T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $U(1,3)$ Grubunun Simetrik Yüzeyine Bağlı Kuantum İntegrallenebilir Sistemler

**Martı Zehra ÖZER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet SEZGİN**

**2005**
**EDİRNE**

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# $U(1,3)$ Grubunun Simetrik Yüzeyine Bağlı Kuantum İntegrallenebilir Sistemler

**Martı Zehra ÖZER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Bu tez 06/07/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Üye

Yrd. Doç. Dr. Mehmet SEZGİN
Danışman

Yrd. Doç. Dr. Şaban AKTAŞ
Üye

# ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde, $U(1,3)$ grubu ve bu grubun simetrik uzayı anlatıldı. İkinci bölümde Laplace-Beltrami operatörü, kuantum sistem, Schrödinger denklemi, analitik devam ve teorik ve pratik çalışmalarda önemli rol oynayan bazı özel fonksiyonlar hakkında bilgi verildi. Üçüncü bölümde $U(1,3)$ grubuyla bağlantılı kuantum sisteme bakıldı. Laplace-Beltrami operatörü, Schrödinger denklemi, potansiyelleri, dalga fonksiyonları elde edildi.

**SUMMARY**

At first part of this work, it was given information about group $U(1,3)$ and symmetric space of this group. At second part, Laplace-Beltrami oparator, quantum system, Schrödinger equation, analytic continuation and about some special functions which take an important role in teorical and practical works. At third part, it was looked at quantum systems related to $U(1,3)$ group. Laplace-Beltrami operator, Schrödinger equation, potentials, wave function have been obtained.

## ÖNSÖZ

Bana kendisi ile böyle bir çalışma imkanı sağlayan ve bu çalışmanın tamamlanmasında büyük yardım ve rehberliğini esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Mehmet SEZGİN' e saygı ve şükranlarımı sunarım.

# İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

1.1. Giriş……………………………………………………………………….1

1.2. $U(1,3)$ Grubu……………………………………………………………...5

1.3. Simetrik Uzay………………………………………………………….6

2. BÖLÜM

2.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar………………………………………...…8

2.2. Legendre Fonksiyonları……………………………………………….14

2.3. Laplace-Beltrami Operatörü…………………………………………..19

2.4. Kuantum İntegrallenebilir Sistem……………………………………..21

2.5. Schrödinger Denklemi………………………………………………...23

2.6. Analitik Devam………………………………………………………..26

3. BÖLÜM

3.1. $U(1,3)$ Grubuyla Bağlantılı Kuantum İntegrallenebilir Sistem....……29

KAYNAKLAR………………………………………………………………….45

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………..47

# 1. BÖLÜM

## 1.1. Giriş

$G \neq \varnothing$ bir küme, bu kümede bir $\circ : G \times G \to G$ ikili işlemi verilmiş olsun.

- $\forall a,b \in G$ için $a \circ b \in G$, ($\circ$ işleminin $G$ 'de kapalılık özelliği)
- $\forall a,b,c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, ($\circ$ işleminin $G$ 'de birleşme özelliği)
- $\circ$ işlemine göre $G$ ' de bir birim eleman vardır.

  $\exists\, e \in G \ \ni\ \forall a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$
- $\circ$ işlemine göre verilen her elemanın bir tersi vardır.

  $\forall a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G \ \ni\ a \circ e = e \circ a = a$

özellikleri sağlanıyorsa $(G,\circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

Cebirsel denklemlerin çözümünde, grup kavramını ilk kullananlardan biri Galois olmuştur. Daha sonra Sophus Lie sürekli dönüşüm gruplarıyla diferensiyel denklemler için benzer bir teoriyi oluşturmuştur. Bugün gruplar teorisi matematikte, topolojide, kuantum teoride, geometride, fizikte, kimyada v.b. diğer bilimsel alanlarda önemli rol oynamaktadır.

Grubun elemanları reel parametrelerin bir kümesiyle karakterize edilebilirse gruba sürekli grup denir ve grubun mertebesi de bağımsız parametrelerin sayısı olarak tanımlanır. Örneğin $3$-boyutlu uzayda her bir dönme $(\alpha, \beta, \theta)$ üç bağımsız parametreye bağlı olarak verilebilir. Yine $x' = ax + b$ dönüşümlerinin kümesi bir grup oluşturur ve $a,b$ parametreleri $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olduğundan grup iki parametreli sürekli grup olur.

$G$ sürekli bir grup, $a,b \in G$ olsun. $a,b$ elemanlarına grubun parametrik uzayında $A,B$ noktaları karşı gelsin. Eğer $A,B$ noktaları verilen bölgede sürekli bir yolla bağlantılı ise, $a,b$ elemanları da $G$ grubunda sürekli bir yolla bağlantılı olduğu söylenir. Eğer $G$ grubunun herhangi iki elemanı bu şekilde bağlı ise $G$ grubuna bağlantılıdır denir.

Örneğin; $GL(n,C), SL(n,C), SL(n,R), U(n), SU(n), SO(n), U(p,q-p), SU(p,q-p)$ grupları bağlantılı, $GL(n,R), O(n), SO(p,q-p), O(p,q-p)$ grupları bağlantılı değildir. Bağlantılı bir $G$ grubunda, eğer herhangi kapalı bir eğri bir noktaya sürekli şekilde büzülebilirse, grup basit bağlantılı, büzülemiyorsa grubun çok bağlantılı olduğu söylenir. Farklı sınıfların sayısı $m$ ise $G$ grubu $m$ defa bağlantılıdır denir. Örneğin; $SU(n)$ grubu basit bağlantılı, $SO(3)$ grubu iki defa bağlantılıdır.

Matrislerin grupları olarak tanımlanan sürekli lineer dönüşüm grupları fiziksel uygulamalarda önemli rol oynar. Bu türden olan $n$ boyutlu grupları ele alırsak ki her bir elemanı $n$ adet reel parametreyle verilir. Bu tip $n$-boyutlu grubun elemanları ile $n$-boyutlu reel Euclidean $R^n$ uzayın bir bölgesinin noktaları arasında bire-bir eşleme oluşturmak mümkündür. Grubun parametrelerinin verildiği bölge parametrik uzay olarak tanımlanır. Bir gruba karşılık bir çok koordinat sistemi verilebilir. Bunların her biri grubun bir parametrizasyonu olarak tanımlanır. Çoğu zaman grubun tamamını parametrize etmek mümkün olmayabilir.

Aynı zamanda bir Lie grubu oluşturan $n \times n$ lik matris gruplarının en fazla bilinenleri aşağıda verilmiştir.

$GL(n,C)$: $M$ kompleks regüler matrislerin genel lineer grubu, $\det M \neq 0$, boyutu $r = 2n^2$ dir. $GL(n,C)$ grubunun her elemanı $2n^2$ boyutlu $R_{2n^2}$ reel Euclidean uzayda bir noktaya karşı gelir. Diğer bütün gruplar $GL(n,C)$ grubunun bir altgrubudur ve uygun parametrik uzaylar $R_{2n^2}$ uzayının altuzaylarıdır.

$SL(n,C)$: Özel lineer grup, $GL(n,C)$ grubunun bir altgrubudur, $\det M = 1$, boyutu $r = 2(n^2 - 1)$ dir.

$GL(n,R)$: $M$ reel regüler matrislerin genel lineer grubudur, $\det M \neq 0$, boyutu $r = n^2$ dir.

$SL(n,R)$: Özel lineer grup, $GL(n,R)$ grubunun bir altgrubudur, $\det M = 1$, boyutu $r = n^2 - 1$ dir.

$U(n)$: $u\bar{u}^t = \bar{u}^t u = 1$ koşulunu sağlayan kompleks matrislerin üniter grubu olup, boyutu $r = n^2$ dir.

$SU(n)$: Özel üniter grup, $U(n)$ grubunun bir alt grubudur, $det\, u = 1$, boyutu $r = n^2 - 1$ dir.

$O(n,C)$: $AA^t = 1$ koşulunu sağlayan $A$ kompleks matrislerin ortogonal grubudur, $det\, A = \pm 1$, boyutu $r = n(n-1)$ dir.

$O(n,R)$: $AA^t = 1$ koşulunu sağlayan $A$ reel matrislerin ortogonal grubudur, $det\, A = \pm 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir.

$SO(n)$: $n$-boyutlu özel ortogonal grup, dönme grubu $O(n)$ grubunun bir alt grubudur, $det\, A = 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir.

$Sp(n)$: Simplektik grup, $u^t A u = A$ koşulunu sağlayan $n \times n$ üniter matrislerin grubudur. Burada $A$ singüler olmayan anti-simetrik matris, $u^t$ de $u$ matrisinin transpozu olup, boyutu $r = n(n+1)/2$ dir.

$U(m,n-m)$: $AI\overline{A}^t = I$ koşulunu sağlayan $A$ kompleks matrislerin pseudo-üniter grubudur. Burada $I$, $I_{kk} = -1,\ m+1 \leq k \leq n$ ve $I_{kk} = 1,\ 1 \leq k \leq m$ elemanlı diagonal matristir, boyutu $r = n^2$ dir.

$SU(m,n-m)$: Özel pseudo-üniter grup $U(m,n-m)$ grubunun bir alt grubu olup, $det\, A = 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir.

$O(m,n-m)$: $AgA^t = A$ koşulunu sağlayan $A$ reel matrislerin pseudo-ortogonal grubudur, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir.

$SO(m,n-m)$: Özel pseudo-ortogonal grup $O(m,n-m)$ grubunun bir alt grubu olup, $det\, A = 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir.

Araştırmalarda ortaya çıkan denklemler, alan koordinatları veya $\psi, \varphi, ...$ fonksiyonlarıyla verilen sistemdeki parçacıkların hallerini belirler. Denklemler lineer, lineer olmayan, diferensiyel, integral denklemler veya daha genel operatör denklemler olabilir. Grup teori yaklaşımı denklemlerin çözümünü kolaylaştırır. Eğer bir fiziksel sistemin dinamik denklemleri bilinmiyorsa genel simetri prensibinin yardımıyla denklem bulunabilir veya sistemin genel özellikleri araştırılarak simetriden istenilen sonuçlar alınabilir. Simetri işlemi denklemin bir hali yerine ona denk bir başka halini almayı mümkün kılar.

Fiziksel sistemin belirli bir $t$ anındaki durumunu belirleyen $\psi,\varphi,...$ fonksiyonlarının belirlenmesi kuantum teorisinin dinamik kısmıdır. Kuantumlu fiziksel sistemin belirli bir andaki durumuna dinamik hal denir. Kuantumlu sistemin halini belirleyen fonksiyona dalga fonksiyonu denir ve sistemin dinamik halleri $\psi(x,t)$ fonksiyonu ile belirlenir. $\psi,\varphi,...$, fiziksel sistemin halleri bir lineer uzayın elemanlarıyla tanımlanır. Basit olarak bir dinamik problem $\psi,\varphi,...$ halleri için diferensiyel denklemi çözmektir. Çünkü fiziksel sistemin bütün halleri ile denklemin tüm çözümleri özdeştir. Koordinatlar, enerji, momentum, açısal momentum gibi verilen bir fiziksel sistem için ölçülebilen her şey dinamik değişkendir.

Bir boyutlu tam çözülebilen kuantum sistemlerin dinamiği $n$-boyutlu simetrik uzayda serbest harekette olan ($V=0$) parçacığın sahip olduğu yüksek simetrinin bozulmasına bağlı olarak verilir. Başka bir ifadeyle, $V$-potansiyeli ile verilmiş bir boyutlu kuantum sistemin tam çözülebilmesi bu sistemin yüksek simetriye sahip olması demektir. Bu simetri bir boyutlu simetrinin $n$-boyutlu simetriye yerleştirilmesi ile açıklanmış olur.

Simetrik uzay, $G$ Lie grubu, $K$ kompakt altgrubu olmak üzere $G/K$ bölüm uzayıyla tanımlanır. Böyle verilmiş uzayın eşdeğer tanımı uzayda eğriliğin kovaryant türevinin sıfır olmasıdır. Örneğin, $G=SO(3)$, $K=SO(2)$ olmak üzere iki boyutlu birim küre $G/K : S^2=\{x=(x_0,x_1,x_2): x_0^2+x_1^2+x_2^2=1\}$ simetrik uzaydır.

Simetrik uzayda verilen farklı koordinat sistemlerine karşılık farklı kuantum sistemler alırız. Bu uzayda serbest parçacığın kuantum halleri Laplace-Beltrami operatörü ile verilir. Laplace-Beltrami operatörünün değişkenlerine ayrılabildiği bir çok koordinat sistemi vardır. Ancak bu koordinatların geodesic ile bağlı olduğu, başka sözle simetri grubunun bir parametreli altgrupları ile verildiği durumda denklem bir boyutlu Schrödinger denklemine getirilebilir.

Tam çözülebilen kuantum sistemlerin pek çoğu çeşitli grup yapıları içinde incelenir. Grup teorisi yaklaşımı kullanılarak, $G\approx SO(p,q)$, $U(p,q)$ gruplarıyla bağlantılı simetrik uzaylarda bir boyutlu kuantum sistemler, Laplace-Beltrami operatörünün çözümleri, özel fonksiyonlar, düzlem dalgalar, grubun temsilleri v.b. alanlarda çeşitli araştırmalar yapılmıştır [1,2,3,4,5,7,8,9]. Bu tezde bu çalışmaların devamı olarak, $U(1,3)$ grubunun simetrik uzayına bağlı olarak verilen kuantum sistem incelenmiştir. Uygun seçilen koordinatlarda Laplace-Beltrami operatörü, Schrödinger denklemi, dalga fonksiyonları elde edilmiştir.

