154273

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRMELER VE DEĞERLENDİRMELERİN GENİŞLEMELERİ

BURCU KILIÇ
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
ANABİLİM DALI
2004
EDİRNE
TEZ YÖNETİCİSİ: Yrd.Doç.Dr. FİGEN ÖKE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞERLENDİRMELER VE DEĞERLENDİRMELERİN GENİŞLEMELERİ

BURCU KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

TEZ YÖNETİCİSİ: Yrd.Doç.Dr. FİGEN ÖKE

2004
EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞRELENDİRMELER VE DEĞERLENDİRMELERİN GENİŞLEMELERİ

BURCU KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ ANABİLİM DALI

Bu tez 11.10.2004 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

(İmza)	(imza)	(imza)
Prof. Dr. Hülya İŞCAN	Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK	Yrd. Doç. Dr. Figen ÖKE
		Danışman

İÇİNDEKİLER

ÖZET...

SUMMARY...

ÖNSÖZ..v

GÖSTERİMLER...vi

GİRİŞ...

I. BÖLÜM / ÖN BİLGİLER...

II. BÖLÜM / TAME GENİŞLEMELERİ VE SABİTLER..................................14

III. BÖLÜM / TAME GENİŞLEMELERİ VE SABİTLERİ KARŞILAŞTIRILMASI...57

KAYNAKLAR...6

İNDEKS..6

ÖZGEÇMİŞ..6

ÖZET

I. Bölümde konuyla ilgili gerekli ön bilgiler verilmiştir.

II. Bölümde tame genişlemelerine ait teorilere yer verilmiştir. Ardından değerlendirmelerin genişlemeleri konusunda karşılaşılan sabitlerin tanımları verilmiş ve bu sabitlerin farklı durumlardaki kıyaslanması yapılmıştır. Tame genişlemeleri ile bu sabitler arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bu sabitlerin kullanıldığı konulardan; cisimlerin sıralanması, minimal çiftlerin belirlenmesi, Henselian hatanın bulunması ve değer grubu ile rezidü cisminin belirlenmesi konuları irdelenmiştir. Bu bölümün hazırlanması için bu konu ile ilgili literatürde bulunan hemen hemen tüm çalışmalar incelenmiştir.

III. Bölümde önceki bölümlerdeki bilgilerden yaralanılarak tame genişlemeleri ve sabitler ile ilgili bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

SUMMARY

In Chapter I pertinent background material and definitions are given.

In Chapter II the theories about tame extensions are considered. Then the definitions of constants which occur in subject of extensions of valuations are given and those constants are compared in different cases. The relation between tame extensions and those constants is investigated. Moreover comparing fields, obtaining minimal pairs, finding Henselian defect, obtaining the value group and residue field which are the main usage subjects for those constants are studied. For preparing this chapter, almost all studies about this subject are researched.

In Chapter III by using knowledge which is in the previous chapters, some original results are obtained about tame extensions and constants.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince çok yakın ilgi göstererek hiçbir yardımı esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Figen Öke'ye en derin saygı ve en içten teşekkürlerimi sunarım.

Burcu KILIÇ

GÖSTERİMLER

$\overline{K}$	: K cisminin cebirsel kapanışı
K_{ayr}	: K cisminin ayrılabilir kapanışı
v	: değerlendirme
$\overline{v}$	: v nin $\overline{K}$ ye genişlemesi
$rank\, v$	: v nin rankı
G_v	: v nin değer grubu
V_v	: v nin değerlendirme halkası
P_v	: v nin değerlendirme halkasının maksimal ideali
U_v	: v nin değerlendirme halkasının birim grubu
k_v	: v nin rezidü cismi
x^*	: x in rezidüsü (değerlendirme halkasında bulunan x in $\varphi : V_v \to (V_v / P_v) = k_v$ kanonik homomorfizma altındaki görüntüsü)
K'/K	: K cisminin K' cismine genişlemesi
v'/v	: v nin v' genişlemesi
e	: dallanma indeksi
f	: rezidü derecesi
$\alpha\ ceb/K$	: α, K cismi üzerinde cebirsel eleman
$\alpha\ ayr/K$	: α, K cismi üzerinde ayrılabilir eleman
$\alpha\ trans/K$	: α , K cismi üzerinde transandant eleman
D_h	: Henselian hata
$def\,(v'/v)$	: v' nün v üzerindeki hatası
$Tr_{K'/K}(\alpha)$	: α nın trace'i
$N_{K'/K}(\alpha)$	: α nın normu
$w_K(\alpha)$	: Krasner Sabiti
$\Delta_K(\alpha)$	: $\Delta_K(\alpha) = \min\{\overline{v}(\alpha - \alpha') \mid \alpha'\ \alpha$ nın K-eşleniği$\}$
$M(\alpha, K)$	: $M(\alpha,K) = \{\overline{v}(\alpha - \beta) \mid \beta \in \overline{K}, [K(\beta):K] < [K(\beta):K]\}$
$\delta_K(\alpha)$	: $\delta_K(\alpha) = \sup M(\alpha, K)$
$E(w/v)$	: $E(w/v) = \min\{[K(x):K(t)] \mid t \in K(x),\ w(t) = 0,\ t^*\, trans/k_v\}$
$I(w/v)$	: $I(w/v) = [G_w : G_v]$
$R(w/v)$	: $R(w/v) = [k_{v'} : k_v]$, $k_{v'}$ k_v nin k_w içindeki cebirsel kapanışı

GİRİŞ

Değerlendirme teorisi cebirsel fonksiyonlar ve cebirsel sayılar arasındaki ilişkinin sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Dedekind ve Weber'in cebirsel fonksiyonlar teorisine aritmetik yaklaşımları Riemann yüzeyinin bir noktasında kuvvet serisi açılımlarının elde edilmesi problemini ortaya koymuştur. Bu şekildeki bir yaklaşımı p-adik sayılar teorisinde ele alan Hensel bunun cebirsel fonksiyonlar teorisinde sıkça ortaya çıkan kongruens sistemlerini açıklamakta yardımcı olacağını göstermiştir. Ayrıca 1908 yılında yayımladığı "Theorie der Algebraischen Zahlen" adlı kitabında değerlendirme teorisi alanındaki çalışmalara taban oluşturan ve polinomların asal olup olmadıklarının belirlenmesi konusunda bir kriter olan indirgenebilirlik lemmasına yer vermiştir. 1900'lü yıllarda değerlendirme teorisinin kullanılmasıyla birlikte cebirsel sayılar teorisinin daha iyi anlaşılması üzerine değerlendirme teorisinde hızlı bir gelişme olmuştur. Bu gelişimde göze çarpan en önemli kişiler Ostrowski, Chevalley ve Krull'dur.

K cismi üzerinde bir v değerlendirmesi tanımlanmış ise K cisminin bir K' cebirsel genişlemesi ve v nin K' cismine bir v' genişlemesi ele alındığında K' cisminin bir α elemanı için $G_{v'}$ değer grubunda bazı sabitler tanımlanmıştır. v' değerlendirmesinin rezidü cismi ve değer grubunun belirlenmesinde kullanıldığı için bu sabitler önemlidir. Bu sabitler arasında özellikle Krasner sabitinin özel bir yeri vardır. Bu sabitlerle ilgili çalışmalar Krasner ile başlamış, James Ax ile devam etmiştir. Khanduja da bu konudaki çalışmaları günümüze kadar getirmiştir.

Bir K cisminin v değerlendirmesinin $K(x_1,...,x_n)$ cismine genişlemelerinin elde edilmesi çok eski ve önemli bir problemdir. Bunun için öncelikle v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemelerinin belirlenmesi hedeflenmiştir. $K(x)$, K nın bir transandant genişlemesi ise v nin $K(x)$ cismine genişlemeleri de yine K cisminin cebirsel genişlemeleri yardımıyla elde edilmektedir. Dolayısıyla v değerlendirmesinin $K(x_1,...,x_n)$ e tüm genişlemeleri de yine K nın cebirsel genişlemeleri yardımıyla elde edilecektir. Bir K cisminin $K(x)$ cismine rezidül transandant genişlemeleri ilk olarak Nagata tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmaların yardımıyla Alexandru, Popescu, Zaharescu ve Khanduja tarafından bir K cisminin genişlemeleri tanımlayan minimal çiftler belirlenmiştir. Rezidül transandant genişlemeler bir cebirsel genişleme yardımıyla tanımlanabildiğinden en uygun cebirsel genişlemenin elde edilmesi için minimal çiftlerin belirlenmesi gereklidir. Minimal çiftin belirlenmesi de K cisminin cebirsel genişlemelerinin kıyaslanması ile mümkündür. Burada sözü edilen sabitler değerlendirilmiş cisimlerin kıyaslanmalarında kullanılan teorilerin ifade ve kanıtlarında da önemli bir yere sahiptir.

Yine bu sabitler kullanılarak cebirsel genişlemeler için Henselian hata; transandant genişlemeler için tanımlanan Henselian hata yardımıyla elde edilebilir. Dolayısıyla ikinci bölümde öncelikle bu sabitlerin irdelenmesi amaçlanmıştır.

Üzerinde bir v değerlenmesi tanımlanan K cisminin cebirsel genişlemeleri sağladıkları özelliklere göre adlandırılır. Bunlardan en önemlisi tame genişlemesi olarak adlandırılan genişleme tipidir. Bu genişlemeler hatasızdır ve yukarıdaki sabitler yardımıyla rezidü cisimleri ve değer grupları hakkında yorum yapmak mümkündür. Bu yüzden bu bölümde tame genişlemeleri ayrıca irdelenmiştir.

