3.15)$$

$$\cos \frac{(2n+1)\pi}{L} = -1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\omega = \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad \text{ve} \quad n=0,1,2,\dots \text{modların dağılımı bulunur.}$$

Bir biçim burmalı sicim için kuantum vakum enerjisi

$$E = 2x \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{L} \quad (3.16)$$

olarak yazılır.

(3.16) denklemi ıraksak bir karakterdedir. Öncelikle bu ıraksaklıklara neyin sebep olduğunu belirlememiz gerekir. Bu belirleme işlemine regülarizasyon denir. Kesici fonksiyonlu kuantum vakum enerjisi

$$\tilde{E}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{L} e^{-\frac{\alpha(2n+1)\pi}{L}} \quad (3.17)$$

göz önüne alarak renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi hesaplayalım.

Burada  $\alpha$  kesici parametre olarak tanımlanır. İşlemlerin sonucunda  $\alpha \rightarrow 0$ 'a gidecektir.

(3.17) denklemindeki sonsuz toplamı hesaplayabilmek için Euler- Maclaurin toplam formülünü kullanacağız [24,25,26].

Euler – Maclaurin toplam formülü

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) &= \int_0^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(\infty) + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(\infty) - (0)] \\ &+ \int_0^{\infty} \frac{B_{2m} - B_{2m}[x - [x]]}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx \end{aligned} \quad (3.18)$$

Şimdi (3.17) toplam ifadesine dönecek olursak Euler-Maclaurin toplam formülünü uygulamak için

$f(n) = \frac{\pi(2n+1)}{L} e^{-\alpha\pi\frac{(2n+1)}{L}}$  tanımlayarak (3.18) formülünü hesaplayalım.

$$f(\infty)=0 \quad f(0)=\frac{\pi}{L} e^{-\alpha\frac{\pi}{L}}$$

$$f^{(1)}(n)=\frac{\partial f}{\partial n}$$

$$f^{(1)}(n)=e^{-\alpha\pi\frac{(2n+1)}{L}} \left[ \frac{2\pi}{L} - \frac{8\pi^2\alpha(2n+1)}{L^2} \right]$$

$$f^{(1)}(\infty)=0 \quad f^{(1)}(0)=e^{-\alpha\frac{\pi}{L}} \left[ \frac{2\pi}{L} - \frac{2\pi^2\alpha}{L^2} \right]$$

$$f^{(2)}(n)=\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}$$

$$f^{(2)}(n)=e^{-\alpha\pi\frac{(2n+1)}{L}} \left[ -4\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 8\alpha^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \left(n + \frac{1}{2}\right) - 4\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right]$$

$$f^{(2)}(\infty)=0 \quad f^{(2)}(0)=e^{-\alpha\frac{\pi}{L}} \left[ -8\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 4\alpha^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \right]$$

$$f^{(3)}(n)=\frac{\partial^3 f}{\partial n^3}$$

$$f^{(3)}(n)=e^{-\alpha\pi\frac{(2n+1)}{L}} \left[ 24\alpha^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 - 16\alpha^3\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (2n+1) \right]$$

$$f^{(3)}(\infty)=0 \quad f^{(3)}(0)=e^{-\alpha\frac{\pi}{L}} \left[ 24\alpha^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 - 8\alpha^3\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \right] \quad (3.19)$$

⋮

⋮

(3.18) denkleminin sağ tarafındaki ilk integrali hesaplayacak olursak

$$\frac{2\pi}{L} \int_0^\infty \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha \frac{2\pi(x+\frac{1}{2})}{L}} dx = e^{-\frac{\alpha\pi}{L}} \frac{L}{2\pi\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \text{ dir.} \quad (3.20)$$

elde ederiz.

(3.19)' daki sonuçları (3.18)' da yerine yerleştirdiğimizde kesici parametreye bağlı kuantum vakum enerji elde edilir.

$$\tilde{E}_0 = \frac{L}{2\pi\alpha^2} + \frac{\pi}{12L} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif kuvvetleri şeklindedir}] \quad (3.21)$$

Sonsuzdaki sicimin kuantum boşluk enerjisini hesaplayalım. Bunun için ifadeyi  $L$ ' ye bölelim.

$$\frac{\tilde{E}_0}{L} = \frac{1}{2\pi\alpha^2} + \frac{\pi}{12L^2} + O(\alpha)$$

$L \rightarrow \infty$  alındığında

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tilde{E}_0}{L} = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \text{ olduğundan}$$

$$\text{Buda } \bar{E}_0 = \frac{L}{2\pi\alpha^2} \text{ karşı gelir.} \quad (3.22)$$

Sonsuzdaki kuantum vakum enerjisini elde ederiz. Buradan da anlaşıldığı gibi sonsuzluk  $L$ ' den bağımsız olan ilk terimde ortaya çıkar. Dolayısıyla biz bu terimi  $\bar{E}_0$  olarak adlandırırız. Bu ifadeyi  $\tilde{E}_0$  'dan çıkartıp  $\alpha \rightarrow 0$ ' a götürdüğümüzde tıpkı yüksüz iki paralel plakada olduğu gibi bir biçim sicimin üzerine yerleştirilmiş olan kütsüz skaler alanın renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi bulunur. Bunu çalışmamızın ilerleyen kısımlarında  $E_{bb}$  diye adlandıracağız. 1 ve 2. parçaların hesaplarının katkılarında bu terimi çıkarttığımızda geriye kalan terim bize renormalize edilmiş bir biçim iki farklı malzemedden yapılmış kapalı bir sicimdeki burmalı skalar alanın kuantum vakum enerjisini verecektir.

$$E_{ren} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\tilde{E}_0 - \bar{E}_0]$$

$$E_{ren} = \frac{\pi}{12L} \text{ renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisidir.} \quad (3.23)$$

Burmali alanin kuantum vakum enerjisi pozitif ciktiği için itici kuvvet ürettiği anlamına gelir. bu sonuç burmasız alandan elde ettiğimiz sonuçtan tamamen farklıdır.

Şimdi  $x \rightarrow 0$  durumunu göz önüne alalım

$x = \frac{T_1}{T_2}$  olduğundan  $T_1 \rightarrow 0$ ,  $T_2 \rightarrow \infty$  anlamındadır.  $x \rightarrow 0$  durumu için frekans dağılımını hesaplayalım.

Bu durum (3.11) denkleminde  $x=0$  alırsak

$$\sin \omega L_1 \sin \omega L_2 = 0$$

Bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı modların  $x \rightarrow 0$  limitinde nasıl bir karakterde olduğunu belirleyecektir.

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L_1} \quad (3.24)$$

$$\omega_n = \frac{\pi n}{L_2} \quad (3.25)$$

$$n=1,2,3\dots$$

Bu mod dağılımına göre kuantum vakum enerjisi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{L_1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{L_2}$$

(3.26)

$\tilde{E}_0 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$  şeklinde parçalayarak kesici fonksiyonu kullanarak yeniden yazalım.

$$\tilde{E}_1 = \frac{\pi}{2L_1} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_1}} \quad (3.27)$$

ve

$$\tilde{E}_2 = \frac{\pi}{2L_2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n \frac{\pi}{L_2}} \text{ şeklindedir.} \quad (3.28)$$

$f(n) = \frac{\pi n}{2L} e^{-\alpha \pi \frac{n}{L}}$  şeklinde tanımlayarak (3.18) formülünü hesaplayalım.

$$f(\infty) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f^{(1)}(n) = \frac{\partial f}{\partial n}$$

$$f^{(1)}(n) = \frac{\pi}{2L} e^{-\alpha \pi \frac{n}{L}} \left[ 1 - \frac{\alpha \pi n}{L} \right]$$

$$f^{(1)}(\infty) = 0 \quad f^{(1)}(0) = \frac{\pi}{2L}$$

$$f^{(2)}(n) = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}$$

$$f^{(2)}(n) = e^{-\alpha \pi \frac{n}{L}} \left[ -\alpha \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{n \alpha^2 \pi^3}{2L^3} \right]$$

$$f^{(2)}(\infty) = 0 \quad f^{(2)}(0) = \frac{-\alpha \pi^2}{L^2}$$

$$f^{(3)}(n) = \frac{\partial^3 f}{\partial n^3}$$

$$f^{(3)}(n) = e^{-\alpha \pi \frac{n}{L}} \left[ \frac{3\alpha^2 \pi^3}{2L^3} \right]$$

$$f^{(3)}(\infty) = 0 \quad f^{(3)}(0) = \left[ \frac{3\alpha^2 \pi^3}{2L^3} \right] \quad (3.29)$$

⋮

⋮

(3.29)'daki denklemlerin sonuçlarını kullanarak kesici parametreye bağlı birinci ve ikinci parçalara ait olan kuantum vakum enerjisi aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\bar{E}_1 = \frac{L_1}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{24L_1} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif kuvvetleri şeklindedir.}] \quad (3.30)$$

$$\bar{E}_2 = \frac{L_2}{2\pi\alpha^2} - \frac{\pi}{24L_2} + [\text{Terimler } \alpha' \text{ nın pozitif kuvvetleri şeklindedir.}] \quad (3.31)$$

$$\bar{E}_0 = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \quad (3.32)$$

$$E_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [\tilde{E}_0 - \bar{E}_0] \quad (3.33)$$

Burada yarıçapı sonsuza götürdüğümüzde sonsuz geometriden gelen terimler sırasıyla

$$\frac{L_1}{2\pi\alpha^2} \text{ ve } \frac{L_2}{2\pi\alpha^2} \text{ bulunur.} \quad (3.34)$$

$x \rightarrow 0$  iken iki parçalı sicimdeki burmalı alanın renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$E_{ren} = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) - E_{bb} \quad (3.35)$$

$$E_{bb} = \frac{\pi}{12L} \quad (3.36)$$

$$E_{ren} = -\frac{\pi}{24} \left[ s + \frac{1}{s} + 4 \right] \quad (3.37)$$

$s \geq 1$  olur.