### 1.2. *U(1,3)* Grubu

$C^{n}_{1,q}$, $1+q=n$-boyutlu kompleks vektör uzayında genel lineer dönüşümler bir grup oluşturur. Bu grup $GL(n,C)$ ile gösterilir. Kompleks vektör uzayında skaler çarpımı koruyan dönüşümler üniter dönüşümlerdir ve bu dönüşümler bir grup oluşturur. $A$ kompleks matris olmak üzere $A\overline{A}^{t}=1$ üniterlik koşulunu sağlayan $n\times n$ matrislerin üniter grubu $U(n)$ ile gösterilir. Benzer şekilde $AI\overline{A}^{t}=I$ koşulunu sağlayan $A$ kompleks matrislerinin pseudo-üniter grubu $U(m,n)$, ( $m<n$ ) olur. Burada

$$I=diag\left(\underbrace{1,...1}_{m\ a\,det},\underbrace{-1,...,-1}_{n\ a\,det}\right)$$

köşegen matristir.

$n=1+q$ olmak üzere $C^{1,q}$, kompleks vektör uzayı,

$$z=\left(z_0,z_1,...,z_q\right)\in C^{1,q},$$

bu uzayda skaler çarpım

$$[z,w]=z_0\overline{w_0}-z_1\overline{w_1}-...-z_q\overline{w_q}$$

şeklinde tanımlanır.

$[z,z]=r^2$, $C^{1,q}$ uzayında $H^{q}_{c}$ kompleks hiperboloidini tanımlar.

$$H^{q}_{c}\approx U(1,q)/U(q),\ q=3 \text{ için}$$

$$H^{3}_{c}\approx U(1,3)/U(3).$$

Bu uzayda her bir $z\in H^{q}_{c}$ noktası

$$z=\left(e^{i\varphi_0}\tau_o,e^{i\varphi_1}\tau_1,...,e^{i\varphi_q}\tau_q\right),\ 0\le\varphi_i<2\pi$$

formunda verilir. Burada

$$[\tau,\tau]=\tau_0^2-\tau_1^2-...-\tau_q^2=1$$

reel hiperboloidi gösterir.

Aslında $H_c^q$ uzayı simetrik pseudo-Riemannian uzaydır. $C^{1,q}$ uzayı da $R^{2,2q}$ pseudo-Riemannian uzayına denktir.

### 1.3. Simetrik Uzay

$\Gamma$ bir vektör uzayı, $G$ de Lie grubu olsun. Eğer her bir $\alpha, \beta \in \Gamma$ nokta çifti için bir $g \in G$ var ve $\beta = g\alpha$ sağlanıyor ise $G$ grubu $\Gamma$ uzayında geçişli (transitiv) dir denir. Eğer $G$ grubu $\Gamma$ uzayında geçişli ise $\Gamma$ uzayına $G$ grubunun homojen uzayı denir.

$G$ Lie grubunun bir altgrubu $H$, homojen uzayın bir $\alpha \in \Gamma$ noktasını invaryant bırakırsa bu alt gruba $\alpha$ noktasının stability (stationary, isotropy, little) grubu denir.

Homojen uzay çoğu zaman $G/H$ bölüm uzayı olarak tanımlanır: $H$, $G$ grubunun bir alt grubu olmak üzere $G/H$ grubu her $x \in G$ için $xH$ sol denklik sınıflarının kümesi olarak verilir. Eğer $H = \{e\}$ ise $G$ grubunun kendisi de homojen uzay oluşturur. Homojen uzaylara ait örnekler verelim.

1. $G = SO(n+1)$ grubu, $R^{n-1}$ Euclidean uzayda

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 1 \tag{1.1}$$

kuadratik formunu invaryant bırakan $R^{n-1}$ uzayının özel ortogonal dönüşümler grubu olarak tanımlanır. (1.1) denklemiyle verilen $S^n$, $n$-boyutlu küre yüzeyi, $SO(n+1)$ grubunun homojen uzayıdır.

2. $R_{1,n}^{1+n}$ pseudo-Euclidean uzayın özel ortogonal dönüşümler grubu $G = SO(1,n)$, $H = SO(n)$ olmak üzere $X = G/H$ homojen uzayı

$$x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1 \quad , \quad x_0 > 0 \tag{1.2}$$

denklemiyle verilen iki oyuklu hiperboloidle temsil edilir.

$G$ bir Lie grubu, $\sigma$, $G$ grubunun bir involutif otomorfizması olsun. Bu durumda $\sigma^2 = 1$, $\sigma \neq 1$ dir. $H$, $\sigma$ dönüşümüne göre $G$ grubunun değişmeyen bir alt grubu yani $\sigma(H) = H$ olsun. Bu durumda $G/H$ uzayına $\sigma$ dönüşümüyle tanımlanan homojen simetrik uzay denir.

Simetrik uzay metrikle verilen bir manifoldtur. Simetrik uzayın diğer bir tanımı, uzayın eğrilik tensörünün kovaryant türevinin $\nabla_s(R_{abcd}) = 0$ sıfır olmasıyla verilir. $G$ grubunun stability altgrubu; kompakt ise simetrik uzay Riemannian metriğine sahip olur ve bu uzaylar Riemannian homojen simetrik uzay, kompakt değilse uzay pseudo-Riemannian homojen simetrik uzay olarak adlandırılır. Simetrik uzaylara ait örnekler verelim.

1. $G = SO(n+1)$ , $\sigma :$ involutif otomorfizma dönüşümü,

$$\sigma(g) = sgs^{-1} \ , \ g \in G \ , \ s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} ,$$

burada $I_n$, $R^n$ de birim matris olmak üzere

$$\sigma(h) = shs^{-1} = h \ , \ h \in H \equiv SO(n)$$

olduğundan $SO(n+1)/SO(n)$ homojen uzayı simetriktir.

2. $G = SO(p,q)$ : $g \in SO(p,q)$ , $gIg^t = I$ denklemini sağlayan matrisler grubu olduğundan, involutif otomorfizma $\sigma(g) = IgI$ şeklinde verilsin. Bu dönüşümü invaryant bırakan altgrup $G$ grubunun maksimum kompakt alt grubu $H \equiv SO(p) \times SO(q)$ olduğundan $X = G/H \equiv SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ homojen simetrik uzay olur.

Bu tez çalışmasında

$$H_c^3 \approx U(1,3)/U(3)$$

simetrik uzayı üzerinde çalışılmıştır.

# 2.BÖLÜM

## 2.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Özel fonksiyonlar teorik ve pratik araştırmalarda, özellikle uygulamalı matematiğin denklemlerinin belirli koordinat sistemlerinde değişkenlere ayrılması metoduyla çözülmesinden ortaya çıkar ve özel isimlerle belirtilir.

İkinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklem bir çok singüler noktalara sahip olabilir. Özel olarak singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan denklemi

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0 \qquad (2.1)$$

formunda verebiliriz. Burada, $z$ kompleks değişken, $a,b,c$ $z$ 'den bağımsız kompleks ve reel değer alabilen sabitlerdir ve bunlar denklemin parametreleri olarak tanımlanır. (2.1) denklemi Hipergeometrik denklem, bu denklemin çözümleri de Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır.

Lineer diferensiyel denklemlerin genel teorisinden (2.1) denklemi $z=0$ noktası civarında

$$u=z^s\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \quad , \quad c_0\neq 0$$

formunda belirli bir çözüme sahip olur. Bu kuvvet serisi $|z|<1$ için yakınsaktır. (2.1) denkleminin $z=0$ civarındaki çözümü,

$c=n\neq 0,-1,-2,...$ ise,

$$u={}_2F_1(a,b;c;z)=F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}z^n \qquad (2.2)$$

$c=-n$, $n=0,1,2,...$ ise,

$$u=z^{n+1}F(a+n+1,b+n+1;n+2;z)=z^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a+n+1)_m(b+n+1)_m}{m!(n+2)_m}z^m$$

olur.

$$(a)_0=1 \ , \ (a)_n=a.(a+1)...(a+n-1) \ , \ n=1,2,...$$

$$(b)_0 = 1\ ,\ (b)_n = b.(b+1)...(b+n-1)\ ,\ n = 1,2,...$$

$$(c)_0 = 1\ ,\ (c)_n = c.(c+1)...(c+n-1)\ ,\ n = 1,2,...$$

$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n = 1 + \frac{ab}{1.c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} z^2 + ...$$

fonksiyonu $z$ değişkenli $a,b,c$ parametreli Hipergeometrik seri olarak da tanımlanır ve $|z| < 1$ için yakınsaktır. Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon

$${}_pF_q(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;z) = {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,...,a_p; \\ b_1,...,b_q; \end{matrix}\quad z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{n!\,(b_1)_n...(b_q)_n} z^n$$

şeklinde verilir. Burada

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)}\ ,\ (a)_0 = 1\ ,\ (a)_n = a(a+1)...(a+n-1)\ ,\ n = 1,2,...$$

dir ve bu Pochhammer sembolü olarak bilinir.

Hipergeometrik fonksiyonların önemli bazı özelliklerini verelim.

Hipergeometrik seride $a$ ve $b$ parametrelerinin yeri değişirse serinin karakteri değişmez. Buradan

- $F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$ simetri özelliğini alırız.

Hipergeometrik fonksiyonun türevi

- $\dfrac{d^n}{dz^n} F(a,b;c;z) = \dfrac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n,b+n;c+n;z)\ ,\quad n = 1,2,...$ dir.

- $\lim\limits_{c \to -n}\left[\dfrac{1}{\Gamma(c)} F(a,b;c;z)\right] = \dfrac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} F(a+n+1,b+n+1;n+2;z)$

- $F(a,b+1;c;z) - F(a,b;c;z) = \dfrac{a\,z}{c} F(a+1,b+1;c+1;z)$

- $F(2a,2b;a+b+1/2;z) = F\left(a,b;a+b+1/2;\dfrac{4z}{z-1}\right)$

Hipergeometrik fonksiyonun integral temsili

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}\, dt\ ,$$

$$Re\, c > Re\, b > 0\ ,\ |arg\ (1-z) < \pi|$$

şeklinde verilir.

${}_2F_1(a,b;c;z)$ fonksiyonu çoğu zaman $F(a,b;c;z)$ şeklinde yazılır ve Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır. ${}_1F_1(a;c;x)$ fonksiyonu ise Confluent Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır ve bu

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(c-x)\frac{dy}{dx}-a.y=0 \tag{2.3}$$

diferensiyel denkleminin çözümü olur ki aşağıda verilen her bir çözüm (2.3) Confluent Hipergeometrik denkleminin bir çözümüdür.

- $y_1={}_1F_1(a;c;x)=\Phi(a,c;x)$
- $y_2=x^{1-c}\,{}_1F_1(a-c+1;2-c;x)$
- $y_3=e^x\,{}_1F_1(c-a;c;-x)$
- $y_4=x^{1-c}e^x\,{}_1F_1(1-a;2-c;-x)$

Türev bağıntısı $\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1F_1(a;c;x)=\frac{(a)_n}{(c)_n}\,{}_1F_1(a+n;c+n;x)$ şeklinde verilir.

Confluent Hipergeometrik fonksiyonun integral temsili,

$${}_1F_1(a;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xu}u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}du \quad , \quad Re\,c>Re\,a>0$$

olur.

Bazı özel fonksiyonların Hipergeometrik fonksiyonla ifadesini verelim.

- $(1+z)^a=F(-a,b;b;-z)$ , $(1-z)^{-2a-1}(1+z)=F(2a,a+1;a;z)$
- $1+\binom{a}{1}z+...+\binom{a}{m}z^m=\binom{a}{m}z^mF(-m,1;a-m+1;-1/z)$
- $e^{-az}=(2\cosh z)^{-a}\tanh z\,F\left(1+\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1+a;\frac{1}{\cosh^2 z}\right)$
- $\cos az=F\left(a/2,-a/2;1/2;\sin^2 z\right)$ , $\sin az=a\sin z\;F\left(\frac{1+a}{2},\frac{1-a}{2};\frac{3}{2};\sin^2 z\right)$
- $\sin^{-1}z=z\,F\left(1/2,1/2;3/2;z^2\right)$ , $\log(z+1)=zF(1,1;2;-z)$

$z$ 'nin aldığı bazı özel değerler için Hipergeometrik fonksiyonun ifadesini verelim. $z=1$ için,

- $F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ , $c\neq 0,-1,-2,...$ , $Re\,c>Re\,(a+b)$

$z=-1$ için,

- $F(a,b;1+a-b;-1)=2^{-a}\dfrac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(1-b+\dfrac{a}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+a}{2}\right)}$ , $1+a-b\neq 0,-1,-2,...$

$z=1/2$ için,

- $F\left(2a,2b;a+b+\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma(a+b+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}$ , $a+b+1/2\neq 0,-1,-2,...$

$z=-1/3$ için,

- $F\left(-a,-a+\dfrac{1}{2};2a+\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{2a}\dfrac{\Gamma(4/3)\Gamma(2a+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(2a+4/3)}$ , $2a+3/2\neq 0,-1,-2,...$

$z=e^{i\pi/3}$ için,

- $F\left(a+\dfrac{1}{3},3a;2a+\dfrac{2}{3};e^{i\pi/3}\right)=2\pi\, e^{i\pi/2}\, 3^{-(3a+1)/2}\dfrac{\Gamma(2a+2/3)}{\Gamma(a+1/3)\Gamma(a+2/3)\Gamma(2/3)}$

Hipergeometrik denklemin parametreye bağlı olarak çeşitli çözümleri verilebilir. Aşağıdaki çözümlerin her biri Hipergeometrik denklemin bir çözümüdür.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= F(a,b;c;z)\\
&=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)\\
&=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)\\
&=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right)\\
u_2 &= F(a,b;a+b+1-c;1-z)\\
&=z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;a+b+1-c;1-z)\\
&=z^{-a}F\left(a,a+1-c;a+b+1-c;\frac{z-1}{z}\right)\\
&=z^{-b}F\left(b+1-c,b;a+b+1-c;\frac{z-1}{z}\right)\\
u_3 &= (-z)^{-a}F\left(a,a+1-c;a+1-b;\frac{1}{z}\right)\\
&=(-z)^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F\left(1-b,c-b;a+1-b;\frac{1}{z}\right)\\
&=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;a+1-b;\frac{1}{1-z}\right)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$= (-z)^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F\left(a+1-c,1-b;a+1-b;\frac{1}{1-z}\right)$$

$$u_4 = (-z)^{-b}F\left(b+1-c,b;b+1-a;\frac{1}{z}\right)$$

$$= (-z)^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F\left(1-a,c-b;b+1-a;\frac{1}{z}\right)$$

$$= (1-z)^{-b}F\left(b,c-a;b+1-a;\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= (-z)^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F\left(b+1-c,1-a;b+1-a;\frac{1}{1-z}\right)$$

$$u_5 = z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;z)$$

$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;2-c;z)$$

$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F\left(a+1-c,1-b;2-c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= z^{1-c}(1-z)^{c-b-1}F\left(b+1-c,1-a;2-c;\frac{z}{z-1}\right)$$

$$u_6 = (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c+1-a-b;1-z)$$

$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-a,1-b;c+1-a-b;1-z)$$

$$= z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F\left(c-a,1-a;c+1-a-b;\frac{z-1}{z}\right)$$

$$= z^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F\left(c-b,1-b;c+1-a-b;\frac{z-1}{z}\right)$$

$F(a,b;c;z)$ Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$1-c,\ b-a,\ c-b-a$ tamsayı olmasın.