Son bölümde de I. ve II. Bölümlerdeki çalışmalardan yararlanılarak değerlendirilmiş bir K cisminin K' genişlemesinin tame genişlemesi olabilmesi için literatürde rastlanmayan gerekli ve yeterli yeni koşullar elde edilmiştir. Ayrıca sabitlerin kıyaslanmalarıyla ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1.Tanım: G çarpımsal (veya toplamsal) değişmeli bir grup , < (veya >) G üzerinde bir sıra bağıntısı olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in G$ için

i) $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ ise $\alpha < \gamma$ (veya $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ ise $\alpha > \gamma$)

ii) $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$ (veya $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta > \alpha$) dan yalnız biri sağlanır,

iii) $\alpha < \beta$, $\delta \in G$ ise $\alpha\delta < \beta\delta$ (veya $\alpha > \beta$, $\delta \in G$ ise $\alpha + \delta > \beta + \delta$)

koşulları gerçekleniyorsa G grubuna üzerindeki < (veya >) bağıntısı ile sıralı bir grup denir.

1.2.Tanım: K bir cisim , G çarpımsal (veya toplamsal) sıralı bir grup olsun.

$v: K \to G \cup \{0\}$ (veya $v: K \to G \cup \{\infty\}$)

biçiminde tanımlanan dönüşüm her $a, b \in K$ için

i) $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (veya $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$)

ii) $v(a.b) = v(a)v(b)$ (veya $v(a.b) = v(a) + v(b)$)

iii) $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ (veya $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$)

koşulları gerçekleniyorsa v dönüşümüne K cismi üzerinde bir değerlendirme adı verilir.

1.3.Tanım: 1.2. Tanımı'ndaki G sıralı grubuna v değerlendirmesinin değer grubu denir.

1.4.Tanım: K bir cisim olsun. $v: K \to IR^{+}$ dönüşümü her $a, b \in K$ için

i) $v(a) \geq 0$, $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

ii) $v(ab) = v(a)v(b)$

iii) $v(a+b) = v(a) + v(b)$

koşulları gerçekleniyorsa v dönüşümü K cisminin rankı 1 olan değerlendirmesi veya K cisminin mutlak değeri olarak adlandırılır.

1.5.Tanım: K bir cisim , v K cismi üzerinde bir değerlendirme olsun. Her $a \in K^{*}$ için $v(a) = 1$ (veya $v(a) = 0$) oluyorsa v ye K cisminin aşikar değerlendirmesi denir.

<u>1.6.Önerme:</u> K bir cisim , v K cismi üzeride değer grubu çarpımsal (veya toplamsal) olan bir değerlendirme olsun. Aşağıdaki ifadelerin gerçeklendiği v değerlendirmesinin tanımından kolayca görülür.

i) $v(-1)=1$ (veya $v(-1)=0$)

ii) $a,b\in K$, $v(a)\neq v(b)$ ise

$v(a+b)=\max\{v(a),v(b)\}$ dir, (veya $v(a+b)=\min\{v(a),v(b)\}$ dir)

iii) $1\leq i\leq n$ için $a_i\in K$ ise

$v(\sum_{i=1}^{n}a_i)\leq \max_i(v(a_i))$ dir, (veya $v(\sum_{i=1}^{n}a_i)\geq \min_i\{v(a_i)\}$ dir)

iv) $1\leq i\leq n$ için $a_i\in K$ ve $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ ise en az bir $i\neq j$ için $v(a_i)=v(a_j)$ dir.

<u>1.7.Tanım:</u> K ve F iki cisim ve F cismi cebirsel kapalı olsun.

$$\varphi : K\to F\cup\{\infty\}$$

dönüşümü

i) $\varphi^{-1}(F)=V$ bir halkadır,

ii) φ nin V halkasına kısıtlanışı $\varphi|_V$ aşikar olmayan bir homomorfizmadır,

iii) $a\in K$ için $\varphi(a)=\infty$ ise $\varphi(a^{-1})=0$

koşulları gerçekleniyorsa φ dönüşümüne K cisminin bir <u>place'i</u> adı verilir.

<u>1.8.Tanım:</u> K bir cisim , V K cisminin bir alt halkası olsun. $a\in K^*$ iken $a\in V$ veya $a^{-1}\in V$ oluyorsa V halkasına K cisminin bir <u>değerlendirme halkası</u> denir.

<u>1.9.Tanım:</u> K bir cisim ; V, K cisminin bir değerlendirme halkası olsun. $P=\{a\in V \mid a^{-1}\notin V\}$ kümesi V değerlendirme halkasının tek <u>maksimal idealidir</u>.

<u>1.10.Tanım:</u> K bir cisim , V K cisminin bir değerlendirme halkası olsun. $U=\{a\in V \mid a^{-1}\in V\}$ kümesi bir gruptur ve bu kümeye V değerlendirme halkasının <u>birim grubu</u> adı verilir.

1.11. Önerme: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi ve G v nin değer grubu olsun. G çarpımsal bir grup ise

$$V=\{a\in K \mid v(a)\leq 1\},\ P=\{a\in K \mid v(a)<1\},\ U=\{a\in K \mid v(a)=1\}$$

ve Γ toplamsal bir grup ise

$$V=\{a\in K \mid v(a)\geq 0\},\ P=\{a\in K \mid v(a)>0\},\ U=\{a\in K \mid v(a)=0\}$$

biçimindedir.

1.12. Tanım: K bir cisim , v K cismi üzerinde bir değerlendirme , V v nin değerlendirme halkası ; P , V nin tek maksimal ideali ise V/P kümesi bir cisimdir ve bu cisme v değerlendirmesinin rezidü cismi adı verilir.

1.13. Teorem: K bir cisim olsun. K cismi üzerindeki değerlendirmeleri değerlendirme halkaları ve place'leri arasında bire-bir bir eşleme vardır. (Bachman 1964)

1.14. .Teorem: K bir cisim , A K cisminin bir alt halkası , F cebirsel kapalı bir cisim ve $f: A \to F$ aşikar olmayan bir homomorfizma olsun. K cisminin $\phi|_A = f$ olacak biçimde bir φ place'i vardır. (Bachman 1964)

1.15. Tanım: A tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bir bölge ve K A nın kesir cismi olsun. $\mu \in A$ birimsel eleman ve p ler A nın asal elemanları olmak üzere herhangi bir $x \in A$ elemanı

$$x = \mu \prod_p p^{\alpha}$$

olarak yazılır. $c \in IR$, $0<c<1$ olmak üzere

$$v_p(x) = c^{\alpha} \quad (\text{veya } v_p(x) = \alpha)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm değerlendirme tanımındaki koşulları gerçekler. Bu dönüşüm A nın kesir cismi olan K ya tek şekilde genişletilir. Bu değerlendirmeye K cisminin p-adik değerlendirmesi adı verilir.

1.16. Tanım: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesi K cismi üzerinde bir Hausdorff topolojisi tanımlar. Her $a \in K$ için a nın komşuluklarının temel sistemi $\mu > 0$ olmak üzere tüm

$$U(a,\mu) = \{b \in K \mid v(a-b) < \mu\}$$

kümeleri ile verilir.

1.17. Teorem: K bir cisim , v_1 ve v_2 K cisminin aşikar olmayan iki değerlendirmesi , T_{v_1} ve T_{v_2} K cismi üzerinde sırasıyla v_1 ve v_2 değerlendirmeleriyle belirlenen topolojiler ve $a \in K$ olsun.

i) $v_2 = v_1^{\alpha}$, $\alpha > 0$

ii) $T_{v_1} = T_{v_2}$

iii) T_{v_1} T_{v_2} den daha incedir.

iv) $v_1(a) < 1 \Rightarrow v_2(a) < 1$

v) $v_1(a) \leq 1 \Rightarrow v_2(a) \leq 1$

vi) $v_1(a) > 1 \Rightarrow v_2(a) > 1$

$v_1(a) \geq 1 \Rightarrow v_2(a) \geq 1$

$v_1(a) = 1 \Rightarrow v_2(a) = 1$

ifadeleri denktir. (Weiss 1963)

1.18. Tanım: G sıralı bir grup, H G grubunun bir alt grubu olsun. $a \in G$ olmak üzere $b \in H$ ve $b^{-1} \leq a \leq b$ iken $a \in H$ oluyorsa H alt grubuna G grubunun bir isolated alt grubudur denir.

1.19. Tanım: G sıralı bir grup olsun. G grubunun kendisinden farklı tüm isolated alt gruplarının sayısına G sıralı grubunun rankı adı verilir.

1.20. Tanım: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi , G v nin değer grubu olsun. v değerlendirmesinin rankı G sıralı grubunun rankıdır.

1.21. Tanım: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K cisminde alınan her Cauchy dizisi v değerlendirmesine göre K cisminin bir elemanına yakınsıyorsa K cismi v değerlendirmesine göre tamdır denir.

1.22. Teorem: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. $\widetilde{K}$ cismi v değerlendirmesiyle tam ve K cismi $\widetilde{K}$ cismi içinde yoğun olacak şekilde bir $\widetilde{K}$ cismi vardır. Bu $\widetilde{K}$ cismine K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı adı verilir.

1.23. Teorem: K bir cisim v K cisminin bir değerlendirmesi ve $\widetilde{K}$, K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı ise $char\,\widetilde{K} = char K$ ve $\widetilde{v}(\widetilde{K}) = v(K)$ dır. (Bachman 1964)

1.24. Tanım: K ve L iki cisim olsun. $\alpha \in L$ için $L = K(\alpha)$ biçiminde yazılıyorsa L cismine K cisminin bir basit genişlemesi denir.

1.25. Tanım: L K cisminin bir genişlemesi ve $\alpha \in L$ olsun. $f(\alpha)=0$ olacak şekilde en az bir $f(x) \in K[x], f(x) \neq 0$ polinomu varsa $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde cebirseldir denir ve $\alpha\ ceb / K$ ile gösterilir.

1.26. Tanım: L K cisminin bir genişlemesi olsun. Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde cebirsel ise L K cisminin bir cebirsel genişlemesidir denir.

1.27. Tanım: L, K cisminin bir genişlemesi olsun. $\overline{K} = \{a \in L \mid a\, ceb / K\}$ cismine K cisminin L cismi içindeki cebirsel kapanışı adı verilir.