[23] ile uyumlu sonuç elde edilmiştir.

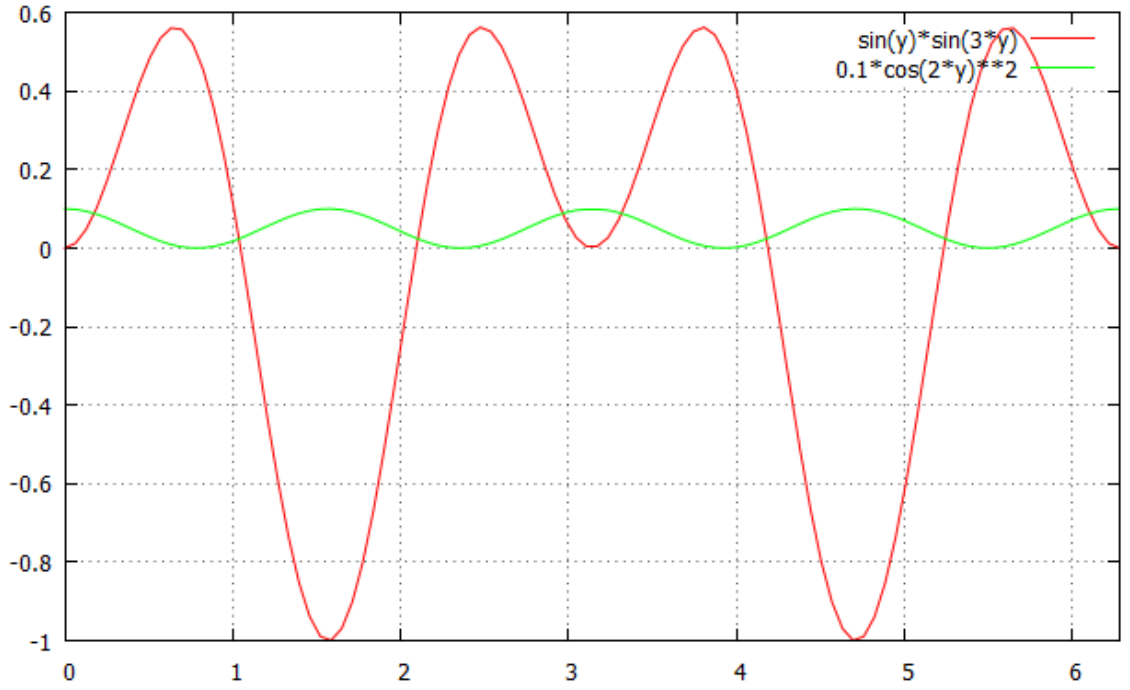


### 3.2 s=3,5 Tek Tam Sayı Değerleri

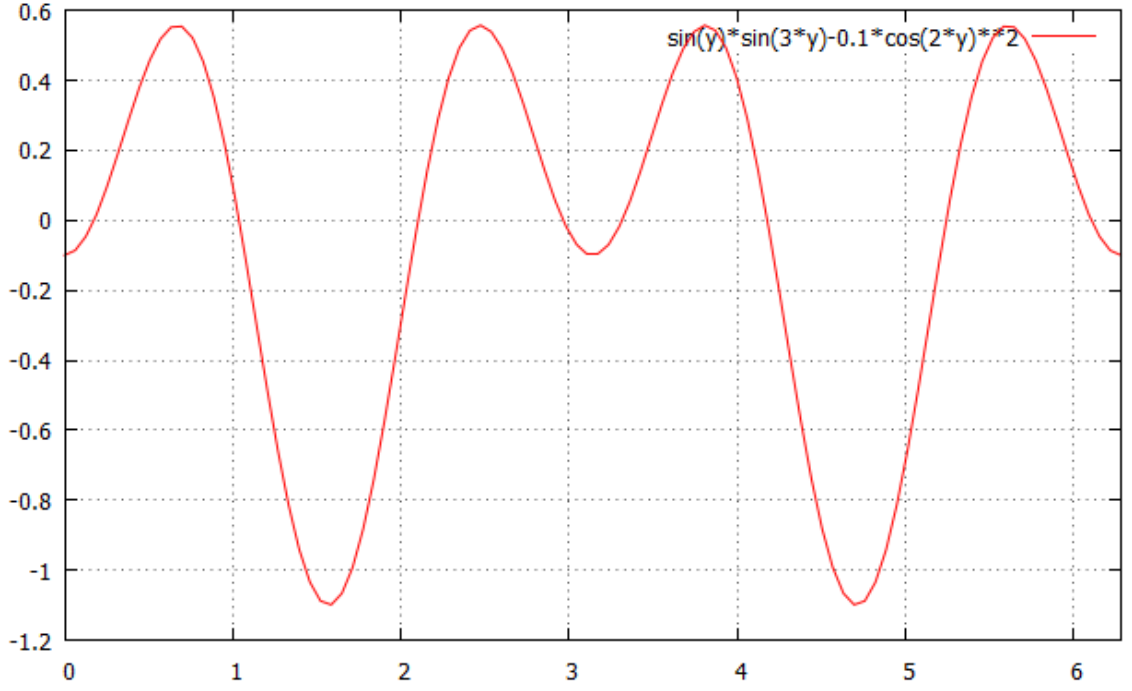
Frekans dağılım denklemini s'in tek pozitif tam sayı değerleri için yazarak  $\omega$  değerlerini grafikler aracılığı ile elde edelim. (3.11) denklemini tekrar yazacak olursak

$$\sin\omega L_1 \sin(s\omega L_1) - F(x) \cos^2 \left[ \frac{1+s}{2} \omega L_1 \right] = 0 \quad (3.38)$$

denklemden hareket ile  $\omega L_1 = y$  seçerek  $F=0.1$  ve  $1$  değerlerinde sırasıyla  $s=3$  ve  $s=5$  için  $[0, 2\pi]$  aralığında grafikleri çizecek olursak



Şekil 3.1.a. (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=0.1$  grafiği



**Şekil 3.1.b** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=0.1$  grafiği

$s=3$  ve  $F=0.1$  değerlerini kullanarak frekans dağılım denkleminin

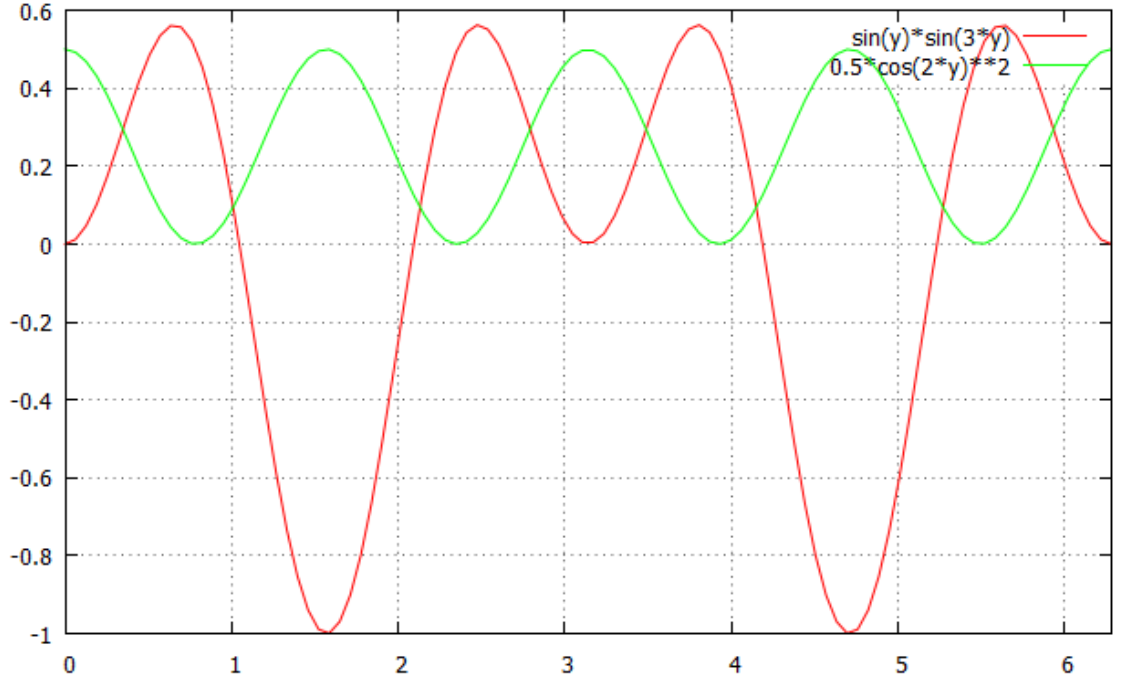
$$\sin y \sin 3y - 0.1 \cos^2 2y = 0$$

sonucunda

$$\beta_1 = 0.0553$$

$$\beta_2 = 0.3331$$

değerleri bulunur.