- $F(a,b;c;z) = A_1F(a,b;a+b-c+1;1-z) + A_2(1-z)^{c-a-b}$

$$\times F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z) \quad , \quad |arg(1-z)| < \pi$$

- $F(a,b;c;z) = A_1z^{-a}F\left(a,a+1-c;a+b-c+1;\frac{z-1}{z}\right) + A_2z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}$

$$\times F\left(c-a,1-a;c+1-a-b;\frac{z-1}{z}\right) \quad , \quad |arg(z)| < \pi \qquad (2.5)$$

- $F(a,b;c;z)=B_1(-z)^{-a}F(a,1-c+a;1-b+a;1/z)+B_2(-z)^{-b}$

$$\times F(b,1-c+b;1-a-b;1/z) \quad , \quad |arg(-z)|<\pi$$

- $F(a,b;c;z)=B_1(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;a-b+1;\dfrac{1}{1-z}\right)+B_2(1-z)^{-b}$

$$\times F\left(b,c-a;b-a+1;\frac{1}{1-z}\right) \quad , \quad |arg(1-z)|<\pi$$

Burada $A_1, A_2, B_1, B_2$ katsayıları

$$A_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \ , \ A_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \tag{2.6}$$

$$B_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \ , \quad B_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$ şeklinde verilir.

Diğer özel fonksiyonlarla Hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilir.

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\dfrac{1-z}{2}\right)$

- $C_n^{\lambda}(z)=\dfrac{1}{n!}(2\lambda)_n F\left(-n,n+2\lambda;\lambda+\dfrac{1}{2};\dfrac{1-z}{2}\right)$

- $P_n(z)=F\left(-n,n+1;1;\dfrac{1-z}{2}\right)$

- $P_\nu^{\mu}(z)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\dfrac{1-z}{2}\right)$

- $J_\nu(z)=\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}(z/2)^{\nu}\,{}_0F_1\left(\nu+1;-z^2/4\right)$

Yukarıda verdiğimiz Hipergeometrik fonksiyonlar tek değişkenlidir. Çok değişkenli Hipergeometrik fonksiyonlarda vermek mümkündür.

## 2.2. Legendre Fonksiyonları

Dalga yayılması, potansiyel ve difüzyon problemlerinin çözümünde ortaya çıkan, $\nu$ dereceden ve $\mu$ mertebeden

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\mu^2\left(1-z^2\right)^{-1}\right]w=0 \tag{2.7}$$

Legendre diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olan fonksiyonlara Legendre fonksiyonları denir. Burada $z$ kompleks veya reel değişken, $\nu$, $\mu$ de reel veya kompleks sabitlerdir.

(2.7) denklemi uygun değişken dönüşümü yapılarak Hipergeometrik denkleme indirgenebilir. Sırasıyla $w=\left(z^2-1\right)^{\mu/2}u$ ve $x=\frac{1-z}{2}$ dönüşümleri yapılırsa (2.7) denklemi

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+(\mu+1)(1-2x)\frac{du}{dx}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)u=0 \tag{2.8}$$

Hipergeometrik denklemine getirilir. Buradan (2.7) denkleminin çözümü

$$w=P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right),\ |1-z|<2 \tag{2.9}$$

olur. Eğer $x=z^2$ dönüşümü yaparsak (2.7) denklemi

$$4x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+[2-(4\mu+6)x]\frac{du}{dx}-(\mu-\nu)(\nu+\mu+1)u=0 \tag{2.10}$$

Hipergeometrik denkleme dönüşür ve buradan (2.7) denkleminin çözümü

$$w=Q_\nu^\mu(z)=e^{\mu i\pi}\,2^{-\nu-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-\mu-1}\left(z^2-1\right)^{\mu/2}F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$
$$,\ |z|>1 \tag{2.11}$$

olur. $\nu,\mu\in N$ ise $P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ lineer bağımsız çözümler olduğundan (2.7) denkleminin çözümü $w=c_1P_\nu^\mu(z)+c_2Q_\nu^\mu(z)$ olur, burada $c_1,c_2$ keyfi sabitlerdir.

$P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonları birinci ve ikinci türden, $\nu$ dereceden Legendre fonksiyonları olarak tanımlanır. Bu fonksiyonlar $(-\infty,1)$ boyunca kesilen $Z$ düzleminde regüler ve tek değerlidir. Legendre diferensiyel denklemi, $\mu\to-\mu,\ z\to-z,\ \nu\to-\nu-1$ değişimi yapılırsa invaryant kalır. Böylece

$P_\nu^{\pm\mu}(\pm z), Q_\nu^{\pm\mu}(\pm z), P_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z), Q_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z)$ çözümleri de (2.7) denkleminin çözümleri olur. Legendre fonksiyonları arasındaki bazı bağıntıları verelim.

- $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$
- $e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)Q_\nu^{-\mu}(z) = e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu(z)$
- $P_\nu^m(z) = \dfrac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}P_\nu^{-m}(z) \quad , \quad \mu = m = 1,2,\ldots$
- $Q_\nu^\mu(-z) = -e^{\pm i\nu\pi}Q_\nu^\mu(z)$
- $P_\nu^0(z) = P_\nu(z) \quad , \quad \mu = 0 \quad , \quad P_\nu^m(z) = 0 \quad , \quad m > \nu \quad , \quad m \in N$

Legendre fonksiyonları, $(-\infty,1)$ boyunca kesilen düzlemde $P_\nu^\mu(z)$, $(-\infty,1)$ boyunca kesilen düzlemde $Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonu $z$ kompleks değişkeninin analitik bir fonksiyonudur. Bu kesilen bölgelerde verilen Legendre fonksiyonları Hipergeometrik seri cinsinden ifade edilebilir. Legendre fonksiyonlarının bir çok uygulamasında $z = x + 0i = x$, $-1 < x < 1$ alınır.

- $P_\nu^\mu(x) = \dfrac{e^{\pm i\mu\pi/2}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\dfrac{1-x}{2}\right)$
- $P_\nu^\mu(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\dfrac{1-x}{2}\right)$
- $Q_\nu^\mu(x) = \dfrac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\nu+1;1+\mu;\dfrac{1-x}{2}\right)$

$$+\frac{\Gamma(\mu)}{2}\cos(\mu x)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right)$$

$P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ Legendre fonksiyonlarını trigonometrik değişken türünden yazabiliriz. $z = \cos\theta$ ,

- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{\sin\theta}{2}\right)^{-\mu} F\left(\dfrac{1+\nu-\mu}{2},\dfrac{-\nu-\mu}{2};1-\mu;\sin^2\theta\right) , \quad 0<\theta<\pi/2$
- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{\sin\theta}{2}\right)^{-\mu} F\left(1+\nu-\mu,-\nu-\mu;1-\mu;\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$
- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\right)^{\mu} F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\nu, \mu$ sabitlerinin bazı özel değerleri için Legendre fonksiyonlarının ifadesini verelim.

$\mu = m = 1,2,...$ için,

$$- P_\nu^m(z) = \frac{2^{-m}\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1)}\left(z^2-1\right)^{m/2} F\left(1+m+\nu, m-\nu+1; 1+m; \frac{1-z}{2}\right) \tag{2.12}$$

$\nu = n = 0,1,2,...$ olsun. Bu durumda $\mu$ negatif bir tamsayı ise (2.9) ifadesindeki Hipergeometrik seri $z$ bağlı $n$ dereceden bir polinom olur.

$\mu = m = 1,2,...$ ve $n \geq m$ ise (2.12) bağıntısı geçerli olur ve $(n-m)$. dereceden polinom olur. $\nu = 0$ ise $P_\nu^0(z) = P_\nu(z)$ olarak yazılır. Genellikle $P_\nu(z), Q_\nu(z)$ Legendre fonksiyonları, $P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonları da associated Legendre fonksiyonları olarak tanımlanır.

$\mu = 0$ ise,

$$P_\nu(z) = F\left(1+\nu, -\nu-\mu; 1; \frac{1-z}{2}\right)$$

olur ki bu ifadenin , $z$ ye göre $m$ $(m = 1,2,...)$ defa türevi alınırsa

$$- \; P_\nu^\mu(z) = \left(z^2-1\right)^{m/2} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$$

$$- \; Q_\nu^\mu(z) = \left(z^2-1\right)^{m/2} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}$$ bağıntılarını buluruz.

$$- \; P_\nu(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^\nu F\left(-\nu, -\nu; 1; \frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$= \left(\frac{z-1}{2}\right)^\nu F\left(-\nu, -\nu; 1; \frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$= F\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^\nu F\left(-\nu, -\nu; 1; \frac{1+z}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{z-1}{2}\right)^\nu F\left(-\nu, -\nu; -2l; \frac{2}{1-z}\right)$$

$\mu = 0$ , $\nu = n = 0,1,2,...$ ise,

$$- \; P_{2n}(z) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} F\left(-n, n+1/2; 1/2; z^2\right)$$

- $P_{2n+1}(z)=\dfrac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}zF(-n,n+3/2;3/2;z^2)$

- $P_n(z)=(2^n n!)^{-1}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$

bağıntıları verilebilir. Son bağıntı Rodrigues formülü olarak bilinir. Böylece $P_n(z)$, $n$ dereceden bir polinom olur ve $P_n(z)=(-1)^n P_n(z)$ eşitliği sağlanır. Bu polinomlar Legendre polinomu olarak tanımlanır ve Legendre fonksiyonlarının özel bir halidir. Polinomlar $[-1,1]$ aralığında ortogonaldir ve bu aralıktaki tüm kökleri reeldir.

Legendre fonksiyonlarının integral temsilini verelim.

- $P_\nu^\mu(z)=\dfrac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty (z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}(\sinh t)^{2\nu+1}dt \quad , \quad Re(-\mu)>Re\,\nu>-1$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{\mu\pi i}2^{-\nu-1}\Gamma(\mu+\nu+1)(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi (z+\cos t)^{\mu-\nu-1}(\sin t)^{2\nu+1}dt\,,$$

$Re(\nu+\mu+1)>0, Re\,\nu>-1$

Legendre polinomlarının ortogonallik koşulları aşağıdaki gibi verilir.

- $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases} 0 & , \quad n\neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & , \quad n=m \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$

- $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1}P_n^m(x)P_n^k(x)dx=\begin{cases} 0 & , \quad k\neq m \\ \dfrac{(n+m)!}{m(n-m)!} & , \quad k=m \end{cases}$

- $\int_{-1}^{1} Q_n^m(x)P_l^k(x)dx=(-1)^m\dfrac{1-(-1)^{l+n}(n+m)!}{(l-n)(l+n+1)(n-m)!}$

Legendre polinomlarını genelleştirirsek Jacobi polinomlarını buluruz.

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\frac{du}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)u=0 \tag{2.13}$$

diferensiyel denkleminin çözümleri $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları olarak tanımlanır. Bu diferensiyel denklem Hipergeometrik diferensiyel denkleme indirgenebilir. Bu durumda bu denklemin çözümleri aşağıdaki gibi verilir.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\beta+1;\frac{1+x}{2}\right)$$

$$=\binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-n,-n-\beta;\alpha+1;\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$=\binom{n+\beta}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n F\left(-n,-n-\alpha;\beta+1;\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{2^{n+\alpha+\beta}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)x^{n+\alpha+1}(x+1)^{\beta}}F\left(n+1,n+\alpha+1;2n+\alpha+\beta+2;\frac{2}{1-x}\right)$$

Jacobi polinomlarının bazı özelliklerini verelim.

- $P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$
- $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}$ , $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}$
- $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
- $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m$
- $\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{n[(\alpha-\beta)-(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)}$
- $2^n n!\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}D^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$ , Rodrigues formülü.

Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

- $\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}$

Jacobi polinomlarının integral temsilini verelim.