1.28. Tanım: L K cisminin bir genişlemesi, $\alpha \in L$ olsun. α K cismi üzerindeki minimal polinomunun bir basit kökü ise $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilirdir denir ve $\alpha\ ayr / K$ ile gösterilir.

1.29.Tanım: : L K cisminin bir genişlemesi olsun. Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir ise L K cisminin bir ayrılabilir genişlemesidir denir.

1.30 Tanım: L, K cisminin bir genişlemesi olsun. $K_{ayr} = \{a \in L \mid a\, ayr / K\}$ cismine K cisminin L cismi içindeki ayrılabilir kapanışı adı verilir.

1.31. Tanım: K cisminin tüm genişlemeleri ayrılabilir ise K cismine mükemmel cisim denir.

1.32. Tanım: L K cisminin bir genişlemesi, $\alpha \in L$ olsun. α elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $L[x]$ içinde doğrusal çarpanlarına ayrılabiliyorsa $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde normaldir denir.

1.33. Tanım: L K cisminin bir genişlemesi olsun. Her $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde normal ise L K cisminin bir normal genişlemesidir denir.

1.34. Tanım: L K cisminin normal ve ayrılabilir bir genişlemesi ise L cismine K cisminin bir Galois genişlemesi denir.

1.35. Tanım: L K cisminin bir Galois genişlemesi olsun. L nin K cismini sabit bırakan otomorfizmalarının kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba L nin K cismi üzerindeki Galois grubu denir.

1.36. Tanım: L, K cisminin sonlu bir genişlemesi, $a \in L$ ve $p(x) = Irr(a, K)$ olsun. Eğer $p(x) = (x-a)^m$, $m > 1$ ise a elemanına K cismi üzerinde tamamıyla ayrılamaz denir. L, K cisminin bir genişlemesi olsun. Her $a \in L$ elemanı K cismi üzerinde tamamıyla ayrılamaz ise L, K cisminin tamamıyla ayrılamaz genişlemesidir denir. $[K_{ayr}:K]$ derecesine L cisminin K cismi üzerindeki ayrılabilirlik derecesi, $[F:K_{ayr}]$ derecesine ise L cisminin K cismi üzerindeki ayrılamazlık derecesi denir.

1.37. Tanım: K F cisminin sonlu bir genişlemesi , F nin K cismi içindeki ayrılabilirlik derecesi n , ayrılamazlık derecesi $[K:F]_i$ olsun. $\sigma_1,.......,\sigma_n$ K nın F-otomorfizmaları olmak üzere $a \in K$ elemanının F üzerindeki normu

$$N_{K/F}(a)=\left[\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(a)\right]^{[K:F]_i}$$

ve trace'i

$$T_{K/F}(a)=[K:F]_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(a)$$

biçiminde tanımlanır.

1.38. Teorem: K bir cisim , v K cisminin bir değerlendirmesi ve L K cisminin bir genişlemesi olsun. Bu durumda v değerlendirmesi L cismine genişletilebilir. (Bachman 1964)

1.39 Teorem: L K cisminin bir genişlemesi, v K cisminin bir değerlendirmesi, v_L v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. V_v v değerlendirmesinin değerlendirme halkası , P_v V_v nin maksimal ideali, U_v V_v nin birim grubu, V_{v_L} v_L değerlendirmesinin değerlendirme halkası, P_{v_L} V_{v_L} nin maksimal ideali ve U_{v_L} V_{v_L} nin birim grubu ise

$$V_v = K \cap V_{v_L} \quad , \; P_v = K \cap P_{v_L} \quad , \; U_v = K \cap U_{v_L}$$

şeklindedir.

1.40. Tanım:, K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. L K cisminin bir genişlemesi ve v_L v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. v ve v_L değerlendirmelerinin sırasıyla değer grupları G_v ve G_{v_L}, rezidü cisimleri k_v ve k_{v_L} ise $e=e(v_L/v)=[G_{v_L}:G_v]$ indeksi dallanma indeksi, $f=f(v_L/v)=[k_{v_L}:k_v]$ derecesi rezidü derecesi olarak adlandırılır. Eğer $e(v_L/v)=1$ ise v_L değerlendirmesine v üzerinde dallanmamıştır denir.

1.41. Teorem: L K cisminin n. dereceden bir genişlemesi, v K cisminin bir değerlendirmesi, v_L v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. e dallanma indeksi, f rezidü derecesi olmak üzere $e\,f \leq n$ dir. (Bachman, 1964)

1.42.Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. v değerlendirmesinin değer grubu sonsuz devirli bir grup ise v ye ayrık değerlendirme denir.

1.43 Teorem: K bir cisim, v K cisminin ayrık bir değerlendirmesi olsun. K cismi v değerlendirmesine göre tam ise ve L K cisminin n. dereceden bir genişlemesi ise $e\,f = n$ dir. (Bachman, 1964)

1.44. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K cisminin her bir L cebirsel genişlemesi için v değerlendirmesinin L cismine bir tek genişlemesi varsa v ye Henselian değerlendirme denir.

1.45. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. L K cisminin v değerlendirmesinin tek şekilde genişletilebildiği en küçük cisim ise L cismine K cisminin Henselizasyonu denir.

1.46. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, L K cisminin cebirsel bir genişlemesi ve v_L, v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. e ve f sırasıyla dallanma indeksi ve rezidü derecesi olsun. L cisminin Henselizasyonu $(L)^h$ ve K cisminin Henselizasyonu $(K)^h$ olmak üzere L/K genişlemesinin Henselian hatası $[(L)^h:(K)^h]/ef$ ile tanımlanır, $def((L,v_L)/(K,v_K))$ veya $def(L/K)$ ile gösterilir. Eğer $def(L/K)=1$ ise genişleme hatasızdır denir.

1.47. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, L K cisminin bir genişlemesi ve v_L v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. Eğer v değerlendirmesi ile v_L değerlendirmesinin değer grupları ve rezidü cisimleri aynı ise v_L v değerlendirmesinin immediate genişlemesidir denir.

1.48. Tanım: K bir cisim, v K cisminin henselian bir değerlendirmesi, L K cisminin bir genişlemesi ve v_L, v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. e ve f sırasıyla dallanma indeksi ve rezidü derecesi olmak üzere

i) $[L:K]=ef$

ii) k_{v_L}, k_v cisminin ayrılabilir bir genişlemesidir.

iii) $char k_v \nmid e$

koşulları sağlanıyorsa L/K genişlemesine Tame genişlemesi denir.

1.49. Tanım: K bir cisim, v K cisminin henselian bir değerlendirmesi, L K cisminin bir genişlemesi ve v_L, v değerlendirmesinin L cismine bir genişlemesi olsun. e dallanma indeksi $char k_v = p$ nin bir kuvveti ve k_{v_L}/k_v tamamıyla ayrılamaz bir genişleme ise L/K genişlemesine tamamıyla wild genişleme denir.

1.50. Tanım: L, K cisminin bir genişlemesi olsun. $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde cebirsel değilse α elemanı K cismi üzerinde transandanttır denir ve $\alpha \; trans/K$ ile gösterilir. En az bir $\alpha \in L$ elemanı K cismi üzerinde transandant oluyorsa L K cisminin transandant bir genişlemesidir.

1.51. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. $K(x)$ K cisminin basit transandant bir genişlemesi, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemesi w, değer grubu G_w, rezidü cismi k_w olmak üzere k_w/k_v genişlemesi de transandant genişleme ise w değerlendirmesine v değerlendirmesinin bir rezidül transandant genişlemesi denir.

ξ w nın değerlendirme halkasının bir elemanı, ξ nin w-rezidüsü ξ^* ve $\xi^* \; trans/k_v$ ve w değerlendirmesinin $K(\xi)$ cismine kısıtlanışı v_ξ olsun. $(K(x),w)/(K(\xi),v_\xi)$ sonlu genişlemesinin Henselian hatası D_h olmak üzere E, I ve R

$$E = \min\{[K(x):K(t)] \mid t \in K(x), w(t)=0, t^* \; trans/k_v\}$$

$$I = [G_w : G_v]$$

$$R = [k_{v'} : k_v] \quad (k_{v'} : k_v \text{ nin } k_w \text{ içindeki cebirsel kapanışı})$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

1.52. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. $K(x)$ K cisminin basit transandant bir genişlemesi, $\bar{v}$ v değerlendirmesinin $\bar{K}$ cismine genişlemesi, w v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine genişlemesi olsun. $\bar{w}(x-a)=\delta$ olmak üzere $\bar{K}(x)$ cisminin $\bar{w}$ genişlemesi $\bar{w}(\sum_i d_i(x-a)^i) = \inf_i\{\bar{v}(d_i)+i\delta\}, d_i \in \bar{K}$

şeklinde tanımlanmış olsun. $(a,\delta)\in \overline{K}\times G_{\overline{v}}$ çiftine w değerlendirmesini tanımlayan çift adı verilir.

1.53. Tanım: (a,δ), $K(x)$ cisminin w değerlendirmesini tanımlayan bir çift olsun. w değerlendirmesini tanımlayan her $(c,\gamma)\in \overline{K}\times G_{\overline{v}}$ çifti için $[K(a):K]\leq[K(c):K]$ oluyorsa $(a,\delta)\in \overline{K}\times G_{\overline{v}}$ çiftine $\overline{w}$ değerlendirmesini tanımlayan minimal çift denir.

1.54 Tanım: : K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. Her $f=a_0+a_1x+...+a_nx^n\in K[x]$ polinomu için

$$w(f)=\inf_i\{v(a_i)\}$$

şeklinde tanımlanan w değerlendirmesi v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine Gauss genişlemesi olarak adlandırılır. Bu durumda $w(x)=0$ ve $k_w=k_v(x^*)$ dır.

1.55. Lemma: : K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi; G, G_v grubunu kapsayan sıralı bir grup ve $\gamma\in G$ olsun. Her $f(x)=\sum_i a_ix^i\in K[x]$ için

$$w(f(x))=\inf_i\{v(a_i)+i\gamma\}$$

şeklinde tanımlanan w, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesini gösterir.