**Şekil 3.2** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=0.5$  grafiği

Benzer şekilde

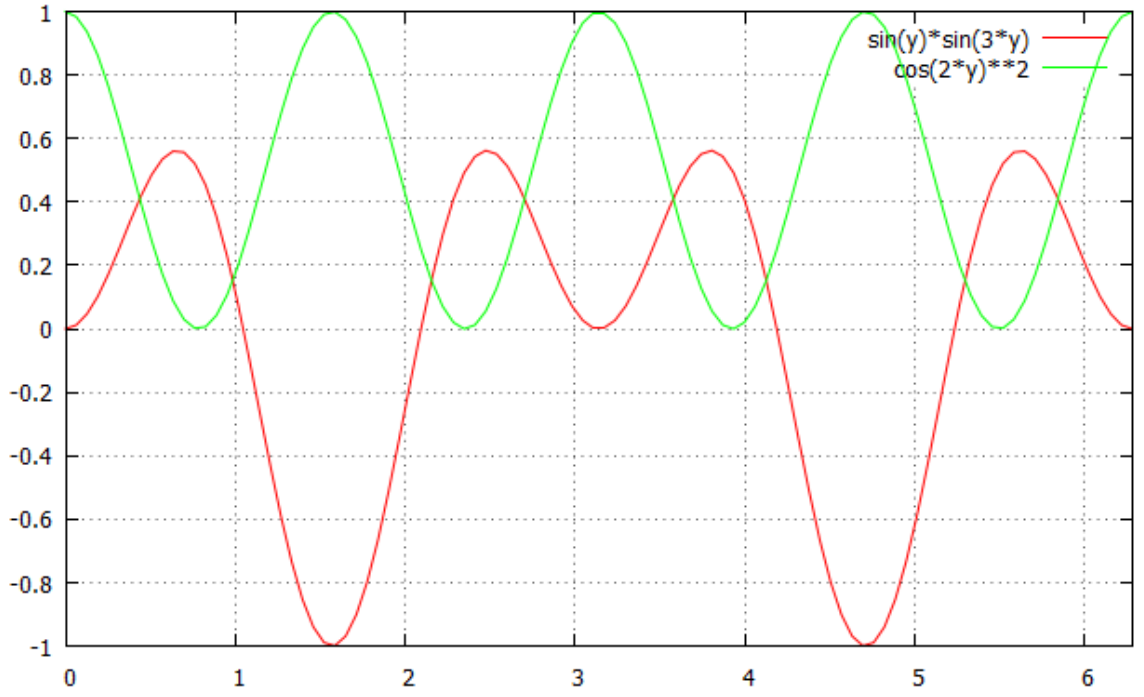
$s=3$  ve  $F=0.5$  için

$$\sin y \sin 3y - 0.5 \cos^2 2y = 0$$

$$\beta_1 = 0.1096$$

$$\beta_2 = 0.3227$$

bulunur.



*Şekil 3.3 (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=1$  grafiği*

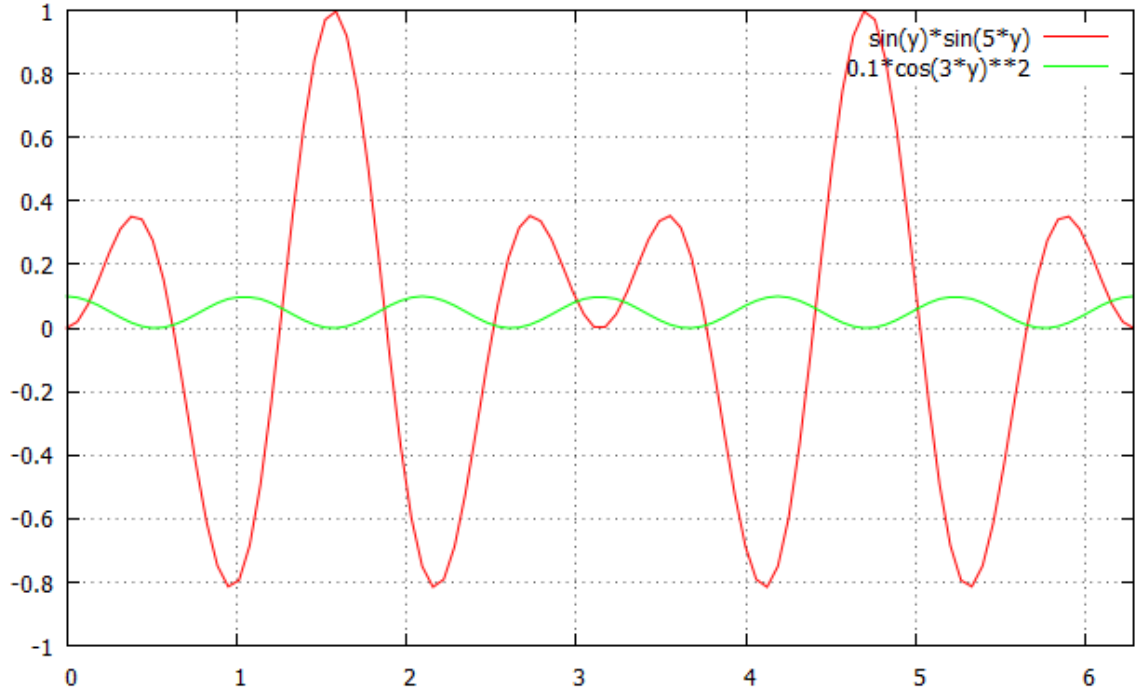
$s=3$  ve  $F=1$  için frekans dağılım ifadesi

$\sin y \sin 3y - \cos^2 2y = 0$  olur.

$\beta_1 = 0.1430$

$\beta_2 = 0.3164$

olarak bulunur.



**Şekil 3.4** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=0.1$  grafiği

Benzer şekilde

$s=5$  ve  $F=0.1$  için

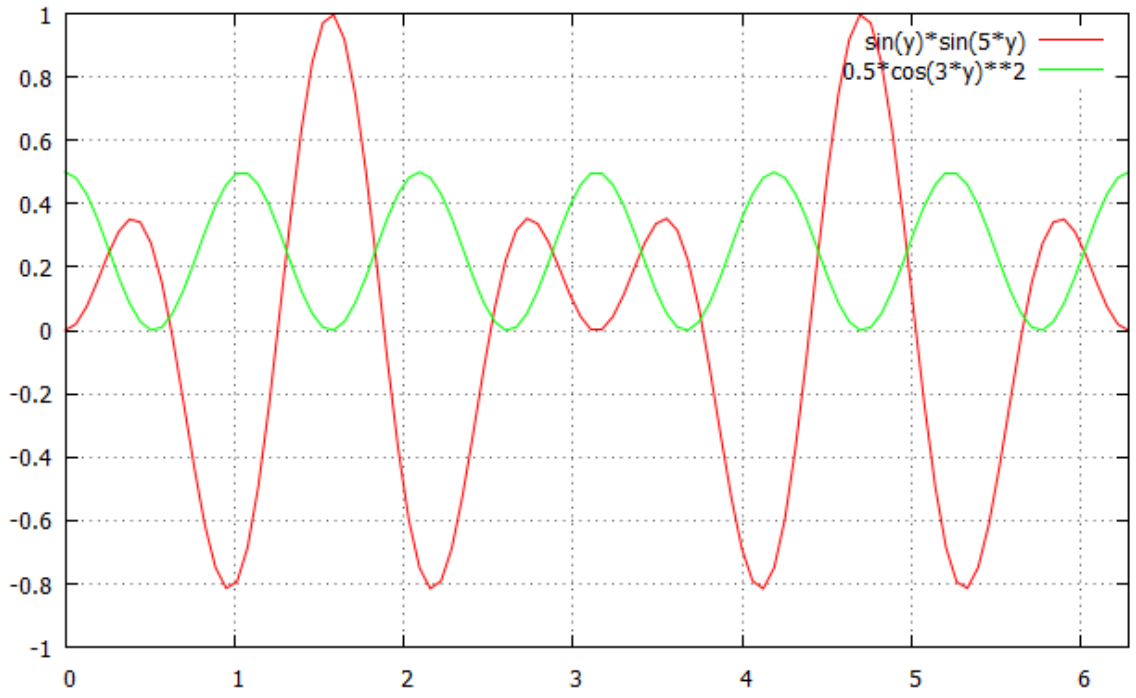
$\sin y \sin 5y - \cos^2 3y = 0$  olur.

$\beta_1 = 0.0490$

$\beta_2 = 0.2015$

$\beta_3 = 0.4062$

değerleri bulunur.