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{t^2-1}{2(t-x)}\right)^n\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta}dt$ , $x\neq\pm 1$
- $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-n-1}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\int_{-1}^{1}(x-t)^{-n-1}(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}dt$

### 2.3. Laplace-Beltrami Operatörü

Riemannian uzayında $(g_{ij})$ metrik matrisi ve $\Gamma_{ij}^{k}$ bağlantısı tanımlanmış olsun. Eğer $(g_{ij})$ metrik matrisinin kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^{l} g_{lj} - \Gamma_{jk}^{l} g_{il} = 0$$

sıfır ise bu bağlantıya metrik matrisle uzlaşan bağlantı denir. Metrik matrisle uzlaşan bağıntının ifadesi aşağıdaki formülle verilir.

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \tag{2.14}$$

$T^i$, $(1,0)$ tipli tensörün diverjansını verelim. $T^i$ tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^{i} T^m$$

formülü ile verildiğinden $T^i$ tensörünün diverjansı için aşağıdaki formülü alırız.

$$divT^i = \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma_{mi}^{i} T^m \quad , \quad g = det(g_{ij}) \tag{2.15}$$

$$\Gamma_{mi}^{i} = \frac{1}{2} g^{il} \left( \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^m}$$

formülünden yararlanarak (2.15) bağıntısından

$$divT^i = \nabla_i T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} T^i \right)$$

alırız. Burada $T^i = g^{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ ifadesini yerine yazarsak

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{2.16}$$

buluruz ki buna Riemannian uzayda verilmiş Laplace-Beltrami operatörü denir. $x = (x_1, ..., x_n)$ kartezyen koordinatlar, $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrik matris olmak üzere $E_n$, $n$ boyutlu Euclidean uzayda Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{2}} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{2.17}$$

olarak verilir. $E_{p,q}$ pseudo-Euclidean uzayda metrik matris

$$\left(g_{ij}\right) = diag\left(\underbrace{1,...,1}_{p\,tan\,e}, \underbrace{-1,...,-1}_{q\,tan\,e}\right)$$

şeklinde verilir. Bu durumda Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \qquad (2.18)$$

olur.

$S^{n-1}$ küresinde verilmiş $\theta_1,...,\theta_{n-1}$ küresel koordinat sistemi için Laplace-Beltrami operatörünü verelim. $x = \left(x_1,...,x_n\right) \in S^{n-1}$ de küresel koordinatlar

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,sin\,\theta_{n-1}\,sin\,\theta_{n-2}...sin\,\theta_2\,sin\,\theta_1 \\
x_2 &= r\,sin\,\theta_{n-1}\,sin\,\theta_{n-2}...sin\,\theta_2\,cos\,\theta_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \qquad (2.19) \\
x_{n-1} &= r\,sin\,\theta_{n-1}\,cos\,\theta_{n-2} \\
x_n &= r\,cos\,\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada

$$x_1^{\,2} + ... + x_n^2 = r^2 \quad , \quad r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi \quad , \quad 2 \leq k \leq n-1$$

dir.

Metrik matris , $\left(g_{ij}\right) = \left[\dot{x}_{r_i}, \dot{x}_{r_j}\right]$ , $\tau_1 = r, \tau_2 = \theta_1,...,\tau_n = \theta_{n-1}$ bağıntısından

$$\left(g_{ij}\right) = diag\left(1, r^2, r^2\,sin^2\,\theta_{n-1},...,r^2\,sin^2\,\theta_2...sin^2\,\theta_{n-1}\right)$$

şeklinde bulunur. Buradan Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta_{LB}^{(n)} = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0^{(n-1)} \qquad (2.20)$$

olup birinci kısım operatörün radyal kısmını $\Delta_0^{(n-1)}$ da açısal kısmını oluşturur. Burada

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{(n-1)} &= \frac{1}{sin^{n-2}\,\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}sin^{n-2}\,\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} + \frac{1}{sin^2\,\theta_{n-1}}\Delta_0^{(n-2)} \\
&= \frac{1}{sin^{n-2}\,\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}sin^{n-2}\,\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} + ... + \frac{1}{sin^2\,\theta_{n-1}...sin^2\,\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2}
\end{aligned}$$

dir.

$F(r,\theta_1,...,\theta_n) = r^{\sigma}\Phi(\theta_1,...,\theta_n)$ , $\sigma$. dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere

$$\Delta_{LB} F = 0$$

Laplace denklemini ele alalım.

$$\Delta_{LB}^{(n)} F = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_0^{(n-1)} F = 0$$

Buradan

$$\Delta_0^{(n-1)} \Phi = \sigma(\sigma + n - 2)\Phi(\theta_1,...,\theta_n) \tag{2.21}$$

denklemini buluruz.

### 2.4. Kuantum İntegrallenebilir Sistem

$N$ parçacığı karakterize eden dalga fonksiyonu $\Psi(x_1, x_2,...,x_N)$ , normalleştirme koşulu da $\int ... \int |\Psi(x_1, x_2,...,x_N)|^2 dx_1...dx_N = 1$ şeklinde verilir.

Dalga fonksiyonu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, x_2 ..., x_N ; t) = H\Psi(x_1, .x_2 ..., x_N ; t)$$

diferensiyel denklemin çözümü ile verilir. Burada $H$, $N$ parçacıktan oluşan sistemin toplam enerjisini temsil eder. $V(x)$ potansiyeli ile birbirini etkileyen $N$ parçacıklı bir kuantum sistem

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x_1, x_2,...,x_N) = -\hbar^2 \left( \frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{1}{2m_N} \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right) + V(x_1, x_2,...,x_N)$$

şeklinde Hamiltonyen ile tanımlanır. Burada $V(x_1, x_2,...,x_N)$ potansiyeli özel tipte bir fonksiyondur. Örnek olarak iki farklı tip sistem verilebilir ki bunlar tam integrallenebilir. Birincisi Oskilatör tipte $N$ parçacık problemi ki potansiyel, $V(x_1, x_2,...,x_N) = k/2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + v(x_1, x_2,...,x_N)$ şeklinde, diğeri ise Coulomb tip $N$ parçacık problemi olup potansiyel,

$$V(x_1, x_2, ..., x_N) = -\alpha \left( \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{-1/2} + v(x_1, x_2, ..., x_N)$$

şeklinde verilir. Burada $k$ ve $\alpha$ sabitlerdir.

Parçacıkların bir dış kuvvetin etkisi altında olmaması durumunda potansiyel enerji parçacıkların birbirlerine göre durumlarına bağlıdır ve potansiyel, $V(x_1 - x_2, ..., x_{N-1} - x_N)$ biçiminde yazılır. İki parçacıktan oluşan bir sistem için bunu yazarsak, $V(x_1 - x_2)$, Hamiltonyen

$$H = -\hbar^2 \left( \frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V(x_1 - x_2)$$

olur. Bunun için özdeğer denklemi yazılarak sistem çözülür. Parçacıklar bir dış kuvvetin etkisi altında olsun fakat birbirleriyle etkileşmesin, bu durumda potansiyel $V_1(x_1) + ... + V_N(x_N)$ şeklinde verilir. İki parçacıktan ibaret olan sistem için bunu yazarsak, $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ ve Hamiltonyen

$$H = -\hbar^2 \left( \frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + V_1(x_1) + V_2(x_2)$$

şeklinde verilir. Etkileşmeyen parçacıklar için enerji özdeğer denklemi parçacık denklemine ayrılabilir. Parçacıklar özdeş ise verilen bu durumlar geçerli olmaz. Tek parçacık için potansiyel $V(x)$ şeklinde verilir ki bu bir boyutlu potansiyeldir. Parçacıktan kastımız, bunların bir nokta biçiminde oldukları veya en azından göz önüne alınan fiziksel sistemin tipik boyutlarından daha küçük boyutlara sahip olduklarını ima ediyoruz.

Simetrik uzayda bir serbest parçacığın kuantum problemi ilginçtir ve bir boyutlu integrallenebilir kuantum sistemle bağlantılıdır. Bu tür problemler bir boyutlu uzayda $N$ parçacık problemidir ve potansiyel $V(x_i - x_j)$ formunda verilir. Potansiyelin üç basit tipini verelim. $V(x) = sin^2\, x,\ V(x) = sinh^{-2}\, x,\ V(x) = x^{-2}$. Bu potansiyeller sırasıyla kompakt, kompakt olmayan ve eğriliği sıfır olan simetrik uzaylarla bağlantılıdır. Bu sistemlerin tam kuantum sistemlerinin verilmesi durumunda gösterilebilir ki Hamiltonyen ile simetrik uzaydaki Laplace basit bağlantılıdır.

Tam çözünebilen kuantum sistemleri incelenebilmesi için özellikle Hilbert uzayı, Lie grubu ve cebiri, simetrik uzay, diferensiyel geometri, özel fonksiyonlar v.b. matematiksel yapıların bilinmesi gerekir.

### 2.5. Schrödinger Denklemi

$m$ kütleli bir cisim $x$-ekseni boyunca bir $F(x,t)$ kuvvetinin etkisiyle hareket etsin. Bu bir boyutta belirli bir kuvvet altında parçacığın hareketidir. $v$ hız, $p = mv$ momentum, $T = 1/2mv^2$ kinetik enerji, $x(t)$ parçacığın pozisyonu göstermek üzere, klasik mekanikte bunu nasıl belirleriz? Newton'un ikinci yasası $(F = ma)$ uygulanır ve uygun başlangıç koşullarıyla parçacığın $x(t)$ pozisyonu belirlenebilir.

Kuantum mekaniği bu probleme farklı yaklaşır. Bu halde parçacığın $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu aranır ki bu Schrödinger denkleminin çözümüyle verilir. Bir boyutlu $X$ uzayında momentum $p$, kütlesi $m$ olan bir parçacık serbest, yani bir potansiyel içinde $(V = 0)$ değilse toplam enerjisi $E = p^2/2m$ olup sadece kinetik enerjiden ibarettir. Bu parçacığı temsil eden dalga paketinin sayısı $k$, açısal frekansı $\omega$ olmak üzere , $\hbar = h / 2\pi$ , $\omega = 2\pi k$ , $k = 2\pi / \lambda$ , enerji ve momentum

$$E = \hbar\omega, p = \hbar k \tag{2.22}$$

şeklinde verilir. Burada $\hbar$ Planck sabiti, $v$ frekansı, $\lambda$ dalga boyunu gösterir. Bu bağıntılar de-Broglie denklemleri olarak bilinir.

Fotonlar bazı olaylarda dalga bazı olaylarda da parçacık gibi davranır ancak bir olay sırasında iki karakteri aynı anda gösteremez. Bu günümüzde dalga-parçacık ikilemi olarak bilinir. Fotonun bu dalga ve parçacık karakteri (2.22) denklemiyle ifade edilir. (2.22) bağıntıları ve klasik dalganın özellikleri Schrödinger dalga denklemi olarak bilinen madde dalgalarına uygun dalga denkleminin oluşturulmasında kullanılır. Serbest parçacıklara eşlik eden madde dalgaları için dalga denklemi

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.23}$$

şeklinde verilebilir ki bu Schrödinger serbest parçacık denklemi olarak tanımlanır. Enerji ve momentum operatörleri

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \;\;,\;\; p^2/2m = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \;\;,\;\; p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda elde ettiğimiz denklem serbest parçacık için doğru sonuçlar verir. Daha genel olarak sabit bir $V$ potansiyeli altında hareket eden bir parçacığı ele alalım. Bu parçacığın toplam enerjisi $E = p^2/2m + V$ ve de-Broglie bağıntısı $\hbar\omega = \hbar^2 k^2 / 2m + V$ olur. Buradan yukarıda verilen (2.23) denklemine benzer şekilde daha genel

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi$$

denklemini buluruz. Bu zamana bağlı bir boyutlu Schrödinger denklemidir. Denklemi üç boyutlu sistemler için yazarsak

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right) + V(x,t)\Psi$$

olur. Denklemde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace operatörü, toplam enerjinin diferensiyel şekli olan $H = -\hbar^2 / 2m\Delta + V$ Hamilton operatörü tanımlanırsa Schrödinger denklemi $i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$ şeklinde de yazılabilir.

Dalga denkleminin çözümü olan $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu incelenen bir sistem hakkındaki tüm bilgiyi içermektedir. Yani, fiziksel sistemin belirli bir $t$ anındaki durumu $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu ile belirlenir. Sistemin $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonunun zaman içindeki gelişimi Schrödinger denklemiyle verilir. Yukarıda verdiğimiz denklem zamana bağlı Schrödinger denklemi olup zamandan bağımsız Schrödinger denklemini verelim.

Schrödinger denklemindeki $V(x,t)$ potansiyeli zamandan bağımsız olsun. Bu durumda Schrödinger denklemi "değişkenlere ayırma" yöntemiyle çözülebilir ve $\Psi(x,t) = U(x)T(t)$ şeklinde bir çözüm aranır. Buradan

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{U}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta U + V(x) \tag{2.24}$$

denklemini elde ederiz. Denklemin sol tarafı sadece $t$ değişkenine, sağ tarafı da $x$ değişkenine bağlıdır. Denklemin bütün $x$ ve $t$ değerleri için geçerli olması ancak iki tarafın bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. Bu sabite ayırma sabiti denir ve bu sabiti $E$ ile gösterelim. Bu durumda (2.24) denklemi

$$i\hbar \frac{\partial T}{\partial t} = ET \ , \ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta U + V(x)U = EU(x) \tag{2.25}$$

olur. Burada $E$ sabiti fiziksel sistemin toplam enerjisi olarak alınabilir.