1.56. Tanım: K bir cisim, v K cisminin henselian bir değerlendirmesi olsun. $f(x)\in K[x]$, $f(x)\neq 0$ olan bir polinom olsun. Her bir $F(x)\in K[x]$ polinomu $\deg F_i(x)<\deg f(x)$ olmak üzere

$$F(x)=\sum_i F_i(x)f(x)^i$$

olarak tek şekilde yazılır ve bu yazılışa $F(x)$ polinomunun f-açılımı denir.

$(\alpha,\delta)\in \overline{K}\times G_{\overline{v}}$ minimal çift olsun. $\overline{K}(x)$ cisminin (α,δ) çiftine bağlı tanımlanan $\overline{w}_{\alpha,\delta}$ değerlendirmesi $\overline{K}[x]$ de

$$\overline{w}_{\alpha,\delta}\left(\sum_i c_i(x-\alpha)^i\right)=\min_i\{\overline{v}(c_i)+i\delta\},\quad c_i\in\overline{K}$$

şeklinde tanımlanır.

1.57. Teorem: $\overline{w}_{\alpha,\delta}$ $\overline{K}(x)$ cisminin (α,δ) minimal çifti yardımıyla tanımlanan bir değerlendirmesi olsun. α elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ ise f açılımı $F(x)=\sum_i F_i(x)f(x)^i$ olan herhangi bir $F(x)\in K[x]$ polinomu için

$$\overline{w}_{\alpha,\delta}\big(F(x)\big)=\min_i\{\overline{v}(F_i(\alpha))+i\overline{w}_{\alpha,\delta}\big(f(x)\big)$$

olarak yazılır. (Khanduja, 1992)

1.58. Tanım: K karakteristiği $charK=0$ olan bir cisim ve v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. Herhangi bir $f(x)=\sum_i a_i x^i \in \overline{K}(x)$ polinomu için

$$f^{[j]}(x)=\sum_{i\geq j}\binom{i}{j}a_i x^{i-j}$$

polinomu yazılır. $f(x)$ polinomunun j. türevi

$$f^{(j)}(x)=j!\,f^{[j]}(x)$$

olur.

$$D=\{\alpha\in\overline{K}\,|\,\overline{v}(\alpha-\beta)\geq\lambda\}$$

olacak şekilde $\beta\in\overline{K}$ ve $\lambda\in G_{\overline{v}}$ elemanları varsa $\overline{K}$ cisminin D alt kümesine <u>disk</u> denir. β diskin merkezini, λ ise çapını gösterir.

1.59. Tanım: v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi ve $\alpha\in\overline{K}\setminus K$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir olsun. α elemanının <u>Krasner sabiti</u>

$$w_K(\alpha)=\max\{\overline{v}(\alpha-\alpha')\,|\,\alpha' \ \alpha \text{ nın } K\text{-eşleniği}, \ \alpha'\neq\alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca cisim genişlemelerinde

$$\Delta_K(\alpha)=\min\{\overline{v}(\alpha-\alpha')\,|\,\alpha', \ \alpha \text{ nın } K\text{-eşleniği}\}$$

eşitliği de önemlidir.

1.60. Tanım: G bir grup olsun. $|G|=mp^k$, p asal, $p\nmid m$ ise G grubunun mertebesi p^k olan alt grubuna <u>p-Sylow alt grubu</u> denir.

1.61. Tanım: $(P,\leq)$ kısmi sıralı bir küme, $A\subseteq P$ alt küme olsun. Her $x\in P$ için $x\leq y$ olacak şekilde $y\in A$ elemanı varsa A ya P içinde bir kofinal denir.

1.62. Tanım: G bir grup olsun. Her $x\in G$ için $x=py$ olacak şekilde $y\in G$ elemanı varsa G grubuna p bölünebilir grup denir.

1.63.Tanım: I kısmi sıralanmış bir küme olsun. I kümesinin herhangi iki i ve j elemanı için $i\leq k$ ve $j\leq k$ olacak şekilde bir $k\in I$ elemanı varsa I kümesine yönlendirilmiş küme denir.

1.64. Tanım: X bir küme, I yönlendirilmiş bir küme olsun. I kümesinden X kümesine bir f fonksiyonuna X de bir ağ (net) adı verilir. $f(i)$ fonksiyon değeri f_i ile ve ağın kendisi $\{f_i\}_{i\in I}$ ile gösterilir.

1.65. Tanım: G tam sıralı bir grup $H\subseteq G$ alt grup olsun. $h_1,h_2\in H$ ve $g\in G$ olmak üzere $h_1\leq g\leq h_2$ iken $g\in H$ oluyorsa H alt grubuna convex denir.

1.66. Tanım: L, K cisminin $[L:K]=p$ asal olan bir devirli genişlemesi olsun. $y^p-y=c\in K$, $L=K(y)$ olacak şekilde $y\in L$ elemanı varsa L/K genişlemesine Artin–Schreier genişlemesi denir.

1.67. Teorem: (Hilbert Teorem 90) L, K cisminin bir Galois genişlemesi ve Galois grubu σ ile üretilen devirli bir grup olsun. $\alpha\in L$, $Tr_{L/K}(\alpha)=0$ olmak üzere en az bir $0\neq\beta\in K$ elemanı için $\alpha=\sigma(\beta)-\beta$ yazılır.

1.68. Tanım: K cismi üzerindeki v mutlak değeri her $a,b\in K$ için $v(a+b)\leq\max\{v(a),v(b)\}$ koşulunu sağlıyorsa Arşimetsel olmayan mutlak değer aksi halde Arşimetsel mutlak değer olarak adlandırılır.

1.69. Lemma: (Hensel Lemma) K bir cisim, v K cisminin Arşimetsel olmayan, rankı 1 olan bir değerlendirmesi, O_v v değerlendirmesinin değerlendirme halkası, M maksimal ideali, k_v rezidü cismi olsun. $f(x)\in O_v[x]$ ve $G(x),H(x)\in k_v(x)$ aralarında asal polinomlar olmak üzere $f(x)^*=G(x)H(x)$ olsun. Bu durumda $f(x)=g(x)h(x)$ olacak şekilde $g(x),h(x)\in K[x]$, $\deg G(x)=\deg g(x)$ polinomları vardır. (Mc Charty, 1966)

2. BÖLÜM

TAME GENİŞLEMELERİ VE SABİTLER

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K' K cisminin bir genişlemesi olmak üzere, v değerlendirmesinin K' cismine bir genişlemesi v', değer grubu $G_{v'}$, rezidü cismi $k_{v'}$ ile gösterilsin.

2.1. Lemma: K mükemmel bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $charK = p \geq 2$ olsun. K', K cisminin hatasız bir Galois genişlemesi ve $[K':K] = p$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in K'$ elemanı için $v'(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

Kanıt: K mükemmel bir cisim ve $charK = p \geq 2$ olduğundan G_v grubu p-bölünebilirdir ve k_v cismi de $chark_v = p$ olan mükemmel bir cisimdir. Buradan dallanma indeksi e, p nin bir böleni olduğundan $e = 1$ dir ve K', K cisminin hatasız bir genişlemesi olduğundan $[k_{v'} : k_v] = p$ dir. ξ , ${}^{k_{v'}}/_{k_v}$ Artin-Schreier genişlemesinin $\xi^p - \xi \in k_v$ olacak şekilde bir üreteci olsun. Hensel Lemma'dan $v'(\beta) = 0$ ve v' − rezidüsü $\beta^* = \xi$ olan bir $\beta \in K'$ elemanı vardır ve en az bir $c \in K$ elemanı için $\beta^p - \beta - c = 0$ dır. $1, \beta, \beta^2, ..., \beta^{p-1}$ elemanlarının v' − rezidülerinin k_v cismi üzerinde lineer bağımsız olduğu göz önüne alındığında $a_0, a_1, ..., a_{p-1} \in K$ olmak üzere

$$v'(a_0 + a_1\beta + ... + a_{p-1}\beta^{p-1}) = \min_i v(a_i) \qquad (2.1)$$

olduğu kolayca görülür.

Her $i = 0,1,..., p-1$ için $a_i \in K$ olmak üzere $K' \setminus K$ da herhangi bir eleman $\alpha = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \beta^i$ olsun. $v(a_j) = v'(\alpha - a_0)$ olacak şekilde en büyük $j \geq 1$ indeksi seçilsin ve $\gamma = \dfrac{\alpha - a_0}{a_j}$ olsun. $v'(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanının varlığını göstermek için $v'(\gamma) \geq \Delta_K(\gamma)$ yani $\Delta_K(\gamma) \leq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$b_i = a_i / a_j$ elemanı

$$v(b_j)=0 \text{ ve } i>j \text{ iken } v(b_i)>0 \tag{2.2}$$

olmak üzere $\gamma \in K'$ elemanı $\gamma = \sum_{i=1}^{p-1} b_i \beta^i$ biçiminde yazılır. K' cisminin β yı $\beta+1$ e götüren K-otomorfizması altında γ elemanının görüntüsü $\gamma^{(1)}$ olsun. $c_i \in K$ olmak üzere $\gamma-\gamma^{(1)} = \sum_{i=1}^{p-1} c_i\beta^i$ olur. $c_0, c_1, ..., c_{p-2}$ katsayıları $b_1, b_2, ..., b_{p-1}$ cinsinden yazılır ve (2.2) ifadesi kullanılırsa $v(c_{j-1})=0$ olduğu bulunur. (2.1) eşitliği yardımıyla $v'(\gamma-\gamma^{(1)}) \le 0$ olur, buradan da $\Delta_K(\gamma) \le 0$ elde edilir.