**Şekil 3.5** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=0.5$  grafiği

$s=5$  ve  $F=0.5$  için frekans dağılım ifadesi

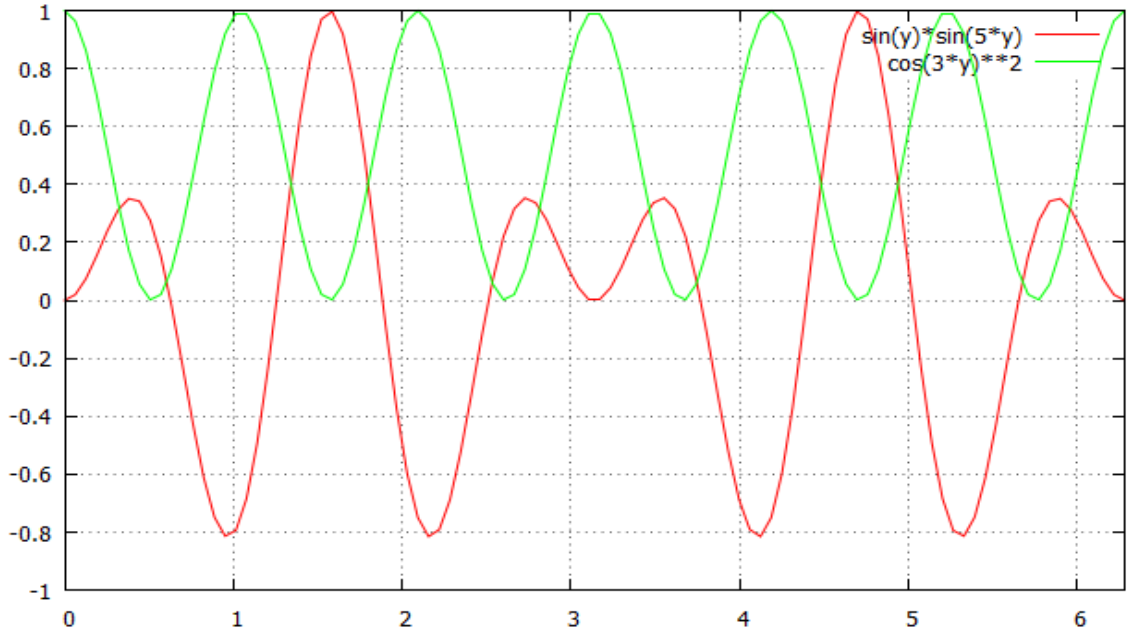
$\sin y \sin 5y - 0.5 \cos^2 3y = 0$  olur. Sırasıyla  $\beta$  değerleri

$$\beta_1 = 0.0490$$

$$\beta_2 = 0.2015$$

$$\beta_3 = 0.4062$$

olarak bulunur.



**Şekil 3.6** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=5$ ,  $F=1$  grafiği

$s=5$  ve  $F=1$  için frekans dağılım ifadesi

$\sin y \sin 5y - \cos^2 3y = 0$  olur.

$$\beta_1 = 0.1054$$

$$\beta_2 = 0.1952$$

$$\beta_3 = 0.4292$$

olarak bulunur.

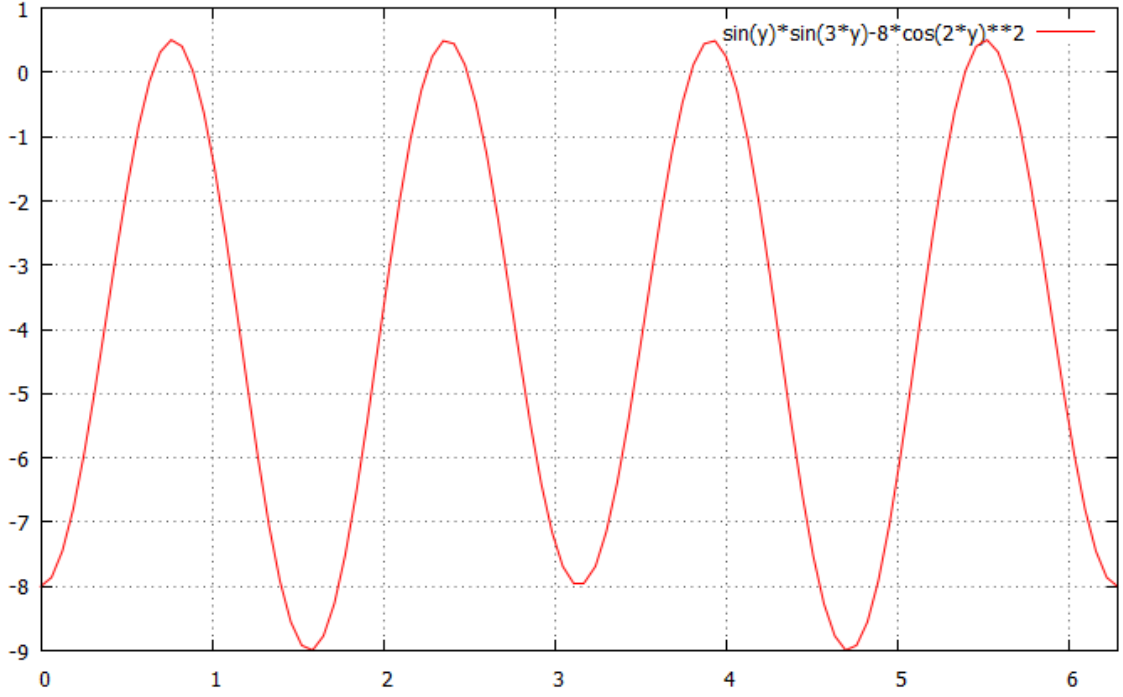
**Tablo 3.1** Burmalı sicim için  $F=0.1, 0.5, 1'$  e karşılık gelen  $s=3,5,7$  değerleri tablosu

<b>F</b>	<b>S=3</b>	<b>S=5</b>	<b>S=7</b>
<b>0.1</b>	<b>0.0553</b>	<b>0.0490</b>	<b>0.0386</b>
	<b>0.3331</b>	<b>0.2015</b>	<b>0.1472</b>
		<b>0.4062</b>	<b>0.2934</b>
			<b>0.4313</b>
<b>0.5</b>	<b>0.1096</b>	<b>0.0845</b>	<b>0.0699</b>
	<b>0.3227</b>	<b>0.1973</b>	<b>0.1451</b>
		<b>0.4167</b>	<b>0.3039</b>
			<b>0.4250</b>
<b>1</b>	<b>0.1430</b>	<b>0.1054</b>	<b>0.0825</b>
	<b>0.3164</b>	<b>0.1952</b>	<b>0.1368</b>
		<b>0.4292</b>	<b>0.3164</b>
			<b>0.4188</b>



$$\sin \omega L_1 \sin(s \omega L_1) - F(x) \cos^2 \left[ \frac{1+s}{2} \omega L_1 \right] = 0$$

Frekans dağılım denkleminde  $x=0.5$  ve  $s=1$  ve  $3$  değerleri için grafikleri çizerek  $\beta$  değerlerini cebirsel olarak da bulalım.



**Şekil 3.7** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=3$ ,  $F=8$  grafiği

$$\sin(\omega L_1 s) \sin(\omega L_1) - 8 \cos^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s+1) \right) = 0$$

$\omega L_1 = t$  diyelim

$$\sin 3t \sin t - 8 \cos^2 2t = 0 \text{ olur.}$$

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t \text{ ve}$$

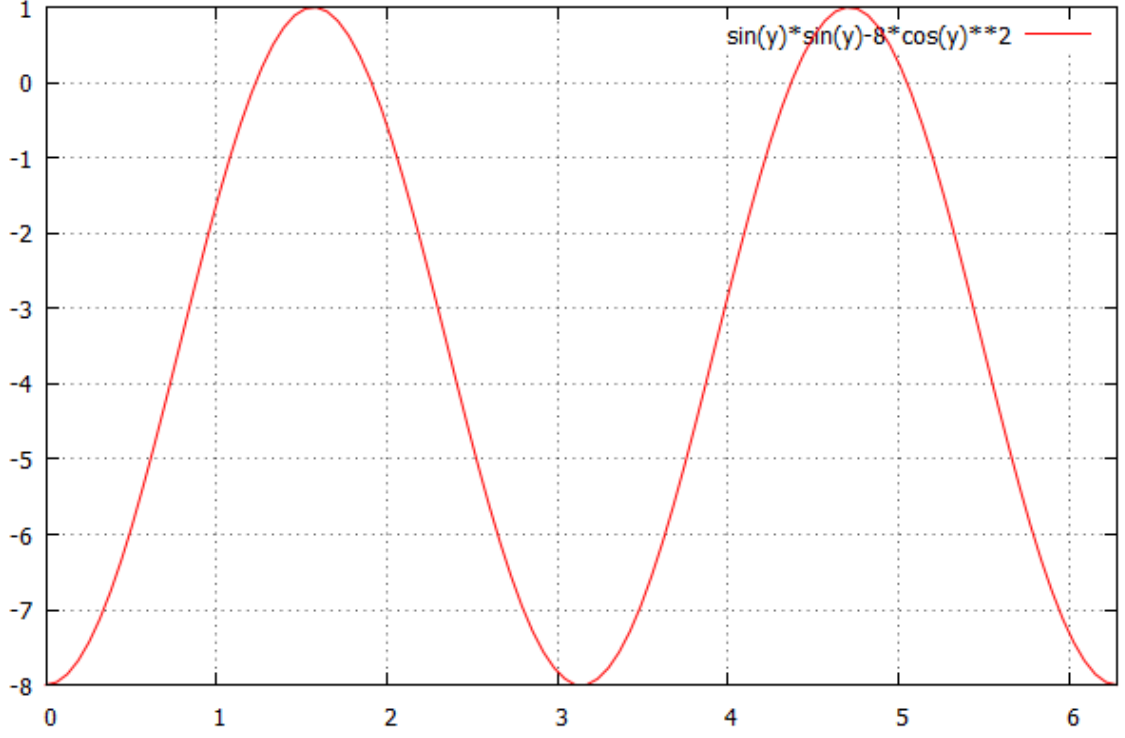
$$\sin^2 2t = 4 \sin^2 t \cos^2 t \text{ eşitliklerini kullanarak}$$