(2.24) denkleminin çözümü $\Psi(x,t) = e^{iEt/\hbar} U(x)$ şeklinde verilir. $V$ potansiyelinin bir çok biçimi için Schrödinger denkleminin çözümleri bulunur. Normalize çözümler için $E$ ayırma sabitinin reel olması gerekir. $E$ sabiti kompleks değer alamaz. Çünkü $E$ sabitini $E = E_r + iE_i$ şeklinde yazarsak çözümdeki $e^{iEt/\hbar} = e^{iE_r t/\hbar} e^{-E_i t/\hbar}$ olur ki bu $t \to \infty$ için sonsuza gider, bu da dalga fonksiyonu olarak kabul edilemez. Schrödinger denkleminin çözümleri fiziksel olarak kabul edilebilen dalga fonksiyonları olacaksa, bunların sağlamak zorunda olduğu bazı koşullar vardır.

- Olasılık yorumuna göre parçacığın konumunu bir yerde diğerine süreksiz değişmez, aynı anda iki olasılığı olamaz ve bir yerde sonlu olasılıkla bulunabilir. Yani, $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu konum ve zamanın sürekli ve tek değerli bir fonksiyonu olmalıdır. Bu parçacığın herhangi bir nokta etrafında bulunma olasılığının belirlenmesini garanti eder. Eğer $|\Psi|^2$ çok değerli bir fonksiyon olsaydı veya süreksizlikler içerseydi bu olasılık iki veya daha fazla değer alabilirdi.
- Dalga fonksiyonunun büyüklüğünün karesinin bütün değerler üzerinden integrali sonlu olmalıdır.

$$\int |\Psi|^2 dv < \infty \tag{2.26}$$

Bu koşul sağlanmazsa dalga fonksiyonu bire normalleştirilemez.

- $\Psi_1$ ve $\Psi_2$ gibi iki dalga fonksiyonunun farklı iki durumu temsil edilebilmesi için bunların lineer bağımsız olması gerekir.

Schrödinger denkleminin değişik tipte potansiyel için çözümü araştırılır. Değişkenlere ayırma metoduyla denklem tek boyutlu Schrödinger denklemine indirgenir, bu da problemin çözümünü kolaylaştırır. Biz yaptığımız çözümlerde, Schrödinger denkleminde $m$ kütlesini ve $\hbar$ Planck sabitini $1$ aldık.

## 2.6. Analitik Devam

$D_1$ ve $D_2$ gibi iki bağlantılı bölgenin arakesiti, her iki bağlantılı bölgede ortak olan noktaların tümünden oluşan $D_1D_2$ bağlantılı bölgesidir. Eğer iki bağlantılı bölge kesişirse bu durumda, bölgelerin her birinde bulunan noktaların tamamı da yine bağlantılı bir bölge oluştururlar. Bu bağlantılı bölgeye $D_1$ ile $D_2$ nin bileşimi denir ve $D_1 + D_2$ ile gösterilir.

$D_1$ ve $D_2$ gibi iki kesişen bağlantılı bölge ve $D_1$ üzerinde analitik olan bir $f_1$ fonksiyonu verildiğinde, $D_2$ üzerinde analitik olan ve $D_1D_2$ arakesitine ait olan noktaların her birinde $f_1$'e eşit olan bir $f_2$ fonksiyonu var olabilir. Eğer varsa bu zaman $f_2$ ye, $f_1$'in $D_2$ bağlantılı bölgesi içindeki analitik devamı denir.

$f_2$ fonksiyonunun analitik devamı varsa tektir. Çünkü birden fazla fonksiyon $D_2$ içinde analitik olamaz ve $D_2$ içindeki bağlantılı $D_1D_2$ bölgesine ait $z$ noktalarının her birinde $f_1(z)$ değerini alamaz. $f_1$'in bağlantılı bir $D_1$ bölgesinden $D_1$'i kesen bir $D_2$ bağlantılı bölgesi içine analitik devamı $f_2$ ise,

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & D_1 \text{ in içindeki } z' \text{ler için} \\ f_2(z) & D_2 \text{ nin içindeki } z' \text{ler için,} \end{cases}$$

olmak üzere, $F$ fonksiyonu $D_1 + D_2$ birleşiminde analitiktir. $f_1$ ve $f_2$ fonksiyonlarına $F$'nin öğeleri denir ve $F$ de, ya $f_1$' in yada $f_2$'nin $D_1 + D_2$ içine analitik devamıdır.

Örneğin,

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanan $f_1$ fonksiyonunu düşünelim. Buradaki kuvvet serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $|z| < 1$ olmasıdır. Bu, $(1-z)^{-1}$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımıdır; o halde

$$|z| < 1 \text{ olduğunda } f_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

dir, ama $|z| \geq 1$ için $f_1$ tanımlı değildir. Şimdi

$$F_1(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (z \neq 1) \tag{2.28}$$

fonksiyonu, $z = 1$ noktası hariç, tanımlı ve analitiktir. Bu, $|z| = 1$ çemberinin içinde $f_1$'e özdeş olduğundan, $|z| \geq 1$ ve $z \neq 1$ için her zaman o bölgenin dışında $f_1$'in analitik devamını temsil eder. Bu $f_1$'in birim çemberin ötesinde mümkün tek analitik devamıdır. Bu durumda $f_1$, (2.28) eşitliğiyle tanımlanan $F$ fonksiyonunun bir öğesidir.

Eğer biz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

kuvvet serisinin yakınsak olduğunu, $|z| < 1$ için $z$'nin analitik bir fonksiyonunu gösterdiğini ve $z = x$ in toplamının $(1-x)^{-1}$ olduğunu bilerek başlarsak, bu durumda $|z| < 1$ için serinin toplamının $(1-z)^{-1}$ olduğu sonucuna varabiliriz, çünkü $(1-z)^{-1}$ fonksiyonu, $(1-x)^{-1}$ değerlerini $x$ ekseninin çember içinde kalan parçası boyunca alan ve çember içinde analitik olan fonksiyondur.

Analitik devamın bir diğer açıklaması olarak,

$$g_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt \tag{2.29}$$

fonksiyonunu düşünelim. $-z^{-1}e^{-zt}$ integral altının bir belirsiz integrali olduğundan,

$$x > 0 \text{ için } g_1(z) = -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{z} \tag{2.30}$$

bulunur. O halde $D_1$ ile gösterilen $x > 0$ bağlantılı bölgesinde tanımlanır ve orada analitiktir. $g_2$,

$$g_2(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z+i}{i} \right)^n \qquad (|z+i| < 1) \tag{2.31}$$

geometrik serisiyle tanımlanmış olsun. Onun yakınsaklık çemberi olan, $z = -i$ noktası dolayındaki birim çember içinde seri $\frac{1}{z}$ ye yakınsar, yani $|z+i| < 1$ bağlantılı bölgesine $D_2$ dersek $D_2$ deki $z$ ler için

$$g_2(z) = i\frac{1}{1-(z+i)/i} = \frac{1}{z} \tag{2.32}$$

bulunur. O halde $D_1D_2$ arakesitinde $g_2 = g_1$ dir ve $g_2$ fonksiyonu $g_1$'in $D_2$ içine analitik devamıdır.

$G(z) = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ fonksiyonu, $z$ düzleminin başlangıç hariç, tüm noktalarından oluşan bağlantılı $D_3$ bölgesi içinde hem $g_1$'in ve hem de $g_2$'nin analitik devamıdır. $g_1$ ile $g_2$ fonksiyonları $G$'nin öğeleridir.

Hipergeometrik fonksiyonlar için analitik devam bağıntıları genel durumda $1-c,\ b\text{ - }a,\ c\text{ - }b\text{ - }a$ tamsayı olmaması halinde, aşağıdaki gibi verilebilir.

$$F(a,b;c;z) = A_1F(a,b;a+b-c+1;1-z) + A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$
$$|arg(1-z)| < \pi$$

$$F(a,b;c;z) = B_1(-z)^{-a}F(a,1-c+a;1-b+a;z^{-1}) + B_2(-z)^{-b}F(b,1-c+b;1-a+b;z^{-1})$$
$$|arg(-z)| < \pi$$

$$F(a,b;c;z) = B_1(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;a-b+1;(1-z)^{-1}\right) + B_2(1-z)^{-b}F\left(b,c-a;b-a+1;(1-z)^{-1}\right)$$
$$|arg(1-z)| < \pi$$

$$F(a,b;c;z) = A_1z^{-a}F(a,a+1-c;a+b+1-c;1-z^{-1}) + A_2z^{a-c}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,1-a;c+1-a-b;1-z^{-1})$$
$$|arg\ z| < \pi$$

$A_1, A_2, B_1, B_2$ katsayıları aşağıdaki gibi verilir.

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \quad , \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$

# 3. BÖLÜM

## 3.1. *U(1,3)* Grubuyla Bağlantılı Kuantum İntegrallenebilir Sistem

$C^{4}_{1,3}$ $4$-boyutlu kompleks vektör uzayında bir $z$ elemanı; $z \in C^{4}_{1,3}$

$$z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$$

olarak alınır. Bu uzayda bilineer çarpım

$$[z,z] = z_0\bar{z}_0 - z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 - z_3\bar{z}_3$$

şeklinde tanımlanır. Bu $C^{4}_{1,3}$ de $H^{3}_{c}$ kompleks hiperboloidini tanımlar.

Bir parçacıklı sistemlerde yüzeyde vektör halinde koordinatlar verilerek işlemler yapılır. Ancak iki veya daha çok parçacıklı halde bu geçerli olmaz. Boyutlar farklıdır. Vektörle verilmez. Matrislerle verilmelidir. Örneğin $SU(2,2)$ grubunda iki parçacık var, elemanlar ve işlemler matrislerle yapılır. Oysa $U(1,3)$ ve $SO(1,2)$ grubunda bir parçacık var. Bu yüzden $U(1,3)$ grubunun yüzeyinde koordinatlar verilerek; yani vektör olarak ifade edilerek işlemler yapılır.

$[z,z] = r^2$ hiperboloidinde pseudo-küresel koordinatlar

$$z_0 = re^{i\varphi_0} \cosh\alpha \cosh\nu$$

$$z_1 = re^{i\varphi_1} \sinh\alpha \cos\theta$$

$$z_2 = re^{i\varphi_2} \sinh\alpha \sin\theta$$

$$z_3 = re^{i\varphi_3} \cosh\alpha \sinh\nu \;;$$

$$z = \left(re^{i\varphi_0} \cosh\alpha \cosh\nu, re^{i\varphi_1} \sinh\alpha \cos\theta, re^{i\varphi_2} \sinh\alpha \sin\theta, re^{i\varphi_3} \cosh\alpha \sinh\nu\right)$$

$$-\infty < \alpha \;, \nu < \infty \;, 0 \le \theta \le 2\pi \;, 0 \le \varphi_i \le 2\pi \;, i = 0,1,2,3$$

şeklinde verilir.

Yüzeyin kendisine ait bir iç geometrisi, yani metrik matrisi vardır. Eğrilik ve burulma yüzeyin dış geometrisinin invaryantlarıdır. Yüzeyimizin metrik matrisi;

$(g_{ij})$ , $i \ne j$ için $g_{ij} = 0$ , $(g_{ij}) = [\dot{z}_i, \dot{z}_j]$, $i, j = 1,\ldots,8$

$$\dot{z}_r = \left(e^{i\varphi_0} \cosh\alpha \cosh\nu, e^{i\varphi_1} \sinh\alpha \cos\theta, e^{i\varphi_2} \sinh\alpha \sin\theta, e^{i\varphi_3} \cosh\alpha \sinh\nu\right)$$

$$\dot{z}_\alpha = \left(re^{i\varphi_0}\sinh\alpha\cosh\nu, re^{i\varphi_1}\cosh\alpha\cos\theta, re^{i\varphi_2}\cosh\alpha\sin\theta, re^{i\varphi_3}\sinh\alpha\sinh\nu\right)$$

$$\dot{z}_\theta = \left(0, -re^{i\varphi_1}\sinh\alpha\sin\theta, re^{i\varphi_2}\sinh\alpha\cos\theta, 0\right)$$

$$\dot{z}_\nu = \left(re^{i\varphi_0}\cosh\alpha\sinh\nu, 0, 0, re^{i\varphi_3}\cosh\alpha\cosh\nu\right)$$

$$\dot{z}_{\varphi_0} = \left(rie^{i\varphi_0}\cosh\alpha\cosh\nu, 0, 0, 0\right)$$

$$\dot{z}_{\varphi_1} = \left(0, ire^{i\varphi_1}\sinh\alpha\cos\theta, 0, 0\right)$$

$$\dot{z}_{\varphi_2} = \left(0, 0, ire^{i\varphi_2}\sinh\alpha\sin\theta, 0\right)$$

$$\dot{z}_{\varphi_3} = \left(0, 0, 0, ire^{i\varphi_3}\cosh\alpha\, sh\nu\right)$$

$$g_{11} = [\dot{z}_r, \dot{z}_r] = 1\ ,\ g_{22} = [\dot{z}_\alpha, \dot{z}_\alpha] = -r^2\ ,$$

$$g_{33} = [\dot{z}_\theta, \dot{z}_\theta] = -r^2\sinh^2\alpha\ ,\quad g_{44} = [\dot{z}_\nu, \dot{z}_\nu] = -r^2\cosh^2\alpha\ ,$$

$$g_{55} = [\dot{z}_{\varphi_0}, \dot{z}_{\varphi_0}] = r^2\cosh^2\alpha\cosh^2\nu\ ,\ g_{66} = [\dot{z}_{\varphi_1}, \dot{z}_{\varphi_1}] = -r^2\sinh^2\alpha\cos^2\theta\ ,$$

$$g_{77} = [\dot{z}_{\varphi_2}, \dot{z}_{\varphi_2}] = -r^2\sinh^2\alpha\sin^2\theta\ ,\ g_{88} = [\dot{z}_{\varphi_3}, \dot{z}_{\varphi_3}] = -r^2\cosh^2\alpha\sinh^2\nu$$

$$g = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -r^2\sinh^2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -r^2\cosh^2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & r^2\cosh^2\alpha\cosh^2\nu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r^2\sinh^2\alpha\cos^2\theta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r^2\sinh^2\alpha\sin^2\theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r^2\cosh^2\alpha\sinh^2\nu
\end{pmatrix}$$

veya

$$\left(g_{ij}\right) = diag\ \left(1, -r^2, -r^2\sinh^2\alpha, -r^2\cosh^2\alpha, r^2\cosh^2\alpha\cosh^2\nu,\right.$$
$$\left. -r^2\sinh^2\alpha\cos^2\theta, -r^2\sinh^2\alpha\sin^2\theta, -r^2\cosh^2\alpha\sinh^2\nu\right)$$

şeklinde verilir.

$$g = det\left(g_{ij}\right) = r^{14}\sinh^6\alpha\cosh^6\alpha\cosh^2\nu\sinh^2\nu\cos^2\theta\sin^2\theta$$

Laplace-Beltrami operatörü,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\sqrt{g}g^{ab}\frac{\partial}{\partial x^b}\right) \qquad a,b = 1,\ldots,8\,;$$

$$x^1 = r, x^2 = \alpha, x^3 = \theta, x^4 = \nu, x^5 = \varphi_0, x^6 = \varphi_1, x^7 = \varphi_2, x^8 = \varphi_3$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{7}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Delta_{LB}$$

$$\Delta_{LB} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 6\frac{\cosh 2\alpha}{\sinh 2\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\cosh^2 \alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + 2\frac{\cosh 2\nu}{\sinh 2\nu}\frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{\cosh^2 \nu}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_0^2} + \frac{1}{\sinh^2 \nu}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_3^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{\sinh^2 \alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2}\right]$$

şeklinde bulunur.