2.2. Lemma: K mükemmel bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $chark_v = p \ge 0$ olsun. K', K cisminin $[K':K]$ derecesi p ile bölünmeyen bir genişlemesi olsun. Bu durumda her $\alpha \in K'$ elemanı için $v'(\alpha-a) \ge \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

Kanıt: $\alpha \in K' \backslash K$ alınsın. $K(\alpha)$ cismi L ile gösterilsin. K mükemmel cisim olduğundan L / K ayrılabilir bir genişlemedir ve dolayısıyla ayrılamazlık derecesi $[L:K]_i = 1$ dir. Bu yüzden $Tr_{L/K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{[L:K]} \sigma_i(\alpha)$ dır. $\overline{K}$ cisminde

$$A = \{\sigma \mid \sigma : L \to \overline{K}, K\_\text{monomorfizma}\}$$

kümesi tanımlansın. $[L:K] = |A|$ olduğu açıktır. Hipotezden dolayı p, $[L:K]$ yı bölmez. Bu durumda $v'([L:K]) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} v'(\alpha-[L:K]^{-1} Tr_{L/K}(\alpha)) &= v'([L:K]\alpha - Tr_{L/K}(\alpha)) - v'([L:K]) \\ &= v'([L:K]\alpha - Tr_{L/K}(\alpha)) \\ &= v'(\sum_{i=1}^{[L:K]} \alpha - \sum_{i=1}^{[L:K]} \sigma_i(\alpha)) \\ &= v'(\sum_{i=1}^{[L:K]} (\alpha - \sigma_i(\alpha))) \\ &= v'(\sum_{\sigma\in A} (\sigma - \sigma(\alpha))) \\ &\ge \min_{\sigma \in A} \{v'(\sigma-\sigma(\alpha))\} = \Delta_K(\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanır.

2.3. Lemma: K mükemmel bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi, $charK = p \geq 2$ olsun. K' K cisminin bir Galois genişlemesi ve v' v nin K' cismine hatasız bir genişlemesi olsun. Bu durumda her $\alpha \in K'$ elemanı için $v'(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

Kanıt: $[K':K]$ derecesini bölen p nin kuvveti p^n ile gösterilsin. Eğer $n = 0$ ise 2.2.Lemma'dan istenilen gösterilmiş olur.

$n \neq 0$ olsun. K'/K genişlemesinin Galois grubunun $p-$Sylow alt grubunun sabit cismi L olsun. Buradan p, $[L:K]$ derecesini bölmez ve $i = 0,1,...,n-1$ için L_{i+1}/L_i cisim genişlemeleri p. dereceden normal genişlemeler olmak üzere $L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq ... \subseteq L_n = K'$ ara cisimleri vardır. $(K',v')/(K,v)$ genişlemesi hatasız olduğundan

$$v'(\alpha - \gamma) \geq \Delta_{L_{n-1}}(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha) \qquad (2.3)$$

sağlayan en az bir $\gamma \in L_{n-1}$ elemanı vardır. γ', γ elemanının bir $K-$eşleniği ve σ $\overline{K}$ cebirsel kapanışın $\sigma(\gamma) = \gamma'$ sağlayan bir $K-$otomorfizması olsun. v Henselian olduğundan $\overline{v}(\sigma(\alpha - \gamma)) = \overline{v}(\alpha - \gamma)$ eşitlikleri sağlanır. (2.3) ifadesi de göz önüne alındığında γ elemanının tüm eşlenikleri için

$$\begin{aligned}\overline{v}(\gamma - \gamma') = \overline{v}(\gamma - \sigma(\gamma')) &= \overline{v}(\gamma - \alpha + \alpha - \sigma(\alpha) + \sigma(\alpha) - \sigma(\gamma)) \\ &\geq \min\{\overline{v}(\gamma - \alpha), \overline{v}(\alpha - \sigma(\alpha)), \overline{v}(\sigma(\alpha - \gamma))\} \\ &\geq \Delta_K(\alpha)\end{aligned}$$

olur. Buradan $\Delta_K(\gamma) \geq \Delta_K(\alpha)$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek

$$\overline{v}(\gamma - a) \geq \Delta_K(\gamma) \geq \Delta_K(\alpha) \qquad (2.4)$$

bulunur. Böylece (2.3) ve (2.4) ifadelerinden

$$\overline{v}(\alpha - a) = \overline{v}(\alpha - \gamma + \gamma - a) \geq \min\{\overline{v}(\alpha - \gamma), \overline{v}(\gamma - a)\} \geq \Delta_K(\alpha)$$

elde edilmiş olur.

2.4. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. K', K cisminin bir Galois, tame genişlemesi olsun. Bu durumda her $\alpha \in K'$ elemanı için $v'(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır. (Khanduja,1998)

Bu lemmanın tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek ile gösterilebilir.

2.5. Örnek: u_2 Q cismi üzerindeki 2-adik değerlendirmesi olsun. Bu durumda u_2 nin değer grubu $G_{u_2}=Z$ ve rezidü cismi $k_{u_2}=Z_2$ olur. θ birimin 3.ilkel kökü olmak üzere u_2 nin $Q(\theta)$ cismine genişlemesi v_2 olsun. v_2 nin değer grubu $G_{v_2}=Z$ dir. Rezidü cismi $k_{v_2}=\Omega$ cismi olsun. t transandant bir eleman ve v_2^t, v_2 değerlendirmesinin $Q(\theta,t)$ cismine bir genişlemesi

$$v_2^t(\sum_i a_i x^i)=\min_i\{v_2(a_i)\}, \quad a_i\in Q(\theta)$$

şeklinde tanımlı Gauss genişlemesi olsun.

(K,v), $(Q(\theta,t),v_2^t)$ cisminin henselizasyonu ve $(K'=K(t^{1/6}),v')$ da K cisminin 6. dereceden bir Galois genişlemesi olsun. v nin rezidü cismi $k_v=\Omega(t^*)$ ve v' nin rezidü cisminin $k_{v'}=\Omega((t^*)^{1/6})$ olduğu açıktır. v' v nin Gauss genişlemesi olduğundan t^* Δ cismi üzerinde transandanttır. $k_{v'}/k_v$ ayrılabilir bir genişleme olmadığından K'/K bir tame genişlemesi olamaz. Oysa her $\alpha\in K'\backslash K$ elemanına $v'(\alpha-a)\geq\Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a\in K$ elemanının karşılık geleceği örneğin sonunda gösterilmiş olacaktır.

$x=t^{1/6}$ ve ξ birimin 6. ilkel kökü olsun. $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6$ fonksiyonları K'/K genişlemesinin $\sigma_i(x)=\xi^i x$ şeklinde tanımlı otomorfizmaları olsun. ξ^3 birimin 2. ilkel kökü olduğundan

$$v(1-\xi^3)=v_2(2)=1 \tag{2.5}$$

dir. $\prod_{i=1}^{6}(1-\xi^i)=6$ ve $G_{v_2}=Z$ olduğundan (2.5) ifadesi yardımıyla

$$\sum_{i=1}^{6}v_2(1-\xi^i)=v_2(6)=1=v_2(1-\xi^3)$$

elde edilir. Buradan her $i=1,\ldots,6$ için $v_2(1-\xi^i)\geq 0$ olduğundan

$$1\leq i\leq 5\ ,\ i\neq 3 \ \text{ için } \ v_2(1-\xi^i)=0 \tag{2.6}$$

bulunur.

$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ elemanlarının v'_rezidülerinin k_v cismi üzerinde lineer bağımsız olduğu göz önüne alındığında $a_i \in K$ ise

$$v'(\sum_{i=0}^{5} a_i x^i) = \min_i \{v(a_i)\} \tag{2.7}$$

olur. (2.5), (2.6) ve (2.7) ifadeleri birlikte kullanıldığında $a_i \in K$ olmak üzere herhangi bir $\alpha = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i \in K' \setminus K$ elemanı için

$$v'(\alpha - \sigma_1(\alpha)) = \min\{v(a_1), v(a_2), v(a_3)+1, v(a_4), v(a_5)\}$$

$$v'(\alpha - \sigma_2(\alpha)) = \min\{v(a_1), v(a_2), v(a_4), v(a_5)\}$$

$$v'(\alpha - \sigma_3(\alpha)) = \min\{v(a_1)+1, v(a_3)+1, v(a_5)+1\}$$

$$v'(\alpha - \sigma_4(\alpha)) = \min\{v(a_1), v(a_2), v(a_4), v(a_5)\}$$

$$v'(\alpha - \sigma_5(\alpha)) = \min\{v(a_1), v(a_2), v(a_3)+1, v(a_4), v(a_5)\}$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Sonuç olarak

$$\Delta_K(\alpha) = \min\{v(a_1), v(a_2), v(a_3)+1, v(a_4), v(a_5)\}$$

şeklinde bulunur.

Eğer $\Delta_K(\alpha) = v(a_3)+1$ ise $a = a_0 + 2a_3$ elemanı $v'(\alpha - a) = \Delta_K(\alpha)$ eşitliğini sağlar. $\Delta_K(\alpha) < v(a_3)+1$ ise $v(a_i)$ elemanları tam sayı olduğundan $1 \le j \le 5, j \ne 3$ için $v(a_i) \le v(a_j)$ ve $\Delta_K(\alpha) = v(a_j)$ dir. Burada $a = a_0 + a_j$ elemanı $v'(\alpha - a) = \Delta_K(\alpha)$ eşitliğini sağlayan bir elemandır.

2.6. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve K', K cisminin bir immediate cebirsel genişlemesi olsun. Her $\alpha \in K'$ elemanı için

$$v'(\alpha - c) \ge \Delta_K(\alpha) \tag{2.8}$$

olacak şekilde en az bir $c \in K$ elemanı varsa $K' = K$ dır.