$$35 \sin^2 t - 36 \sin^4 t - 8 = 0 \text{ elde ederiz.}$$

$\sin^2 t = y$  seçelim

Buna göre,

$\beta_1= 0.2835$  ve  $\beta_2= 0.2072$  bulunur.



*Şekil 3.8 (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=1$ ,  $F=8$  için grafiği*

Benzer şekilde  $s=1$  ve  $F=8$  için  $\beta_1= 0.3917$  olarak bulunur.

s'in tek sayı değerlerinde burmalı skalar alan için Casimir enerjisi elde edelim.  
Yukarıdaki grafiklerin sonucunda  $\omega$  değerlerinin dağılımı

$$\omega L_1 = \begin{cases} \pi(\beta + n) \\ \pi(1 - \beta + n) \end{cases} \quad (3.39)$$

elde edilir. Böylece kuantum vakum enerjisi

$$E_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(\beta + n)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(1 - \beta + n)}{2} \quad (3.40)$$

şekindedir. Kesici fonksiyonlu kuantum vakum enerjisi ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(\beta + n)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(\beta+n)}{L_1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(1 - \beta + n)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(1-\beta+n)}{L_1}}$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta + n)t}{\alpha} e^{-t(\beta+n)} + \frac{(1 - \beta + n)t}{\alpha} e^{-t(1-\beta+n)} \quad (3.41)$$

Burada  $t = \frac{\pi\alpha(s+1)}{L}$

Kesici fonksiyonlu kuantum vakum enerjisi terimindeki toplamlar Euler- Maclaurin toplam formülünü kullanarak renormalize edilmiş burmalı skalar alanın kuantum vakum enerjisi

$$E = E_{1+2} - E_{bb}$$

tanımı ile

$$E_{ren} = \frac{\pi(s^2 + 2s)}{12L} - \frac{\pi(s + 1)}{4L} \sum_{i=1}^{\frac{(s+1)}{2}} [\beta_i^2 + (1 - \beta_i)^2] \quad (3.42)$$

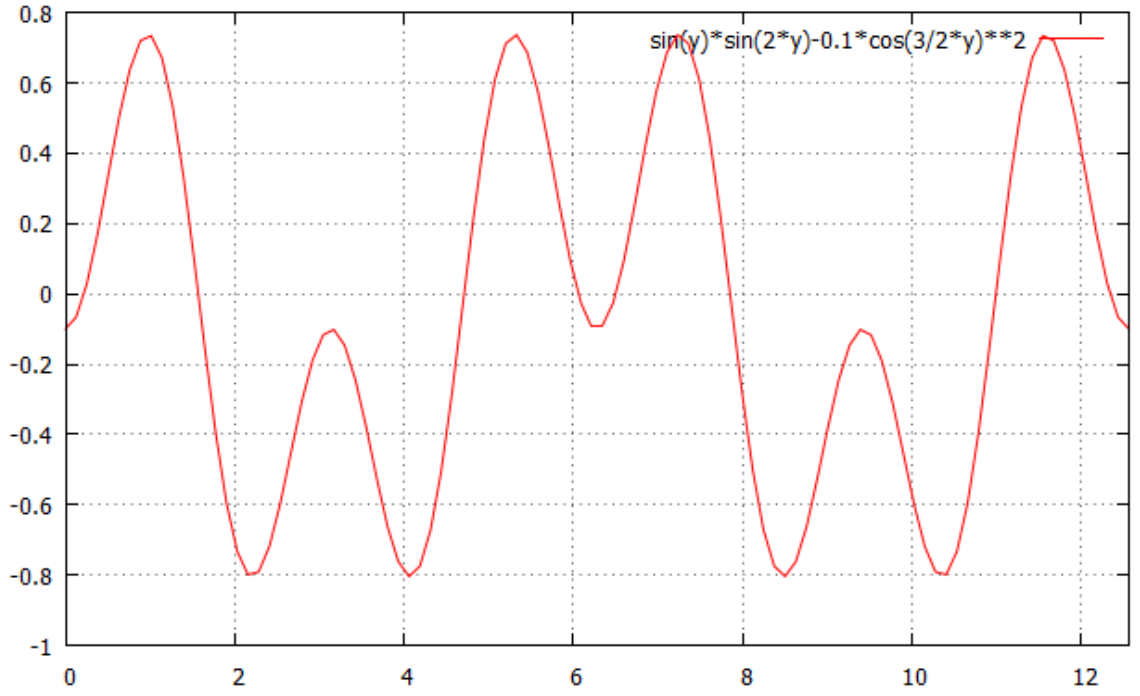
elde edilir.

**Tablo 3.2** s=3,5,7 için enerji değerleri tablosu  $E\left(\frac{L}{\pi}\right)$

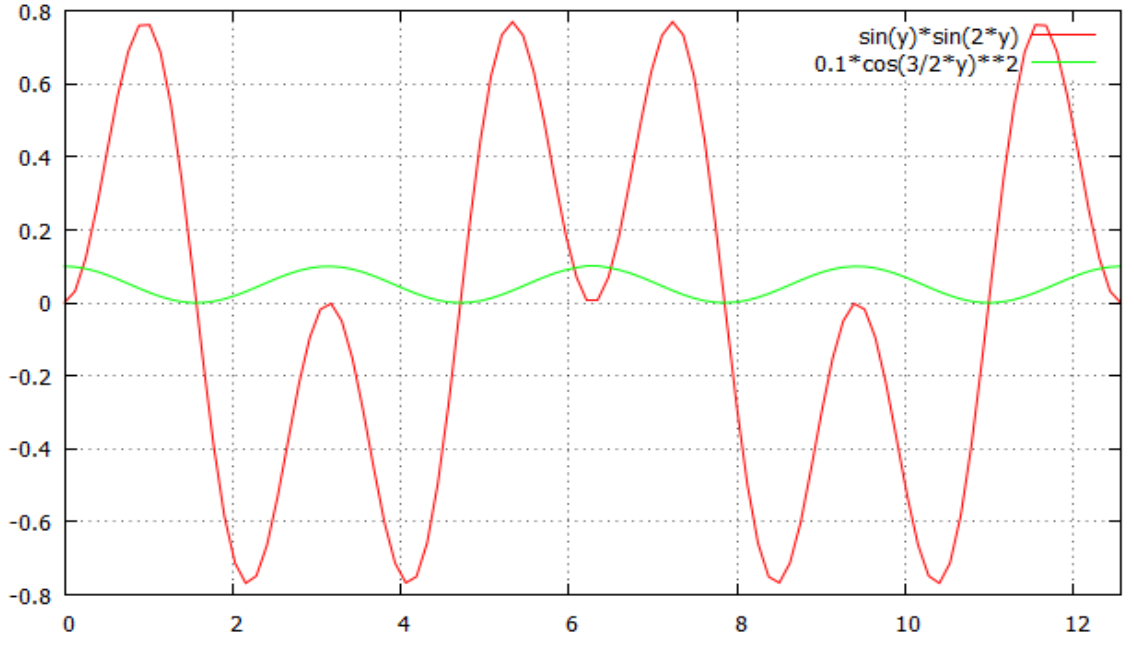
<b>F</b>	<b>S=3</b>	<b>S=5</b>	<b>S=7</b>
<b>0.1</b>	<b>-0.2010</b>	<b>-0.2357</b>	<b>-0.2880</b>
<b>0.5</b>	<b>-0.1176</b>	<b>-0.1466</b>	<b>-0.1692</b>
<b>1</b>	<b>-0.0722</b>	<b>-0.0941</b>	<b>-0.1356</b>

### 3.3 Çift Tam Sayı Değerleri

Benzer şekilde, daha önceki bölümlerde yaptığımız gibi, frekans dağılım denkleminin farklı pozitif çift tam sayılı  $s$  değerleri için grafiklerini ayrı ayrı çizip  $\beta$  değerlerini buluruz.