$\Delta_{LB}$ ‘ nin çözümünü arayalım.

$$\Delta_{LB} F(\alpha, \nu, \theta, \varphi_j) = \sigma(\sigma + 6) F(\alpha, \nu, \theta, \varphi_j), \ j = 0,1,2,3 \tag{3.1}$$

Değişkenlere ayırma yöntemine göre,

$$F(\alpha, \nu, \theta, \varphi_j) = A(\alpha)T(\nu)B(\theta)e^{\sum_{j=0}^{3} i m_j \varphi_j} = A(\alpha)T(\nu)B(\theta)e^{i m_0 \varphi_0} e^{i m_1 \varphi_1} e^{i m_2 \varphi_2} e^{i m_3 \varphi_3}$$

ifadesi denklemde yerine yazıp uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 B}{d\theta^2} + 2\cot 2\theta \frac{dB}{d\theta} - \left(\frac{m_1^2}{\cos^2 \theta} + \frac{m_2^2}{\sin^2 \theta}\right) B = -l(l+2)B \\ &\frac{d^2 A}{d\alpha^2} + 6\coth 2\alpha \frac{dA}{d\alpha} + \left(\frac{\sigma_1(\sigma_1 + 2)}{\cosh^2 \alpha} + \frac{-l(l+2)}{\sinh^2 \alpha}\right) A = \sigma(\sigma + 6) A \\ &\frac{d^2 T}{d\nu^2} + 2\coth 2\nu \frac{dT}{d\nu} + \left(\frac{m_0^2}{\cosh^2 \nu} - \frac{m_3^2}{\sinh^2 \nu}\right) T = \sigma_1(\sigma_1 + 2) T \end{aligned} \tag{3.2}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemleri Schrödinger denklemine getirelim.

$$\frac{d^2 B}{d\theta^2} + 2\cot 2\theta \frac{dB}{d\theta} - \left(\frac{m_1^2}{\cos^2 \theta} + \frac{m_2^2}{\sin^2 \theta}\right) B = -l(l+2)B$$

denkleminde, $B = (\sin 2\theta)^{-1/2}\Psi(\theta)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + \left[\frac{-m_1^2 + 1/4}{\cos^2 \theta} + \frac{-m_2^2 + 1/4}{\sin^2 \theta} + (l+1)^2\right]\Psi = 0 \tag{3.3}$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Burada potansiyel

$$V(\theta) = \frac{-m_1^2 + 1/4}{\cos^2\theta} + \frac{-m_2^2 + 1/4}{\sin^2\theta}$$

ve enerji

$$E = (l+1)^2$$

olur. Potansiyel özel tipte bir fonksiyon, enerji ise fiziksel bir büyüklüktür.

$$\frac{d^2T}{d\nu^2} + 2\coth 2\nu \frac{dT}{d\nu} + \left( \frac{m_0^2}{\cosh^2\nu} - \frac{m_3^2}{\sinh^2\nu} \right) T = \sigma_1(\sigma_1 + 2)T$$

denkleminde,

$$T = \sinh^{-1/2}\nu \cosh^{-1/2}\theta \Psi(\nu)$$

$$g = r^{14} \sinh^6\alpha \cosh^6\alpha \cosh^2\nu \sinh^2\nu \cos^2\theta \sin^2\theta$$

$$\sqrt{g}dx = r^7 \sinh^3\alpha \cosh^3\alpha \cosh\nu \sinh\nu \cos\theta \sin\theta \, dx$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{j}}\psi \quad , \quad j = \cosh\nu \sinh\nu$$

$T = \sinh^{-1/2}\nu \cosh^{-1/2}\nu \Psi(\nu)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2\Psi}{d\nu^2} + \left[ \frac{-m_3^2 + 1/4}{\sinh^2\nu} + \frac{m_0^2 - 1/4}{\cosh^2\nu} - (\sigma_1 + 1)^2 \right] \Psi = 0 \tag{3.4}$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Burada potansiyel

$$V(\nu) = \frac{-m_3^2 + 1/4}{\sinh^2\nu} + \frac{m_0^2 - 1/4}{\cosh^2\nu}$$

ve enerji

$$E = -(\sigma_1 + 1)^2$$

dir.

Benzer şekilde

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2} + 6\coth 2\alpha \frac{dA}{d\alpha} + \left( \frac{\sigma_1(\sigma_1 + 2)}{\cosh^2\alpha} + \frac{-l(l+2)}{\sinh^2\alpha} \right) A = \sigma(\sigma + 6)A$$

denklemini Schrödinger denklemine getirelim.

$$\sqrt{g}dx = r^7 \sinh^3\alpha \cosh^3\alpha \cosh\nu \sinh\nu \cos\theta \sin\theta \, dx$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{j}}\psi \quad , \quad j = \sinh^3\alpha \cosh^3\alpha$$

$A = \sinh^{-3/2}\alpha \cosh^{-3/2}\alpha \ \Psi(\alpha)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2\Psi}{d\alpha^2}+\left[\frac{\sigma_1(\sigma_1+2)+3/4}{cosh^2\alpha}+\frac{-l(l+2)-3/4}{sinh^2\alpha}-(\sigma+3)^2\right]\Psi=0 \tag{3.5}$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Burada potansiyel

$$V(\alpha)=\frac{\sigma_1(\sigma_1+2)+3/4}{cosh^2\alpha}+\frac{-l(l+2)-3/4}{sinh^2\alpha}$$

ve enerji

$$E=-(\sigma+3)^2$$

olarak elde edilir.

Denklemlerin Schrödinger denklemine geldiğini gördük. Bu da bir boyutlu kuantum sisteme karşılık gelir. Bir $G$ grubuna bağlı simetrik uzayda serbest parçacık hareketinin simetrisinin bozulması sonucu bir boyutlu kuantum sistem ortaya çıkar. Serbest hareketler simetrik uzayda düzlem dalgalarla ifade edilir. Denklemlerin çözümleri düzlem dalgaları verir.

İlk önce

$$\frac{d^2B}{d\theta^2}+2\cot 2\theta\frac{dB}{d\theta}-\left(\frac{m_1{}^2}{cos^2\theta}+\frac{m_2{}^2}{sin^2\theta}\right)B=-l(l+2)B \tag{3.6}$$

denkleminin çözümünü arayalım.

Denklemde $B=tan^{m_2}\theta\, cos^l\theta\, W(\theta)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}+\left[-2l\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{2m_2}{sin\theta cos\theta}+\frac{cos^2\theta-sin^2\theta}{sin\theta cos\theta}\right]\frac{dW}{d\theta}+\left[-l+l(l-1)\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}-\frac{lm_2}{cos^2\theta}-\frac{m_2(l-2)}{cos^2\theta}\right.$$
$$\left.+\frac{m_2(m_2-1)}{sin^2\theta cos^2\theta}+\frac{2m_2}{sin\theta cos\theta}\frac{cos2\theta}{sin2\theta}-2l\frac{cos2\theta}{sin2\theta}\frac{sin\theta}{cos\theta}-\frac{m_1^2}{cos^2\theta}-\frac{m_2^2}{sin^2\theta}+l(l+2)\right]W=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $z=-tan^2\theta$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2}+[(m_2+1)-(-l+m_2+1)z]\frac{dW}{dz}-\left(\frac{-l-m_1+m_2}{2}\right)\left(\frac{-l+m_1+m_2}{2}\right)W=0 \tag{3.7}$$

$$a=\frac{-l-m_1+m_2}{2},\ b=\frac{-l+m_1+m_2}{2},\ c=m_2+1,\ a+b+1=-l+m_2+1$$

bilinen Hipergeometrik denklemi elde edilir.

Bu denklemin $z=0$ civarında çözümü,

$$W(z)=F\left(\frac{-l-m_1+m_2}{2},\frac{-l+m_1+m_2}{2};m_2+1;z\right)$$

dir. Buradan (3.6.) denkleminin $\theta=0$ daki çözümü

$$B=b^{l}_{m_1m_2}\tan^{m_2}\theta\cos^{l}\theta\,F\left(\frac{-l-m_1+m_2}{2},\frac{-l+m_1+m_2}{2};m_2+1;-\tan^2\theta\right)\qquad(3.8)$$

olur.

Hipergeometrik fonksiyonlar Legendre, Jacobi, Whitteker fonksiyonları gibi başka fonksiyonlarla ifade edilebilir. Hipergeometrik fonksiyonlar için ortogonallik koşulu yoktur. Oysa Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu var ve ispatlanmış. O halde çözümdeki sabiti bulmak için Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulu kullanılabilir.

Bu yüzden yukarıdaki çözümü Jacobi polinomlarıyla ifade edelim.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n}F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{n!\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$-n=\frac{-l-m_1+m_2}{2};\ -l=-2n+m_1-m_2;\ n=\frac{l+m_1-m_2}{2};\ \beta=-m_1;\ \alpha=m_2;$$

$$x=\cos 2\theta;\ z=\frac{x-1}{1+x}$$

$$F\left(\frac{-l-m_1+m_2}{2},\frac{-l+m_1+m_2}{2};m_2+1;-\tan^2\theta\right)=\frac{\left(\frac{l+m_1-m_2}{2}\right)!\,\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\cos^{(-l-m_1+m_2)}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)$$

buradan çözümün Jacobi polinomlarıyla ifadesi

$$B=b^{l}_{m_1m_2}\frac{\left(\frac{l+m_1-m_2}{2}\right)!\,\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)\qquad(3.9)$$

şeklinde verilir. Burada

$$\left(\frac{l+m_1-m_2}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)$$

dir. Şimdi çözümdeki $b^{l}_{m_1m_2}$ sabitini belirleyelim.

$$\int_{-1}^{1}|B|^2\,dx=\int_{-1}^{1}B\overline{B}\,dx=1$$

olsun.

$$B=b^{l}_{m_1m_2}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)$$

$$\int_{-1}^{1}B\overline{B}\,dx=\int_{-1}^{1}b^{l}_{m_1m_2}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)$$

$$\times b^{l}_{m_1m_2}\frac{\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta=1$$

$$\left(b^{l}_{m_1m_2}\right)^2\frac{\Gamma^2\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma^2(m_2+1)}{\Gamma^2\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\sin^{2m_2+1}\theta\cos^{-2m_1+1}\theta\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)d\theta=1$$

Bu integralin değerini hesaplayalım. Jacobi polinomları için ortogonallik özelliği

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}$$

bağıntısıyla verilir. Burada $m=n$ alınırsa $\delta_{nm}=\delta_{mn}=1$ olur.

$$x=\cos 2\theta,\alpha=m_2,\beta=-m_1$$

$(1-x)^{\alpha}=2^{m_2}\sin^{2m_2}\theta$ ve $(1+x)^{\beta}=2^{-m_1}\cos^{-2m_1}\theta$

ifadeleri ortogonallik özelliğinde yerine yazılırsa integral,

$$\int_{-1}^{1}\sin^{2m_2+1}\theta\cos^{-2m_1+1}\theta P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos2\theta)\,P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos2\theta)\,d\theta=\frac{2\Gamma\left(\frac{l+m_2+m_1+2}{2}\right)\Gamma(m_2-m_1+1)}{(l+1)\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-m_1+m_2+2}{2}\right)}$$

olarak bulunmuş olur. Bu integral yukarıda yerine yazılırsa çözümdeki

$$b^{l}_{m_1 m_2} = \frac{\sqrt{(l+1)\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l-m_1+m_2+2}{2}\right)}}{\Gamma(m_2+1)\sqrt{2\Gamma\left(\frac{l-m_1-m_2+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+m_1-m_2+2}{2}\right)}}$$

katsayısı bulunur.