Kanıt: $K \underset{\neq}{\subset} K'$ olduğu varsayılsın. $\alpha \in K' \setminus K$ olsun. α elemanının herhangi bir α' eşleniği ve herhangi bir $a \in K$ elemanı için

$$\begin{aligned}\bar{v}(\alpha'-\alpha) &= \bar{v}(\alpha'-a+a-\alpha)\\ &= \bar{v}(\alpha'-a-(\alpha-a))\\ &\geq \min\{\bar{v}(\alpha'-a),\bar{v}(\alpha-a)\}\\ &= \bar{v}(\alpha-a)\end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla her $a \in K$ için $\Delta_K(\alpha) \geq \bar{v}(\alpha-a)$ dır. (2.8) ifadesi de göz önüne alındığında

$$\Delta_K(\alpha) = \max\{\bar{v}(\alpha-a) \mid a \in K\} \tag{2.9}$$

bulunur. v' ile v değerlendirmelerinin değer grupları aynı olduğundan en az bir $b \in K$ için $v'(\alpha) = v(b)$ olur. (2.8) ifadesinden dolayı $v'(\frac{\alpha}{b} - c) \geq \Delta_K(\frac{\alpha}{b})$ yani $v'(\alpha - bc) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $c \in K$ vardır. (2.9) eşitliği yardımıyla da $v'(\alpha - bc) = \Delta_K(\alpha)$ bulunur. $0 \neq d \in K$ ve $v(d) = v'(\alpha - bc)$ olsun. v' ile v değerlendirmelerinin rezidü cisimleri de aynı olduğundan $v'(\frac{\alpha - bc}{d} - s) > 0$ olacak şekilde en az bir $s \in K$ elemanı vardır. Buradan da $v'(\alpha - bc - ds) > v(d) = \Delta_K(\alpha)$ olur. Bu da (2.9) ifadesi ile çelişir. O halde $K' = K$ olmalıdır.

2.7.Uyarı: K mükemmel bir cisim, $charK = p > 0$, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ise k_v cismi de mükemmeldir ve G_v grubu p-bölünebilirdir. Sonuç olarak (K,v) cisminin herhangi bir sonlu ve tamamıyla wild genişlemesi bir immediate genişlemedir.

2.8.Teorem: K karakteristiği sıfırdan farklı mükemmel bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. Her $\alpha \in \bar{K}$ elemanına karşılık $\bar{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanının olması için gerekli ve yeterli koşul v değerlendirmesinin hatasız olmasıdır.

Kanıt: 2.3.Lemma göz önüne alınırsa her $\alpha \in \overline{K}$ elemanı için $v'(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanının olması durumunda (K,v) cisminin hatasız değerlendirilmiş bir cisim olduğunun gösterilmesi ile kanıt tamamlanır.

K' K cisminin sonlu bir genişlemesi olsun. [12] den K' cismi K_1 ve K_2 ile üretilen K_1K_2 cismi içinde kalacak şekilde (K,v) cisminin bir (K_1,v_1) tame genişlemesi ve bir (K_2,v_2) sonlu tamamıyla wild genişlemesi vardır. 2.5. Uyarı ve 2.4. Lemma'dan $K_2 = K$ bulunur ve buradan da $K' \subset K_1$ dir. K_1 K cisminin bir tame genişlemesi olduğundan hatasızdır. Dolayıyla K'/K genişlemesi de hatasız olur.

2.9. Teorem: K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. Her $\alpha \in \overline{K}$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanının var olması için gerekli ve yeterli koşul (K,v) cisminin bir tame cismi olmasıdır.

Kanıt: 2.8. Teorem'inin kanıtına benzer olarak kolayca elde edilir.

2.10. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir olsun. $\overline{v}(\alpha - a) \geq w_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı varsa $K(\alpha)$, K cisminin bir tame genişlemesidir.

Kanıt: K' K cisminin α elemanının bulunduran en küçük Galois genişlemesi ve K cisminin K' içindeki maksimal tame genişlemesi K_T olsun. Varsayımdan

$$\overline{v}(\alpha - a) \geq w_K(\alpha) \qquad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanının olduğu biliniyor. $K(\alpha)$ nın K cisminin bir tame genişlemesi olmadığı yani $\alpha \notin K_T$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ olacak şekilde bir $\sigma \in Gal(K'/K_T)$ elemanı vardır.

$$\overline{v}(\sigma(\alpha - a) - (\alpha - a)) > \overline{v}(\alpha - a) \qquad (2.11)$$

olur. (2.10) ve (2.11) ifadelerinden $\overline{v}(\sigma(\alpha) - \alpha) > w_K(\alpha)$ bulunur. Bu da $w_K(\alpha)$ sabitinin tanımı ile çelişir. Bu durumda $K(\alpha)/K$ bir tame genişlemesidir.

2.11. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. K', K cisminin bir Galois genişlemesi ve $[K':K]=n$ ve v değerlendirmesinin K' cismine genişlemesi v' olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $k_{v'} \neq k_v$ ve her $\alpha \in K' \setminus K$ elemanı için $v'(\alpha - a) \geq w_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

ii) n bir asal sayıdır ve $k_{v'}/k_v$ genişlemesi n. dereceden bir Galois genişlemesidir.

Kanıt: $k_{v'}/k_v$ normal bir genişlemedir. Herhangi bir $\sigma \in Gal(K'/K)$ dönüşümünün $Gal(K'/K)$ grubundan $k_{v'}/k_v$ nin otomorfizmaları grubuna tanımlı kanonik homomorfizma altındaki görüntüsü $\overline{\sigma}$ olsun ve v' nin değerlendirme halkasındaki herhangi bir ξ elemanı için $\overline{\sigma}(\xi^*) = \sigma(\xi)^*$ şeklinde tanımlansın.

(i) ifadesinin sağlandığı varsayılsın. Buradan $k_{v'}/k_v$ genişlemesi bir Galois genişlemesidir. Her $\beta^* \in k_{v'} \setminus k_v$ elemanı için

$$[k_v(\beta^*):k_v] = [K':K] = [k_{v'}:k_v] \tag{2.12}$$

olduğu gösterildiğinde (ii) ifadesi kanıtlanmış olur.

$\beta \in K'$, $v'(\beta) = 0$ olmak üzere $\beta^* \in k_{v'} \setminus k_v$ olsun. (i) ifadesinden $v'(\beta - b) \geq w_K(\beta)$ olacak şekilde $b \in K$ elemanı vardır. Eğer $w_K(\beta) > 0$ olsaydı $\beta^* = b^*$ olurdu. $\beta^* \in k_{v'} \setminus k_v$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $w_K(\beta) = 0$ olmalıdır.

$\sigma(\beta) \neq \beta$ olacak şekilde $\sigma \in Gal(K'/K)$ varsa $\overline{\sigma}(\beta^*) \neq \beta^*$ dır. Çünkü $\overline{\sigma}(\beta^*) = \beta^*$ olsaydı $v'(\sigma(\beta) - \beta) > 0$ ve dolayısıyla $w_K(\beta) > 0$ olacaktı. Bu da $w_K(\beta) = 0$ ile çelişir. Buradan

$$[K(\beta):K] = [k_v(\beta^*):k_v] \tag{2.13}$$

olur. (2.12) eşitliğinin elde edilmesi için

$$K(\beta) = K' \tag{2.14}$$

olduğu gösterilmelidir.

(2.14) eşitliğinin sağlanmadığı varsayılsın. α, K'/K genişlemesinin bir üreteci ve d, K cisminin $v'(d\alpha)>0$ eşitsizliğini sağlayan bir elemanı olsun. $K(\beta)$, $K'=K(\alpha)$ nın bir alt kümesi olduğundan $\tau(\alpha)\neq\alpha$,$\tau(\beta)=\beta$ olacak şekilde bir $\tau\in Gal(K'/K)$ elemanı vardır. d nin seçilişinden dolayı

$$v'(\tau(d\alpha+\beta)-(d\alpha+\beta))=v'(d(\tau(\alpha)-\alpha))>0$$

bulunur. Sonuç olarak $w_K(d\alpha+\beta)>0$ olur. (i) ifadesinden dolayı $v'(d\alpha+\beta-c)\geq w_K(d\alpha+\beta)>0$ olacak şekilde $c\in K$ elemanı vardır. $v'(d\alpha)>0$ olduğundan $v'(\beta-c)>0$ olduğu da görülür. Yani $\beta^*=c^*$ olur. Fakat bu eşitlik de mümkün değildir. Bu çelişki (2.14) eşitliğinin sağlandığını gösterir. (2.13) ve (2.14) ifadeleri göz önüne alındığında $[k_v(\beta^*):k_v]=[K(\beta):K]=[K':K]$ olur. $[k_v(\beta^*):k_v]\leq[k_{v'}:k_v]\leq[K':K]$ ifadesi ile birlikte (2.12) ifadesi elde edilmiş olur.

2.12. Lemma: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi $r\in IN$ ve $x,y\in K$ olsun. $v(x-y)>v(x)$ ise $v(x^r-y^r)>v(x^r)$ dir. (Khanduja,1999)

2.13. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $K(\alpha)$, K cisminin bir tame genişlemesi ve $[K(\alpha):K]=n>1$ olsun. Bu durumda $[K(\delta):K]<n$ ve $\bar{v}(\alpha-\delta)\geq w_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $\delta\in K(\alpha)$ elemanı vardır.