**Şekil 3.9.a** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=2, F=0.1$  grafiği



**Şekil 3.9.b.**(3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=0.1$  grafiği

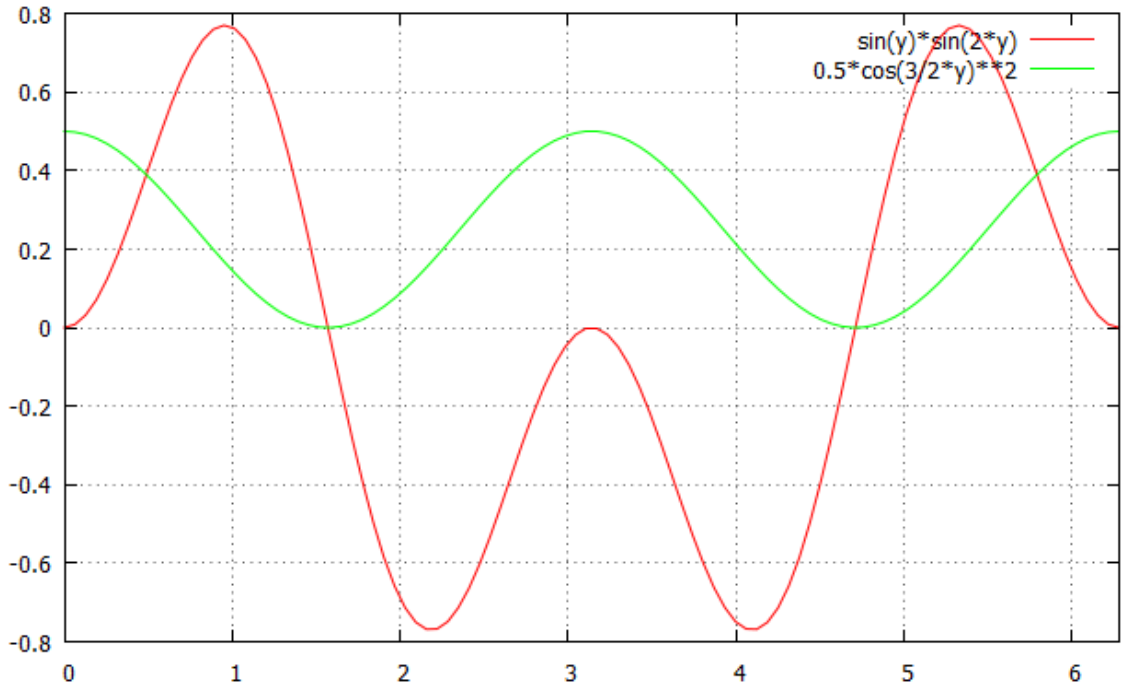
$s=2$  ve  $F=0.1$  değerleri için

$$\sin y \sin 2y - 0.1 \cos^2 \frac{3}{2}y = 0$$

$$\beta_1 = 0.0784$$

$$\beta_2 = 0.5074$$

bulunur.



**Şekil 3.10** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=0.5$  grafiği

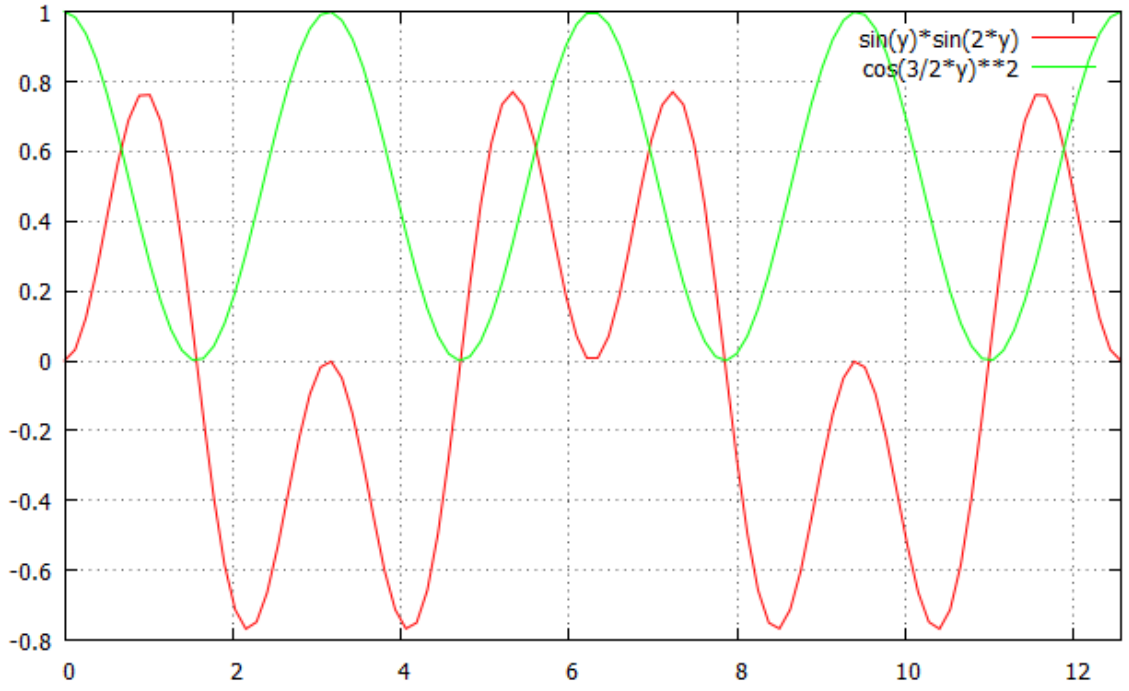
$s=2$  ve  $F=0.5$  için

$$\sin y \sin 2y - 0.5 \cos^2 \frac{3}{2}y = 0$$

$$\beta_1 = 0.1660$$

$$\beta_2 = 0.5044$$

olarak bulunur.



**Şekil 3.11** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=2$ ,  $F=1$  grafiği

$s=2$  ve  $F=1$  için

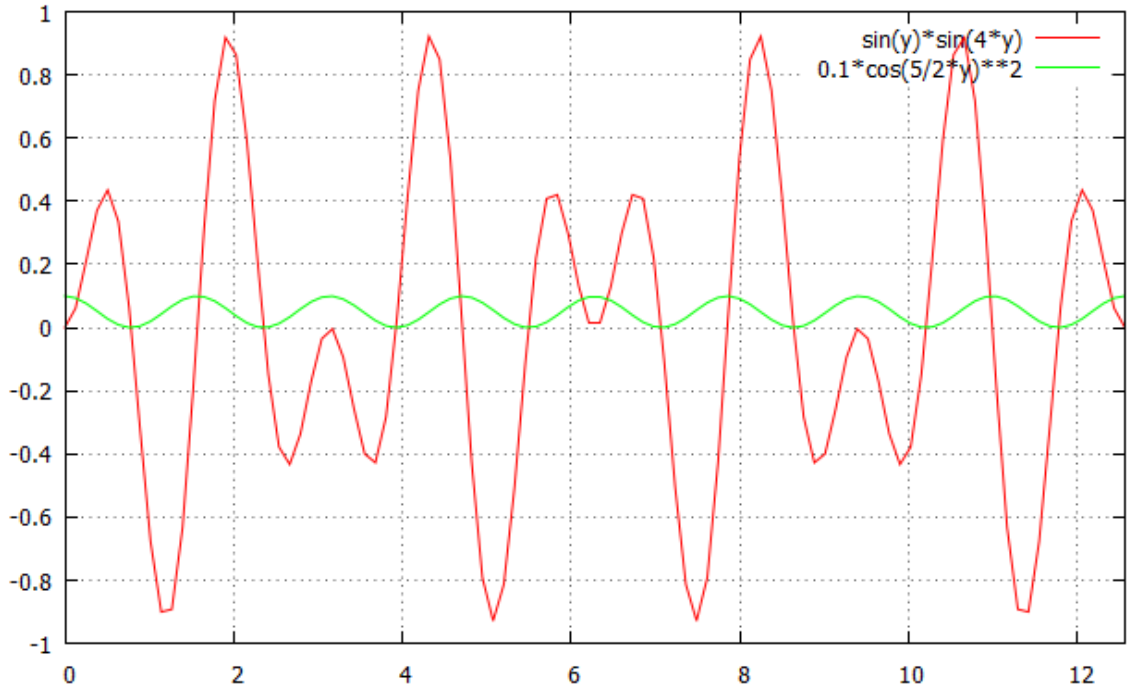
$$\sin y \sin 2y - \cos^2 \frac{3}{2}y = 0$$

$$\beta_1 = 0.2161$$

$$\beta_2 = 0.5065$$

bulunur.