Şimdi

$$\frac{d^2T}{d\nu^2} + 2\frac{cosh\,2\nu}{sinh\,2\nu}\frac{dT}{d\nu} + \left(\frac{m_0^2}{cosh^2\nu} - \frac{m_3^2}{sinh^2\nu}\right)T = \sigma_1(\sigma_1+2)T \tag{3.10}$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Denklemde $T = tanh^{m_3}\nu\, cosh^{\sigma_1}\nu\; W$ dönüşümünü yapılırsa,

$$\frac{d^2W}{d\nu^2} + \left[2\sigma_1\frac{sinh\nu}{cosh\nu} + \frac{2m_3}{sinh\nu\, cosh\nu} + \frac{cosh^2\nu + sinh^2\nu}{sinh\nu\, cosh\nu}\right]\frac{dW}{d\nu} + \left[\sigma_1 + \sigma_1(\sigma_1 - 1)\frac{sinh^2\nu}{cosh^2\nu} + \frac{\sigma_1 m_3}{cosh^2\nu}\right.$$

$$+ m_3(\sigma_1 - 2)\frac{1}{cosh^2\nu} + \frac{m_3(m_3-1)}{sinh^2\nu\, cosh^2\nu} + m_3\frac{1}{sinh\nu\, cosh\nu}\frac{cosh^2\nu + sinh^2\nu}{sinh\nu\, cosh\nu}$$

$$\left. + \sigma_1\frac{sinh\,\nu}{cosh\,\nu}\frac{cosh^2\nu + sinh^2\nu}{sinh\,\nu\, cosh\,\nu} + \frac{m_0^2}{cosh^2\nu} - \frac{m_3^2}{sinh^2\nu} - \sigma_1(\sigma_1+2)\right]W = 0$$

denklemi elde edilir. Burada $z = tanh^2\nu$ dönüşümü yapılırsa,

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2} + [(m_3+1) - (-\sigma_1 + m_3 + 1)z]\frac{dW}{dz} - \left(\frac{-\sigma_1 - m_0 + m_3}{2}\right)\left(\frac{-\sigma_1 + m_0 + m_3}{2}\right)W = 0$$

$$a = \frac{-\sigma_1 - m_0 + m_3}{2},\; b = \frac{-\sigma_1 + m_0 + m_3}{2},\; c = m_3 + 1,\; a + b + 1 = -\sigma_1 + m_3 + 1$$

Hipergeometrik denklemi elde edilir.

Hipergeometrik denklemin $z = 0$ civarındaki çözümü,

$$W(z) = F\left(\frac{-\sigma_1 - m_0 + m_3}{2}, \frac{-\sigma_1 + m_0 + m_3}{2}; m_3 + 1; z\right)$$

dır. Buradan (3.10) denkleminin $\nu = 0$ daki çözümü,

$$T = c^{\sigma_1}_{m_0 m_3}\, tanh^{m_3}\nu\, cosh^{\sigma_1}\nu\, F\left(\frac{-\sigma_1 - m_0 + m_3}{2}, \frac{-\sigma_1 + m_0 + m_3}{2}; m_3 + 1; tanh^2\nu\right) \tag{3.11}$$

olur.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{n!\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$-n=\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2};\ n=\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2};\ \beta=-m_0;\ \alpha=m_3;$$

$$x=\cosh 2\nu;\ z=\frac{x-1}{x+1}$$

$$F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};m_3+1;\tanh^2\nu\right)=\frac{\left(\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}\right)!\,\Gamma(m_3+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2}\right)}$$

$$\times\cosh^{-\sigma_1-m_0+m_3}\nu\ P^{(m_3,-m_0)}_{\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}}(\cosh 2\nu)$$

Buradan çözümün Jacobi polinomlarıyla ifadesi

$$T=c^{\sigma_1}_{m_0m_3}\frac{\left(\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}\right)!\,\Gamma(m_3+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2}\right)}\sinh^{m_3}\nu\cosh^{-m_0}\nu\,P^{(m_3,-m_0)}_{\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}}(\cosh 2\nu) \qquad (3.12)$$

$$\left(\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0-m_3+2}{2}\right)$$

olur.

Önceki denklemde çözümdeki sabit ortogonallik koşulundan bulunmuştu. Oysa bu çözümde parametre $\nu$ olup $-\infty<\nu<\infty$ arasında değerler alır. Burada ortogonallik koşulu belli değildir. Bu yüzden yukarıdaki çözümdeki sabitin asimptot yolu ile bulunması gerekir.

Şimdi asimptot yoluyla çözümdeki $c^{\sigma_1}_{m_0m_3}$ sabitini belirleyelim.

Çözümün Hipergeometrik fonksiyonla ifadesi

$$T=c^{\sigma_1}_{m_0m_3}\tanh^{m_3}\nu\cosh^{\sigma_1}\nu\,F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};m_3+1;\tanh^2\nu\right)$$

şeklinde verilmişti.

Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı;

$$F(a,b;c;z) = A_1 F(a,b;a+b-c+1;1-z) + A_2 (1-z)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z) \qquad (3.13)$$

şeklinde verilir.

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)};\ A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};\left|arg(1-z)\right| < \pi$$

$$a = \frac{-\sigma_1 - m_0 + m_3}{2},\ b = \frac{-\sigma_1 + m_0 + m_3}{2},\ c = m_3 + 1$$

Buradan $A_1$, $A_2$ katsayıları

$$A_1 = \frac{\Gamma(m_3+1)\Gamma(\sigma_1+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma_1-m_0+m_3+2}{2}\right)};\ A_2 = \frac{\Gamma(m_3+1)\Gamma(-\sigma_1-1)}{\Gamma\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2}\right)}$$

olarak bulunur.

Atomların, moleküllerin ve elemanter parçacıkların yapısını öğrenmede genellikle saçılma adıyla bilinen deneysel yöntem kullanılır. Bu yöntemde sabit tutulan bir hedef parçacık üzerine belirli bir enerjiye sahip diğer bir parçacık gönderilir ve saçılan parçacıkların yön ve enerjileri gözlenir. Saçılma problemlerinden çok azı tam olarak çözülebilir. Genellikle saçılma problemi yaklaşık yöntemler gerektirir ve formüle etmek güçtür. İncelemede çeşitli potansiyel tiplerinde saçılma problemine bakılır. $S$-matris Schrödinger denkleminin çözümü olan $\Psi(x)$ dalga fonksiyonunun limiti olarak ta verilebilir.

$x$ ekseninin sonlu bir parçasında bir potansiyel alanı verilsin. Bu potansiyel alanının sağında ve solunda $V(x) = 0$ olduğundan Schrödinger denklemini çözümleri,

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad \Psi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \quad , \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$$

olur. $V(x) \neq 0$ ise Schrödinger denklemini çözümü de $\Psi(x) = Cf(x) + Dg(x)$ olacaktır. Verilecek başlangıç ve sınır koşullarından $C$ ve $D$ yokedilir, $B$ ve $F$ de $A$ ve $G$ cinsinden yazılırsa,

$$B = s_{11}A + s_{12}G$$

$$F = s_{21}A + s_{22}G$$

olur. Buradan giden düzlem dalga ile gelen düzlem dalga

$$\begin{pmatrix} B \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada, $S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ matrisi saçılma veya $S$-matris olarak tanımlanır. Bu bir boyutta saçılma matrisidir. $n$-boyutta $S$-matris verilebilir. $S$-matris bize parçacıkların bir engelden yansıması ve geçmesi yani saçılma hakkında bilgi verir.

Buradan $S$-matris

$$S=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A(\rho)}{A(-\rho)}$$

şeklinde verilir.

$$F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};m_3+1;tanh^2\nu\right)=A_1F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};-\sigma_1;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)$$

$$+A_2\left(\frac{1}{cosh^2\nu}\right)^{\sigma_1+1}F\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2},\frac{\sigma_1-m_0+m_3+2}{2};\sigma_1+2;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)$$

Bu, çözümde yerine yazılırsa

$$T=c^{\sigma_1}_{m_0m_3}\,tanh^{m_3}\nu\,cosh^{\sigma_1}\nu\left\{A_1F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};-\sigma_1;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)\right.$$

$$\left.+A_2\left(\frac{1}{cosh^2\nu}\right)^{\sigma_1+1}F\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2},\frac{\sigma_1-m_0+m_3+2}{2};\sigma_1+2;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)\right\} \tag{3.14}$$

olarak bulunur. Bu çözümün $\nu\to\infty$ a gitmesi halinde limitini bulalım. $\nu\to\infty$ durumunda,

$$F\left(\frac{-\sigma_1-m_0+m_3}{2},\frac{-\sigma_1+m_0+m_3}{2};-\sigma_1;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)=1$$

$$F\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2},\frac{\sigma_1-m_0+m_3+2}{2};\sigma_1+2;\frac{1}{cosh^2\nu}\right)=1$$

$\lim\limits_{\nu\to\infty} cosh\,\nu=\infty$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} e^{\nu}=\infty$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} tanh\,\nu=\pm 1$, $\left(\frac{1}{cosh^2\nu}\right)^{\sigma_1+1}\approx e^{-2(\sigma_1+1)\nu}=e^{-2i\rho\nu}$,

$\left(cosh^{\sigma_1}\nu\right)_{\nu\to\infty}\approx e^{\sigma_1\nu}$, $\sigma_1=-1+i\rho$, $\rho\in[0,\infty)$,

asimptot

$$\lim_{\nu\to\infty}T(\nu)=c^{\sigma_1}_{m_0m_3}e^{-\nu}\left[A_1e^{i\rho\nu}+A_2e^{-i\rho\nu}\right]$$

şeklinde bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|T|^2\,dx=\delta(\rho-\rho')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}T(\nu)\overline{T}(\nu)\cosh\nu\,\sinh\;d\nu=\delta(\rho-\rho')$$

$$\left(c_{m_0m_3}^{\sigma_1}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}A_1^2\left[e^{i(\rho-\rho')\nu}+e^{-i(\rho-\rho')\nu}\right]d\nu=\delta(\rho-\rho')$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\rho-\rho')\nu}d\nu=\delta(\rho-\rho')$$

dır. Yerine yazılırsa, çözümdeki sabit

$$\left(c_{m_0m_3}^{\sigma_1}\right)^2=\frac{1}{2\pi A_1^2}\Rightarrow c_{m_0m_3}^{\sigma_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}A_1}$$

olarak bulunmuş olur.

Harish-Chandra $c$-fonksiyonu Harmonik analizde ve temsiller teorisinde önemli rol oynar. Fonksiyonların asimptotik davranışları $c$-fonksiyonuyla verilir. Buradan $c$-fonksiyonunu kabaca söylersek fonksiyonun limiti olarak bakabiliriz. $c$-fonksiyonu integral gösterime de sahiptir. $c$-fonksiyonu integral yolu ile veya bulunan fonksiyonun asimptotu alınarak bulunabilir. Asimptot metodunu ilk defa Harish-Chandra verdi. Bu metotla asimptot alınarak $c$-fonksiyonu bulunur. $c$-fonksiyonunun açık ifadesi $\Gamma$-fonksiyonunun terimleriyle verilir.

Harish-Chandra $c$-fonksiyonunu bulalım. Asimptottaki $e^{i\rho}$ terimlerinin katsayısı olan $A$, $c(\sigma)$-fonksiyonu olarak verilir.

$$c(\sigma_1)=A_1=\frac{\Gamma(m_3+1)\Gamma(\sigma_1+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma_1-m_0+m_3+2}{2}\right)};\quad \sigma_1=-1+i\rho$$

$$c(\sigma_1)=\frac{\Gamma(m_3+1)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{i\rho+m_0+m_3+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\rho-m_0+m_3+1}{2}\right)}\tag{3.15}$$

Son olarak

$$\frac{d^2A}{d\alpha^2}+6\coth 2\alpha\frac{dA}{d\alpha}+\left(\frac{\sigma_1(\sigma_1+2)}{\cosh^2\alpha}+\frac{-l(l+2)}{\sinh^2\alpha}\right)A=\sigma(\sigma+6)A\tag{3.16}$$

denkleminin çözümünü bulalım.

Denklemde $A=\tanh^l\alpha\cosh^\sigma\alpha\,W$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{d^2W}{d\alpha^2}+\left[2\sigma\frac{sinh\alpha}{cosh\alpha}+2l\frac{1}{sinh\alpha cosh\alpha}+3\frac{cosh^2\alpha+sinh^2\alpha}{sinh\alpha cosh\alpha}\right]\frac{dW}{d\alpha}+\left[\sigma+\sigma(\sigma-1)\frac{sinh^2\alpha}{cosh^2\alpha}\right.$$

$$+\sigma l\frac{1}{cosh^2\alpha}+(\sigma-2)l\frac{1}{cosh^2\alpha}+l(l-1)\frac{1}{sinh^2\alpha cosh^2\alpha}+3l\frac{1}{sinh\alpha cosh\alpha}\frac{cosh^2\alpha+sinh^2\alpha}{sinh\alpha cosh\alpha}$$

$$\left.+3\sigma\frac{sinh\,\alpha}{cosh\,\alpha}\frac{cosh^2\alpha+sinh^2\alpha}{sinh\,\alpha\,cosh\,\alpha}+\frac{\sigma_1(\sigma_1+2)}{cosh^2\alpha}-\frac{l(l+2)}{sinh^2\alpha}-\sigma(\sigma+6)\right]W=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $z=tanh^2\alpha$ dönüşümü yapılırsa,

$$z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2}+[(l+2)-(l-\sigma)z]\frac{dW}{dz}-\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2}\right)\left(\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2}\right)W=0$$

$$a=\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2},\ b=\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2},\ c=l+2;\ a+b+1=1-\sigma$$

Hipergeometrik denklemi elde edilir.