Kanıt: . $K(\alpha)/K$ bir tame genişlemesi olduğundan ayrılabilir bir genişlemedir. K', K cisminin α elemanını bulunduran en küçük Galois genişlemesi olsun. (K',v') içindeki (K,v) cisminin maksimal tame genişlemesi T ile gösterilsin. [10,21.2] den T, K cisminin $K(\alpha)$ yı içeren bir Galois genişlemesidir. O halde $T=K'$ olmalıdır. $Gal(K'/K)$ nın bir alt grubu

$$H=\{\sigma\in Gal(K'/K)\,|\,v'(\alpha-\sigma(\alpha))\geq w_K(\alpha)\} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanmış olsun ve H alt grubunun sabit cismi F ile gösterilsin. $w_K(\alpha)$ nın tanımından $Gal(K'/K(\alpha))\subset H$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $F\subset K(\alpha)$ olur.

$$\Delta_F(\alpha)=\min\{\bar{v}(\alpha-\alpha')\,|\,\alpha' \ \alpha \text{ nın } F\text{\_eşleniği}\}$$

olmak üzere $\Delta_F(\alpha)\geq w_K(\alpha)$ olduğu kolayca görülür. $w_K(\alpha)\geq\Delta_K(\alpha)\geq\Delta_F(\alpha)$ olduğu da göz önüne alındığında

$$\Delta_F(\alpha) = w_K(\alpha) \tag{2.16}$$

bulunur. 2.4. Lemma'dan ve (2.16) eşitliğinden dolayı $v'(\alpha - \delta) \geq w_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $\delta \in K(\alpha)$ elemanı vardır. Ayrıca $F \subset K(\alpha)$ olduğundan $[K(\delta):K] < [K(\alpha):K]$ dır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

<u>2.14. Lemma</u> (Krasner Lemma): K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\alpha \in \overline{K} \backslash K$, α *ayr* $/ K$ olsun.

$$\bar{v}(\alpha - \beta) > w_K(\alpha)$$

olacak şekilde $\beta \in \overline{K}$ elemanı varsa $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ dır. [2,16.8]

<u>2.15. Teorem:</u> K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $K(\alpha)$, K cisminin bir tame genişlemesi, $[K(\alpha):K] = n > 1$ ve w v değerlendirmesinin $K(\alpha)$ cismine bir genişlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\Delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$

ii) $r\bar{v}(\alpha - a) = v(b) \in G_v$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı r olmak üzere w nın değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla $G_w = G_v + Z\bar{v}(\alpha - a)$ ve $k_w = k_v((\alpha - a)^r / b)^*)$ olacak şekilde bir $a \in K$ elemanı vardır.

<u>Kanıt:</u> v Henselian bir değerlendirme olduğundan α nın herhangi bir α' eşleniği ve herhangi bir $d \in K$ elemanı için $\bar{v}(\alpha - d) = \bar{v}(\alpha' - d)$ dir. Buradan da

$$\begin{aligned}\bar{v}(\alpha - \alpha') &= \bar{v}(\alpha - d + d - \alpha') \\ &\geq \min\{\bar{v}(\alpha - d), \bar{v}(\alpha' - d)\} \\ &= \bar{v}(\alpha - d)\end{aligned}$$

dir. Yani $d \in K$ olmak üzere

$$\Delta_K(\alpha) \geq \bar{v}(\alpha - d) \tag{2.17}$$

olur.

$\Delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ olsun. $K(\alpha)/K$ bir tame genişlemesi olduğundan 2.9. Teorem'den $\bar{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı vardır. Böylece (2.17) ifadesi de kullanıldığında

$$\bar{v}(\alpha - a) = \Delta_K(\alpha) = w_K(\alpha) \tag{2.18}$$

olduğu görülür. $\alpha - a = \beta$ şeklinde yazılsın. $\overline{K}$ nin bir basit transandant genişlemesi $\overline{K}(x)$ ve $\bar{v}$ değerlendirmesinin $\overline{K}(x)$ cismine bir genişlemesi $\bar{u}$ olsun. $\bar{u}$ değerlendirmesi $\overline{K}[x]$ üzerinde

$$\bar{u}(\sum_i c_i x^i) = \min_i\{\bar{v}(c_i) + i\bar{v}(\beta)\}\,, \quad c_i \in \overline{K}$$

şeklinde tanımlansın. $\bar{u}$ nin $K(x)$ cismine kısıtlanışı u ile gösterilsin. u değerlendirmesinin değer grubu $G_u = G_v + Z\bar{v}(\beta)$ olur. $G_u = G_w$ olduğu gösterildiğinde (ii) ifadesinin ilk kısmı kanıtlanmış olur. Bunun için de derecesi n den küçük olan herhangi bir $g(x) \in K[x]$ polinomu için

$$\bar{v}(g(\beta)) = u(g(x)) \tag{2.19}$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\deg g(x) = m$, $g(x)$ polinomunun kökleri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ve baş katsayısı c olsun. (2.18) ifadesi ve Krasner Lemma'dan

$$\bar{v}(\beta - \beta_i) = \bar{v}(\alpha - a - \beta_i) \le w_K(\alpha) = \bar{v}(\beta)$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik ve genel değerlendirme teorisinden

$$\bar{v}(\beta - \beta_i) = \min_i\{\bar{v}(\beta), \bar{v}(\beta_i)\} \tag{2.20}$$

olur. $\bar{u}$ nin tanımından da

$$\bar{u}(x - \beta_i) = \min_i\{\bar{v}(\beta), \bar{v}(\beta_i)\} \tag{2.21}$$

bulunur. (2.20) ve (2.21) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında $\bar{v}(\beta - \beta_i) = \bar{u}(x - \beta_i)$ olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\bar{v}(g(\beta)) = v(c) + \sum_i \bar{v}(\beta - \beta_i) = v(c) + \sum_i \bar{u}(x - \beta_i) = u(g(x))$$

bulunur. Yani (2.19) eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) ifadesinin ikinci kısmının kanıtı için $\overline{K}[x]$ de derecesi $t < n$ olan bir $h(x)$ polinomu alınsın. $(h(\beta))^*$, k_w cisminin sıfırdan farklı bir elemanı olsun.

(2.19) ifadesinden $\bar{v}(h(\beta)) = u(h(x)) = 0$ dır. Eğer $i = 1,2,...,t$ için $a_i \in K$ olmak üzere $h(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_t x^t$ şeklinde yazılırsa $u(h(x)) = \min_i \{\bar{v}(a_i) + i\bar{v}(\beta_i)\} = 0$ olur. Burada her i için $v(a_i) + i\bar{v}(\beta) \geq 0$ olmalıdır. $r\bar{v}(\beta) = v(b) \in G_v$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı r olduğundan $r \nmid i$ iken $v(a_i) + i\bar{v}(\beta) > 0$ olur. Buradan $h(\beta) = \sum_i a_i \beta^i$ nin $\bar{v}$ _rezidüsü alındığında

$$(h(\beta))^* = \sum_i (a_{ir}\beta^{ir})^* = \sum_i (a_{ir}b^i)^*((\beta^r / b)^i)^*$$

dır.Böylece istenilen gösterilmiş olur.

Tersi için (ii) ifadesi sağlansın fakat (i) ifadesi sağlanmasın. Yani

$$w_K(\alpha) > \Delta_K(\alpha) \tag{2.22}$$

olsun. 2.13 Lemma'dan $[K(\delta):K] < n$ ve $\bar{v}(\alpha - \delta) \geq w_K(\alpha)$ olacak şekilde $\delta \in K(\alpha)$ elemanı vardır. (2.17) ve (2.22) ifadelerinden

$$\bar{v}(\alpha - \delta) \geq w_K(\alpha) > \Delta_K(\alpha) \geq \bar{v}(\alpha - a)$$

bulunur. Yani $\bar{v}(\alpha - \delta) > \bar{v}(\alpha - a)$ dır. Bu da

$$\bar{v}(\delta - a) = \bar{v}(\alpha - a) \tag{2.23}$$

olduğunu gösterir. 2.12 Lemma'dan $\bar{v}((\alpha - a)^r - (\delta - a)^r) > \bar{v}((\alpha - a)^r) = v(b)$ dir. Buradan

$$\left(\frac{(\alpha - a)^r}{b}\right)^* = \left(\frac{(\delta - a)^r}{b}\right)^* \tag{2.24}$$

yazılır. w nın $K(\delta)$ cismine kısıtlanışı ile elde edilen w_0 değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla G_{w_0} ve k_{w_0} olmak üzere (2.23) ve (2.24) ifadeleri ile birlikte (ii) deki varsayımlardan dolayı

$$G_w \subseteq G_{w_0} \text{ ve } k_w \subseteq k_{w_0} \tag{2.25}$$

olur. $K(\alpha)/K$ hatasız bir genişleme olduğundan

$$n=[K(\alpha):K]=[G_w:G_v][k_w:k_v]\leq[G_{w_0}:G_v][k_{w_0}:k_v]$$
$$\leq[K(\delta):K]$$
$$<n$$

olur. Bu çelişki ile de aranılan sonuç elde edilmiş olur.

2.16. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. α K cismi üzerinde ayrılabilir bir eleman ve asal sayı olsun. Bu durumda $w_K(\alpha)=\Delta_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: K cisminin α elemanını bulunduran en küçük normal genişlemesi N olsun. $Gal(N/K)$ grubunun bir alt grubu

$$H=\{\sigma\in Gal(N/K)\,|\,\bar{v}(\alpha-\sigma(\alpha))\geq w_K(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. H ın sabit cismi L olmak üzere $Gal(N/K)\subset H$ olduğu açıktır. Buradan da $L\subset K(\alpha)$ olduğu görülür. $[K(\alpha):K]=p$ asal olduğundan $L=K$ olmalıdır. Yani $Gal(N/K)=H$ olur. Böylece α nın tüm α' K-eşlenikleri için $\bar{v}(\alpha-\alpha')\geq w_K(\alpha)$ dır ve aranılan eşitlik de buradan kolayca elde edilir.

2.17. Tanım: : K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\alpha\in\overline{K}\setminus K$ elemanı için

$$M(\alpha,K)=\{\bar{v}(\alpha-\beta)\,|\,\beta\in\overline{K},[K(\beta):K]<[K(\alpha):K]\}$$

kümesi tanımlanır.

2.18. Teorem: K bir cisim, v K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi ve v değerlendirmesine göre K cisminin tamlanışı $\tilde{K}$ olsun. v değerlendirmesinin $\tilde{K}$ ya genişlemesi $\tilde{v}$ ve $\alpha\in\overline{K}\setminus K$ olsun. $M(\alpha,K)$ kümesinin $G_{\bar{v}}$ grubunda bir üst sınırının olması için gerekli ve yeterli koşul $[K(\alpha):K]=[\tilde{K}(\alpha):\tilde{K}]$ olmasıdır. (Alexandru ve Popescu ve Zaharescu, 1990)

2.19. Tanım: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\delta_K(\alpha)$, $M(\alpha,K)$ kümesinin $G_{\bar{v}}$ grubundaki

$$\delta_K(\alpha)=\sup\{\bar{v}(\alpha-\beta)\,|\,\beta\in\overline{K},[K(\beta):K]<[K(\alpha):K]\}$$

şeklinde tanımlı üst sınırıdır.