**Şekil 3.1**(3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=4$ ,  $F=0.1$  grafiği

$s=4$  ve  $F=0.1$  için

$$\sin y \sin 4y - 0.1 \cos^2 \frac{5}{2}y = 0$$

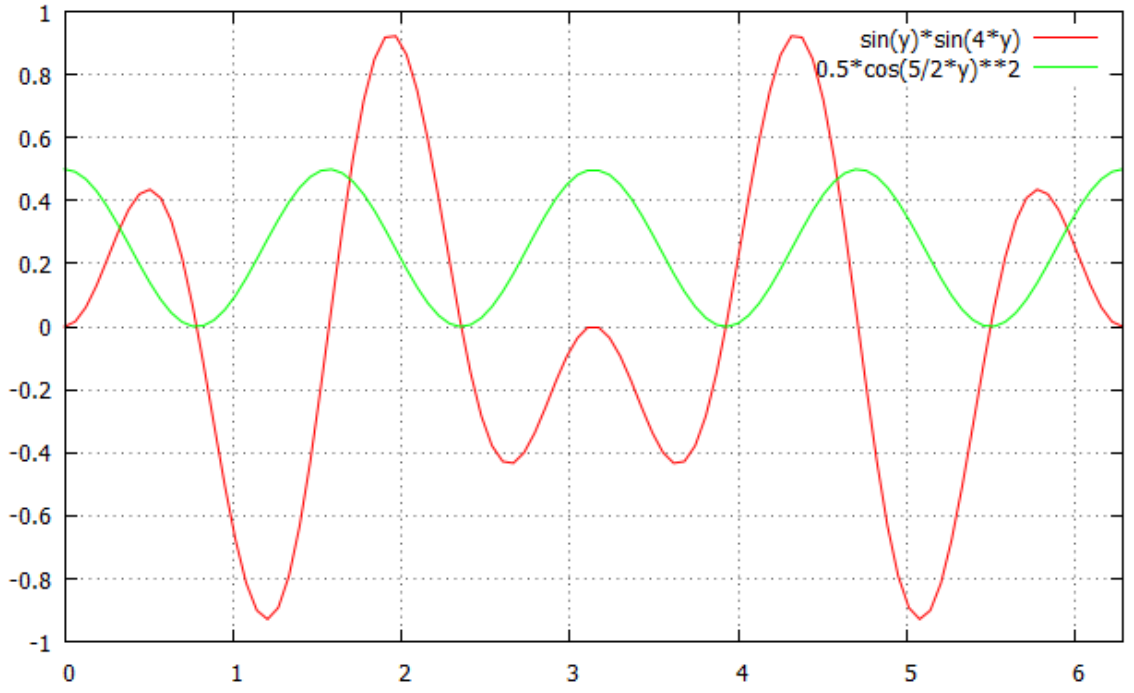
$$\beta_1 = 0.0547$$

$$\beta_2 = 0.2444$$

$$\beta_3 = 0.5147$$

$$\beta_4 = 0.7545$$

bulunur.



**Şekil 3.13** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=4$ ,  $F=0.5$  grafiği

$s=4$  ve  $F=0.5$  için

$$\sin y \sin 4y - 0.5 \cos^2 \frac{5}{2}y = 0$$

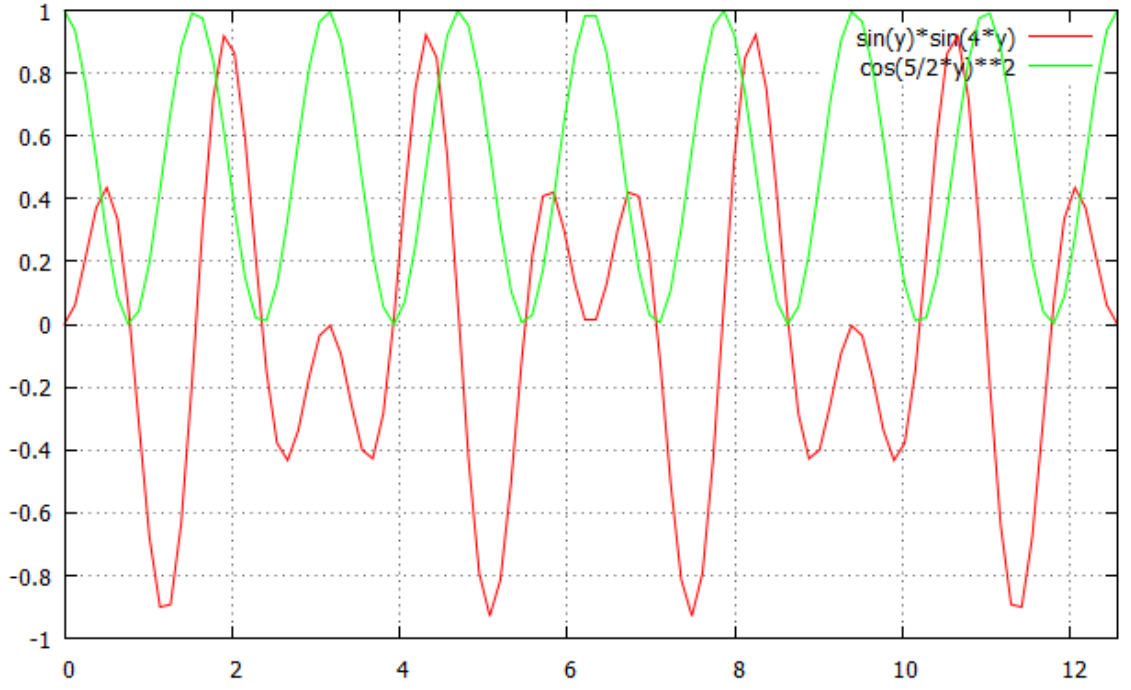
$$\beta_1 = 0.1096$$

$$\beta_2 = 0.2537$$

$$\beta_3 = 0.5399$$

$$\beta_4 = 0.7509$$

bulunur.



**Şekil 3.14** (3.11) frekans dağılım denkleminin  $s=4, F=1$  grafiği

$s=4$  ve  $F=1$  için

$$\sin y \sin 4y - \cos^2 \frac{5}{2}y = 0$$

$$\beta_1 = 0.1409$$

$$\beta_2 = 0.2579$$

$$\beta_3 = 0.5796$$

$$\beta_4 = 0.7551$$

bulunur.

*Tablo 3.3 Burmalı sicim için  $F=0.1, 0.5, 1$ 'e karşılık gelen  $s=2, 4, 6$  değerleri tablosu*

<b>F</b>	<b>S=2</b>	<b>S=4</b>	<b>S=6</b>
<b>0.1</b>	<b>0.0784</b>	<b>0.0547</b>	<b>0.0407</b>
	<b>0.5074</b>	<b>0.2444</b>	<b>0.1723</b>
		<b>0.5147</b>	<b>0.3394</b>
		<b>0.7545</b>	<b>0.5044</b>
			<b>0.6778</b>
			<b>0.8386</b>
<b>0.5</b>	<b>0.1660</b>	<b>0.1096</b>	<b>0.0825</b>
	<b>0.5044</b>	<b>0.2537</b>	<b>0.1681</b>
		<b>0.5399</b>	<b>0.3686</b>
		<b>0.7509</b>	<b>0.4940</b>
			<b>0.7070</b>
			<b>0.8386</b>
<b>1</b>	<b>0.2161</b>	<b>0.1409</b>	<b>0.1054</b>
	<b>0.5065</b>	<b>0.2579</b>	<b>0.1723</b>
		<b>0.5796</b>	<b>0.3874</b>
		<b>0.7551</b>	<b>0.5044</b>
			<b>0.7342</b>
			<b>0.8365</b>

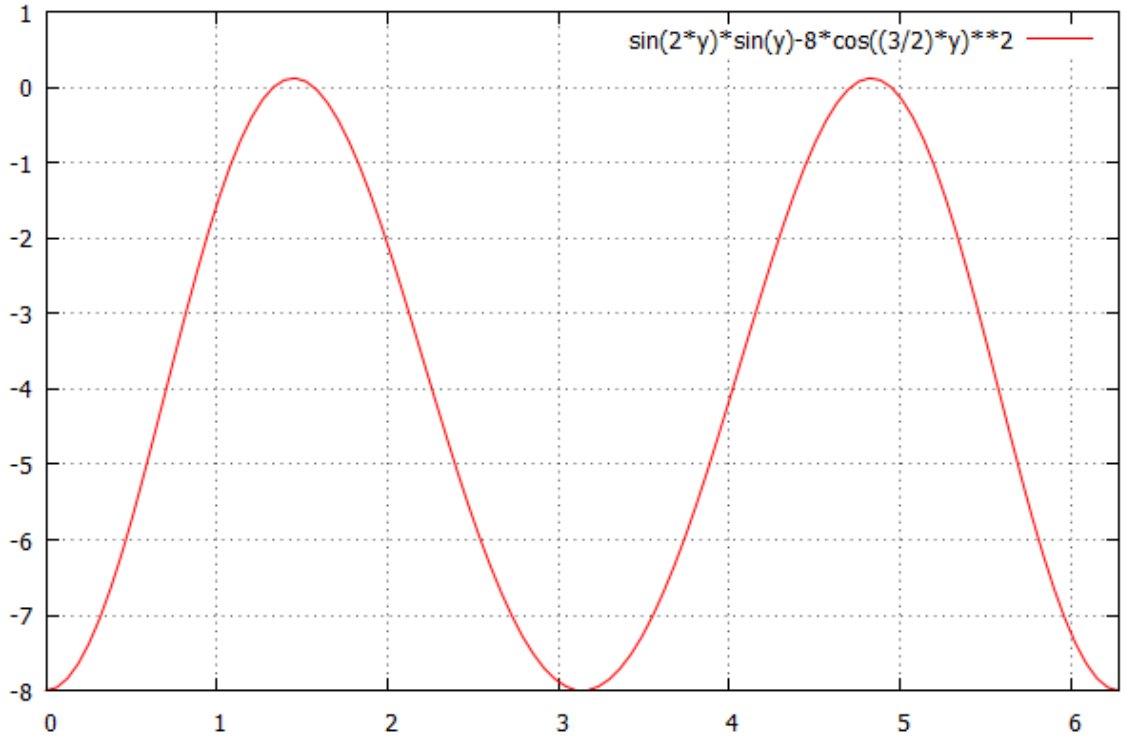
$$\sin \omega L_1 \sin (s \omega L_1) - F(x) \cos^2 \left[ \frac{1+s}{2} \omega L_1 \right] = 0$$