Hipergeometrik denklemin $z=0$ civarındaki çözümü,

$$W(z)=F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2},\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2};l+2;z\right)$$

olur. Buradan denklemin $\alpha=0$ daki çözümü,

$$A=d_{\sigma_1 l}^{\sigma}\,tanh^l\alpha cosh^{\sigma}\alpha F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2},\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2};l+2;tanh^2\alpha\right) \qquad (3.17)$$

şeklinde verilir.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\,\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$F\left(-n,-n-\beta;1+\alpha;\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{n!\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{-n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$-n=\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2};n=\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2};\beta=\sigma_1+1;\alpha=l+1;$$

$$x=cosh\,2\alpha;z=\frac{x-1}{x+1}$$

$$F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2},\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2};l+2;tanh^2\alpha\right)=\frac{\left(\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2}\right)!\,\Gamma(l+2)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\sigma_1+l+4}{2}\right)}cosh^{-\sigma+\sigma_1+l}\alpha\,P^{(l+1,\sigma_1+1)}_{\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2}}(cosh2\alpha)$$

olur. Buradan çözümün Jacobi polinomlarıyla ifadesi

$$A = d^{\sigma}_{\sigma_1 l} \frac{\left(\frac{\sigma - \sigma_1 - l}{2}\right)! \, \Gamma(l+2)}{\Gamma\left(\frac{\sigma - \sigma_1 + l + 4}{2}\right)} sinh^l \alpha \, cosh^{\sigma_1} \alpha \, P^{(l+1, \sigma_1 + 1)}_{\frac{\sigma - \sigma_1 - l}{2}}(cosh\, 2\alpha)$$

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_1 - l}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{\sigma - \sigma_1 - l + 2}{2}\right)$$

şeklinde olur.

Şimdi asimptot yoluyla çözümdeki $d^{\sigma}_{\sigma_1 l}$ sabitini belirleyelim. Denklemin çözümü

$$A = d^{\sigma}_{\sigma_1 l} \, tanh^l \alpha \, cosh^{\sigma} \alpha \; F\left(\frac{-\sigma + \sigma_1 + l}{2}, \frac{-\sigma - \sigma_1 + l - 2}{2}; l + 2; tanh^2 \alpha\right)$$

olarak bulunmuştu.

Hipergeometrik fonksiyonun (3.13) analitik devam bağıntısından;

$$a = \frac{-\sigma + \sigma_1 + l}{2},\; b = \frac{-\sigma - \sigma_1 + l - 2}{2},\; c = l + 2\,;$$

$$A_1 = \frac{\Gamma(l+2)\Gamma(\sigma+3)}{\Gamma\left(\frac{\sigma - \sigma_1 + l + 4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma + \sigma_1 + l + 6}{2}\right)};\; A_2 = \frac{\Gamma(l+2)\Gamma(-\sigma-3)}{\Gamma\left(\frac{-\sigma + \sigma_1 + l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\sigma - \sigma_1 + l - 2}{2}\right)}$$

bulunur. $S$ -matris

$$S = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A(\tau)}{A(-\tau)}$$

olarak verilir.

$$F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2}, \frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2}; l+2; tanh^2\alpha\right) = A_1 F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2}, \frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2}; -\sigma-2; \frac{1}{cosh^2\alpha}\right)$$
$$+ A_2 \left(\frac{1}{cosh^2 \alpha}\right)^{\sigma+3} F\left(\frac{\sigma - \sigma_1 + l + 4}{2}, \frac{\sigma + \sigma_1 + l + 6}{2}; \sigma + 4; \frac{1}{cosh^2 \alpha}\right)$$

Bu, çözümde yerine yazılırsa;

$$A = d^{\sigma}_{\sigma_1 l} \, tanh^l \alpha \, cosh^{\sigma} \alpha \left\{ A_1 F\left(\frac{-\sigma + \sigma_1 + l}{2}, \frac{-\sigma - \sigma_1 + l - 2}{2}; -\sigma - 2; \frac{1}{cosh^2 \alpha}\right)\right.$$
$$\left. + A_2 \left(\frac{1}{cosh^2 \alpha}\right)^{\sigma+3} F\left(\frac{\sigma - \sigma_1 + l + 4}{2}, \frac{\sigma + \sigma_1 + l + 6}{2}; \sigma + 4; \frac{1}{cosh^2 \alpha}\right)\right\} \qquad (3.19)$$

olarak bulunur. Bu çözümün $\alpha \to \infty$ a gitmesi halinde limitini bulalım. $\alpha \to \infty$ durumunda,

$$F\left(\frac{-\sigma+\sigma_1+l}{2},\frac{-\sigma-\sigma_1+l-2}{2};-\sigma-2;\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)=1 \ ,$$

$$F\left(\frac{\sigma-\sigma_1+l+4}{2},\frac{\sigma+\sigma_1+l+6}{2};\sigma+4;\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)=1 \ ,$$

$$\left(\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\sigma+3}=\cosh^{-2(\tau+3)}\alpha \approx e^{-2i\tau\alpha},\ \sigma=-3+i\tau,\ \tau\in[0,\infty),$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\tanh^l\alpha=\pm 1,\left(\cosh^{\sigma}\alpha\right)_{\alpha\to\infty}\approx e^{\sigma\alpha}=e^{(-3+i\tau)\alpha} \ ,$$

asimptot

$$\lim_{\alpha\to\infty}A(\alpha)=d^{\sigma}_{\sigma_1 l}e^{-3\alpha}\left[A_1e^{i\tau\alpha}+A_2e^{-i\tau\alpha}\right]$$

şeklinde bulunur.

$$\left(d^{\sigma}_{\sigma_1 l}\right)^2\left|A_1\right|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\tau-\tau')\alpha}d\alpha=\delta(\tau-\tau')$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\tau-\tau')\nu}d\nu=\delta(\tau-\tau')$$

Yerine yazılırsa çözümdeki sabit

$$\left(d^{\sigma}_{\sigma_1 l}\right)^2=\frac{1}{2\pi\left|A_1\right|^2}\Rightarrow d^{\sigma}_{\sigma_1 l}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}A_1}$$

olarak bulunur.

Harish-Chandra $c$-fonksiyonu

$$c(\sigma)=A_1=\frac{\Gamma(l+2)\Gamma(\sigma+3)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\sigma_1+l+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma+\sigma_1+l+6}{2}\right)} \quad ; \quad \sigma=-3+i\tau$$

$$c(\sigma)=\frac{\Gamma(l+2)\Gamma(i\tau)}{\Gamma\left(\frac{i\tau-\sigma_1+l+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\tau+\sigma_1+l+3}{2}\right)} \tag{3.20}$$

olarak verilir.

Buraya kadar Laplace-Beltrami operatörünün değişkenlerine ayrılması sonucu ortaya çıkan üç adet denklemin çözümleri bulundu. Bunu yapmakla aslında

$\Delta_{LB}F(\alpha,\nu,\theta,\varphi_j)=\sigma(\sigma+6)F(\alpha,\nu,\theta,\varphi_j),\quad j=0,1,2,3$ denkleminin çözümü bulunmuş olur. Buradan çözüm,

$$F(\alpha,\nu,\theta,\varphi_j)=b^{l}_{m_1m_2}c^{\sigma_1}_{m_0m_3}d^{\sigma}_{\sigma_1 l}\frac{\left(\frac{l+m_1-m_2}{2}\right)!\,\Gamma(m_2+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m_1+m_2+2}{2}\right)}\frac{\left(\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}\right)!\,\Gamma(m_3+1)}{\Gamma\left(\frac{\sigma_1+m_0+m_3+2}{2}\right)}\frac{\left(\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2}\right)!\,\Gamma(l+2)}{\Gamma\left(\frac{\sigma-\sigma_1+l+4}{2}\right)}$$

$$\times\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\sinh^{m_3}\nu\cosh^{-m_0}\nu\sinh^{l}\alpha\cosh^{\sigma_1}\alpha$$

$$\times P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)\,P^{(m_3,-m_0)}_{\frac{\sigma_1+m_0-m_3}{2}}(\cosh 2\nu)\,P^{(l+1,\sigma_1+1)}_{\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2}}(\cosh 2\alpha)$$

şeklinde olur. Böylece gruba karşılık gelen simetrik yüzeyde hareket eden serbest parçacığın hareketini belirleyen düzlem dalga bulunmuş olur. Schrödinger denkleminin çözümleri olan dalga fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir:

$$\Psi(\alpha)=d^{\sigma}_{\sigma_1 l}\frac{\Gamma(\frac{\sigma-\sigma_1-l+2}{2})\Gamma(l+2)}{\Gamma(\frac{\sigma-\sigma_1+l+4}{2})}\sinh^{l+3/2}\alpha\cosh^{\sigma_1+3/2}\alpha\;P^{(l+1,\sigma_1+1)}_{\frac{\sigma-\sigma_1-l}{2}}(\cosh 2\alpha)$$

$$\Psi(\nu)=c^{\sigma_1}_{m_o m_3}\frac{\Gamma(\frac{\sigma_1+m_o-m_3+2}{2})\Gamma(m_3+1)}{\Gamma(\frac{\sigma_1+m_o+m_3+2}{2})}\sinh^{m_3+1/2}\nu\cosh^{-m_o+1/2}\nu\;P^{(m_3,-m_o)}_{\frac{\sigma_1+m_o-m_3}{2}}(\cosh 2\nu)$$

$$\Psi(\theta)=b^{l}_{m_1m_2}\frac{\Gamma(\frac{l+m_1-m_2+2}{2})\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(\frac{l+m_1+m_2+2}{2})}\sin^{m_2}\theta\cos^{-m_1}\theta\sin^{1/2}2\theta\;P^{(m_2,-m_1)}_{\frac{l+m_1-m_2}{2}}(\cos 2\theta)$$

**KAYNAKLAR**


1. ***Y.A. Verdiyev***, Plane waves, integrable quantum systems and the group $SO(p,q), p \leq q$ . J. Phys. A: Math. Gen. 30(1997), 4089-4107.
2. ***M.A. Olshanetsky*** and ***A.M. Perelomov***, Quantum integrable systems related to Lie algebra, Phys. Rep. 94(1983), 31.
3. ***Y.A. Verdiyev***, Quantum integrable systems related with symmetric spaces of the groups $U(1,2)$ and $Sp(1,2)$ and Green's functions on these spaces, J. Math. Phys. 36(7) (1995), 3320-3331.
4. ***I.M. Gelfand, M.I. Graev*** and ***N.Ya. Vilenkin,*** Integral Geometry and Connection with its Problems of the Representations Theory(Generalized Functions 5), Moscow, 1962.
5. ***Y.A. Verdiyev***, Harmonic Analysis on Homogenous Spaces of $SO(1,2)$,
Hadronic press, Nonantum, Massachusetts, 1988, U.S.A.
6. ***M. Sezgin*** and ***Y.A. Verdiyev***, Quantum integrable systems of the groups $SU(2)$ and $SU(1,1)$, Hadronic Journal 22,(1999), 13-28.
7. ***M. Sezgin; A.Y. Verdiyev; Y.A. Verdiyev***, Various decomposition of the group $SL(2,R)$ and quantum integrable systems, Hadronic Journal 22 (1999), 135-144.
8. ***N. Ya. Vilenkin***, Special Functions And Theory Of Group Representation, American Mathematical Society, providence, RI. 1968.
9. ***Y.A. Verdiyev***, Plane waves, integrable quantum systems and the group $U(p,q), p \leq q$ . J. Phys. A: Math. Gen. 30(1997), 4109-4116.
10. ***I.S. Shapiro***, Unitary representation of the Lorentz group, Dokl. Akad. SSSR 106(1956), 647.
11. ***N.Ya. Vilenkin*** and ***A.U. Klimyk***, Representation of Lie Groups and Special Functions, vol. I-II, Kluwer Academic Publ., London, 1991.
12. ***H. Bateman***, Bateman Manuscript, edited by A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions, , Mc-Graw-Hill, New York, 1953, vol I,II.
13. ***S. Helgason***, Groups and Geometric Analysis, Academic Pres Inc. 1984.
14. ***F.A. Berezin*** and ***I.M. Gelfand ,*** Some Remarks about the theory of spherical functions on a symmetric space.Proc.Mosc.Math.Soc.,5(1956).
15. ***S. Gasiorowicz***, Quantum Physics, John Wiley. & Sons, Inc. 1974.

16. ***I.M. Gelfand ,*** Spherical functions on symmetric Riemann spaces ,Dok 1.Akad. Nauk SSSR 70 (1950),(5-8) (in Russian).
17. ***Harish-Chandra ,*** Spherical functions on a semisimple Lie group I, II, Amer. J. Math. 80 (1958),241-310.
18. ***Karpelevich ,***Geometry of geodesics and eigenfunctions of the Laplace Beltrami operator, Proc.Moscow Math.Soc. 17(1965) ,48-86 (in Russian).
19. ***A.O. Barut*** and ***R. Raczka***, Theory Of Group Representation and Applications, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980.
20. ***D.J. Griffiths***, Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, Inc. 1994.
21. ***I.S. Gradsteyn*** and ***I.M. Rhyzik,*** Tables of Integrals Series and Products, Academic, New York, 1969.

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler:**

| | | |
|---|---|---|
| **Adı** | **:** | Martı Zehra |
| **Soyadı** | **:** | Özer |
| **Baba Adı** | **:** | Vacip |
| **Doğum Yeri** | **:** | Tekirdağ |
| **Doğum Tarihi** | **:** | 06.09.1979 |
| **Uyruğu** | **:** | T.C. |
| **Medeni Hali** | **:** | Bekar |

**Eğitim Durumu:**

**Lise Eğitimi** **:** Tekirdağ Tuğlacılar Lisesi Fen-Matematik Bölümü'nü 1996 Yılında Bitirdim.

**Yüksek Öğrenim** **:** 2001 Yılında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi "Matematik" Bölümünü Bitirdim.

**Yabancı Dil** **:** İngilizce

**İş Durumu** **:** Lalapaşa Atatürk İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmenliği Yapmaktayım.