Frekans dağılım denkleminde  $x=0.5$  ve  $s=2$  değeri için grafiği çizelim.

$$\sin (\omega L_1 s) \sin (\omega L_1) - 8 \cos^2 \left( \omega \frac{L_1}{2} (s+1) \right) = 0$$

$s=2$  için

$$\beta_1 = 0.2677 \text{ ve } \beta_2 = 0.3918$$



**Şekil 3.15** (3.11) frekans denkleminin  $s=2$ ,  $F=8$  grafiği

s'nin pozitif çift tamsayı değerleri için Casimir Enerjisi elde edelim. Öncelikle frekans dağılımlarını grafiklerden elde ettiğimiz sonuçları özetleyelim.

$$\omega_{L_1} = \begin{cases} \pi(\beta + 2n) \\ \pi(2 - \beta + 2n) \\ \pi(2n + 1) \end{cases} \quad (3.43)$$

$$t = \frac{\pi\alpha(s+1)}{L}, L_1 = \frac{L}{s+1} \text{ ve } s = \frac{L_2}{L_1} \text{ dir.}$$

Burmali alanın kuantum vakum enerjisi

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(\beta + 2n)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2 - \beta + 2n)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2n + 1)}{2} \quad (3.44)$$

şeklindedir.

Kesici fonksiyonlu kuantum vakum enerjisi ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(\beta + 2n)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(\beta+2n)}{L_1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2 - \beta + 2n)}{L_1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2n + 1)}{L_1} e^{-\frac{\alpha\pi(2n+1)}{L_1}} \quad (3.45)$$

Benzer şekilde pozitif çift tamsayılar için burmalı alanın renormalize edilmiş kuantum vakum enerjisi

$$E_{ren} = \frac{9\pi s(s+1)}{24L} - \frac{\pi(s+1)}{8L} \sum_{i=1}^s [\beta_i^2 + (2 - \beta_i)^2] \quad (3.46)$$

bulunur. Özellikle s=2 değeri için farklı F değerlerine göre enerji ifadesi hesaplanmıştır.

**Tablo 3.4** s=2 için enerji değerleri tablosu  $E\left(\frac{L}{\pi}\right)$

<b>F</b>	<b>s=2</b>
<b>0.1</b>	<b>-1.2772</b>
<b>0.5</b>	<b>-1.1641</b>
<b>1</b>	<b>-1.1017</b>

**Tablo 3.5** s=1,2,3 için enerji değerleri tablosu

<b>F(x)</b>	<b>s=1</b>	<b>s=2</b>	<b>s=3</b>
<b><math>F\left(\frac{1}{2}\right)</math></b>	<b><math>-\frac{\pi}{85.47L}</math></b>	<b><math>-\frac{\pi}{77.5L}</math></b>	<b><math>-\frac{\pi}{.66.6L}</math></b>

## SONUÇ

Burmasız sicim için birinci bölümde  $L$  uzunluğunda farklı iki malzemedен oluşmuş kapalı sicimin üzerindeki enine salınım yapan kütle-siz skalar alanın Casimir enerjisi çalışılmıştır.  $L$  uzunluğundaki kapalı sicim  $L_1$  ve  $L_2$  gibi farklı uzunluklara ve dolayısıyla  $T_1$  ve  $T_2$  gibi farklı gerilimlere sahip malzemedен oluşturulmuştur. Bu durum sicimi oluşturan parçalı yapı;

$$\sqrt{\frac{T_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{\rho_2}} = c$$

olacak şekilde gerilim ve kütle yoğunluğu farklarına sahiptir. Bu durum klasik elektromagnetik teori ile benzerlik oluşturularak.  $c = (\sqrt{\epsilon_0 \mu_0})^{-1}$  ifadesi ile tanımlanmıştır. Burada  $\epsilon$  ve  $\mu$  sırasıyla ortamın dielektrik ve magnetik geçirgenlikleridir.

Yeniden normalize edilmiş kuantum vakum enerji uzunlukları oranları ve gerilimleri oranlarına bağlı olarak hesaplanmıştır. Her türlü  $s = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)$  (sicim uzunlukları oranı) ve  $x = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)$  (sicim gerilimleri oranı) değerlerine göre yeniden normalleştirilmiş kuantum vakum enerji negatif olarak bulunmuştur. Bu ise her durumda kapalı sicimin negatif enerji yani çekici kuvvet üretecek olduğunu söyler.

Üçüncü bölümde ise galaksi oluşumunda galaksinin çekirdekdeğinde geometrik açıdan daha uygun görüldüğü için bir biçim parçalı kapalı sicimdeki burmalı skalar alanı aldık. Bu bölümde iki ayrı malzemedен yapılmış farklı uzunluklara sahip kapalı sicimdeki skalar alanın kuantum boşluk enerjisini normal ve burmalı sınır şartlarını uygulayarak hesapladık.

Elde ettiğimiz enerji tablosu verilerine göre burmasız sicimin burmalı sicime göre daha büyük enerji yoğunluğuna sahip olduğu görülmektedir.



## KAYNAKLAR

- [1] *H.G.B Casimir, Proc. K. Mod. Acad. Wet. 51,793 (1948 ).*
- [2] *M. J. Sparnaay, Physica 24, 751 (1958 ).*
- [3] *D.Tabor, R.H.S Winterton, Proc. R. Soc. London, A312, 435 (1969 ).*
- [4] *S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. 78, 5 (1997).*
- [5] *G.L. Klimchitskaya and V. M. Mostepanenko, Contemp. Phys. 47, 131 (2006).*
- [6] *G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Rev. Mod. Phys. 81, 1827 (2009).*
- [7] *K. A. Milton, Physical Manifestations of Zero-Point Energy The Casimir Effect (World Scientific 2001).*
- [8] *Günter Plunien, Berndt Müller and Walter Greiner, Physics Reports 134, 87 (1986).*
- [9] *V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov , The Casimir Effect and its Applications (Oxford University Press, New York, 1997).*
- [10] *M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. 353, 1 (2001)*
- [11] *M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Advances in the Casimir Effect (Oxford University Press, Oxford, 2009).*
- [12] *T. H. Boyer, Phys. Rev. 174, 1764 (1968).*
- [13] *K. A. Milton, L.L. DeRaad,, Jr., and J. Schwinger, Ann. Phys. 115, 388 (1978).*
- [14] *DeRaad, L.L., Jr., Milton, K., Ann. Phys. (N.Y.) 136, 229 (1981).*
- [15] *V. V. Nesterenko and L. G. Pirozhenko, Phys. Rev. D 57, 1284 (1998).*
- [16] *M. E. Bowers and C. R. Hagen, Phys. Rev. D 59, 025007 (1999).*
- [17] *M. Özcan, Class. Quantum Grav. 23, 5531 (2006).*
- [18] *M. Özcan, Int. J. Mod. Phys. A 27, 1250082 (2012).*

- [19] *C. J. Isham, Proc. R. Soc. London A362, 383 (1978).*
- [20] *C. J. Isham, Proc. R. Soc. London A364, 591 (1978).*
- [21] *L. H. Ford phys. Rew. D 21, 949 (1980).*
- [22] *I. Brevik, H.B. Nielsen, Phys. Rev. D 41, 1185 (1990).*
- [23] *S. Ş. Bayın, J. P. Krisch, M. Özcan, J. Math. Phys. 37, 3662 (1996).*
- [24] *M. Abramowitz and I. A. Stegun 'Handbook of Mathematical Functions', Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No.55, edited by (U.S. GPO, Washington , D.C., (1964). (reprinted by Dover, New York, 1972).*
- [25] *Mathematical Methods for Physicists George Arfken and J. E. Romain, Reviewer Scientific Adviser, Applied Mathematics and Physics (May 1967).*
- [26] *Selçuk Bayın, Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik yöntemler ders kitapları A.Ş. 2.baskı (2004).*

## ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında İstanbul-Üsküdar'da doğdum. İlköğretim eğitimimi sırasıyla Arnavutköy İlkokulu ve Cumhuriyet ilköğretim okulunda tamamladıktan sonra, Üsküdar Cumhuriyet Lisesi'nden mezun oldum. Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik bölümünün ardından aynı okulda Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği dalında yüksek lisans eğitimimi sürdürmekteyim. Bundan sonraki aşamada pekçok bilinmeyenle dolu fizik dünyasının keşfine bir adım daha yaklaşmak için doktora eğitimime devam edeceğim.