2.20. Teorem: K bir cisim, v K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi olsun. $K(\alpha)$ K cisminin $[K(\alpha):K]=n>1$ olan hatasız, ayrılabilir bir genişlemesi, v değerlendirmesinin $K(\alpha)$ cismine genişlemesi v_α olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $v_\alpha(\alpha)=\delta_K(\alpha)$

ii) $v(\alpha^r)=v(b)\in G_v$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı r olmak üzere v_α değerlendirmesinin değer grubu ve rezidü cismi sırasıyla

$$G_{v_\alpha}=G_v+Zv(\alpha) \quad \text{ve} \quad k_{v_\alpha}=k_v((\alpha^r/b)^*)$$

olur.

Kanıt: 2.15. Teorem'inin kanıtına benzer olarak kolayca kanıtlanır.

2.21. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $chark_v>0$ iken $p=chark_v$, $chark_v=0$ iken $p=1$ ve $(p,d)=1$ olmak üzere $f(x)\in K[x]$ polinomu $n=p^m d$ dereceli bir polinom olsun. $q=p^m<n$ ve D f polinomunun tüm köklerini bulunduran bir disk ise $f^{[q]}(x)$ polinomunun da bir kökü D diskindedir. (Ax,1970)

2.22. Lemma: K, karakteristiği $charK=0$ olan bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. $chark_v=p>0$ olmak üzere $f(x)\in\overline{K}[x]$ derecesi $n=p^m>1$ olan bir polinom olsun. f polinomunun tüm kökleri β merkezli, λ yarıçaplı bir disk içinde kalsın. Eğer $q=p^{m-1}$ ise $f^{[q]}$ polinomunun kökleri de β merkezli, $\lambda-\dfrac{v(p)}{p^m-p^{m-1}}$ çaplı bir disk içindedir.

2.23. Önerme: K mükemmel bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi, $charK = p > 0$ olsun. $\bar{v}(\alpha) \geq 0$ olan her $\alpha \in \bar{K}$ elemanına ve herhangi bir $l > 1$ tamsayısına, $\bar{v}(\alpha - a) \geq (1 - 1/l)\Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı karşılık gelir. (Ax,1970)

2.24. Teorem: K mükemmel bir cisim, v K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\alpha \in \bar{K}$, $[K(\alpha):K] = n > 1$ ve $chark_v = p \geq 0$ olsun.

i) $p = 0$ olması durumunda ya da $p > 1$ iken $charK = 0$ olması ve n nin p nin bir kuvveti olmaması durumunda $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ dır.

ii) $charK = 0$, $p > 1$ ve $n = p^m$ ise $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha) - \dfrac{v(p)}{p^m - p^{m-1}}$ dır.

iii) $charK = p > 0$ ise $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: α elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ olsun.

i) $charK = 0$, $chark_v = p \geq 0$ olsun ve n p nin bir kuvveti olmasın. $p = 0$ ise $q = 1$ olduğu, $p > 0$ ve $d > 1$, $p \nmid d$ olmak üzere $n = p^m d$ ise $q = p^m$ olduğu varsayılsın. 2.21. Lemma'da merkez α , çap; $\Delta_K(\alpha)$ olarak alınırsa $f^{[q]}$ polinomunun $\bar{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde bir β kökü vardır. Buradan da $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ olduğu görülür.

ii) $charK = 0$, $p > 1$ ve $n = p^m$ olsun. 2.22. Lemma'da merkez α , çap $\Delta_K(\alpha)$ olarak alınırsa $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha) - \dfrac{v(p)}{p^m - p^{m-1}}$ olduğu görülür.

iii) $charK = p > 0$ olsun. $\bar{v}(\alpha) \geq 0$ ise 2.23. Önerme'den her $l > 1$ tamsayısı için $\delta_K(\alpha) \geq (1 - 1/l)\Delta_K(\alpha)$ olur. Sonuç olarak $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ dır.

Eğer $\bar{v}(\alpha) < 0$ ise $\delta_K(\alpha^{-1}) = \delta_K(\alpha) - 2\bar{v}(\alpha)$ ve $\Delta_K(\alpha^{-1}) = \Delta_K(\alpha) - 2\bar{v}(\alpha)$ olduğu göz önüne alındığında $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ olduğu görülür.

2.25. Teorem: K mükemmel bir cisim, v K cisminin reel, henselian bir değerlendirmesi ve α K üzerinde $[K(\alpha):K]=n>1$ olan cebirsel bir eleman olsun. $chark_v \nmid n$ ise $\delta_K(\alpha)=w_K(\alpha)$ olur.

Kanıt: $\alpha=\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ elemanları α nın $\bar{v}(\alpha-\alpha_i)\geq w_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan K_eşlenikleri olsun.

Eğer $s=n$ ise $\Delta_K(\alpha)=w_K(\alpha)$ dır ve 2.24. Teorem'in (i) ve (ii) ifadelerinden $\delta_K(\alpha)=w_K(\alpha)$ olduğu görülür.

$s<n$ olsun. K cisminin ayrılabilir kapanışı K_{ayr} olmak üzere K_{ayr}/K nin Galois grubunun bir alt grubu

$$H=\{\sigma\in Gal(K_{ayr}/K) \mid \bar{v}(\alpha-\sigma(\alpha))\geq w_K(\alpha)\}$$

olsun ve H ın sabit cismi L ile gösterilsin. $Gal(K^{sep}/K)\subseteq H$ olduğu açıktır. Buradan da $L\subseteq K(\alpha)$ olur.

α elemanının L cismi üzerindeki minimal polinomu s dereceli $h(x)$ polinomu olsun. $s\mid n$ ve $charK \nmid n$ olduğu için $h(x)$ in türevi $h'(x)$ polinomu $s-1$ derecelidir. $h'(x)$ in kökleri $c_1,c_2,...,c_{s-1}$ olsun. Bu durumda her bir c_i kökünün K üzerindeki derecesi n den küçük olur. Buradan

$$\bar{v}(h'(\alpha))=v(s)+\sum_i \bar{v}(\alpha-c_i)\leq v(s)+(s-1)\delta_K(\alpha) \tag{2.26}$$

olur. Diğer yandan $h(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)$ den $h'(\alpha)=\prod_{i=2}^{s}(\alpha-\alpha_i)$ dir ve

$$\bar{v}(h'(\alpha))=(s-1)w_K(\alpha) \tag{2.27}$$

olur. $v(s)=0$ olduğundan (2.26) ve (2.27) göz önüne alındığında $w_K(\alpha)\leq\delta_K(\alpha)$ olduğu bulunur. Krasner Lemma'dan da $\delta_K(\alpha)\leq w_K(\alpha)$ olduğu kolayca görülür. Böylece $\delta_K(\alpha)=w_K(\alpha)$ eşitliği gösterilmiş olur.

2.26. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi, v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir rezidül transandant genişlemesi w olsun. Bu durumda w/v için $E = I\,R\,D_h$ eşitliği sağlanır. (Ohm ve Matignon,1990)

2.27. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve γ , G_v grubunun bölünebilir kapanışında bir eleman olsun. v değerlendirmesinin $K(x)$ cismine bir w genişlemesi

$$w(\sum_i a_i x^i) = \min_i\{v(a_i) + i\gamma\}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda $D_h(w/v) = 1$ dir.

Kanıt: s, $s\gamma \in G_v$ yi sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. $s\gamma = v(d)$, $d \in K$ olarak alınsın. $I(w/v) = s$ olduğu açıktır. [10,10.1.2] dan x^s/d elemanının w_rezidüsü k_v üzerinde transandanttır. Sonuç olarak $E(w/v) \le I(w/v)$ dir. 2.26. Teorem kullanılarak $D_h(w/v) = 1$ bulunur.

2.28. Teorem: $\overline{K}(x)$ cisminin (a,δ) ile tanımlanan değerlendirmesi $\overline{w}$ ile gösterilsin.. $\overline{w}$ nin $K(x)$ ve $K(a)$ cisimlerine kısıtlanışları sırasıyla w ve v_a olsun. a elemanının K üzerindeki minimal polinomu $p(x)$, v_a in değer grubu G_{v_a} ve s; $sw(p(x)) \in G_{v_a}$ sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda v_a/v nin dallanma indeksi $e(v_a/v)$ ve rezidü derecesi $f(v_a/v)$ olmak üzere $E(w/v) = s[K(a):K]$, $I(w/v) = s(e(v_a/v))$, $R(w/v) = f(v_a/v)$ eşitlikleri sağlanır. (Alexandru ve Popescu ve Zaharescu,1988)

2.29. Sonuç: w ve v_a değerlendirmeleri 2.28. Teorem'deki gibi olsun. v Henselian ise

$$D_h(w/v) = def((K(a), v_1)/(K,v)$$

olur. (Khanduja,1999)

2.30. Lemma: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K_1 K cisminin bir genişlemesi, v değerlendirmesinin K_1 cismine genişlemesi v_1 olsun. t transandant ve K_1/K genişlemesi sonlu olsun. v_1 in $K_1(t)$ cismine Gauss genişlemesi

$$v_1^t(\sum_i b_i t^i) = \min_i\{v_1(b_i)\}, \quad b_i \in K_1$$

olsun. v_1^t nin $K(t)$ cismine kısıtlanışı v^t olmak üzere

$$def((K_1,v_1)/(K,v)) = def((K_1(t),v_1^t)/(K(t),v^t))$$

sağlanır. (Ohm, 1989)

2.31. Teorem: K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. a ve b, $\overline{K}$ cisminin $[K(c):K]<[K(a):K]$ eşitsizliğini sağlayan her $c \in \overline{K}$ elemanı için $\overline{v}(a-b) > \overline{v}(a-c)$ özelliğini sağlayan elemanları olsun. v değerlendirmesinin $K(a)$ ve $K(b)$ cisimlerine genişlemeleri sırasıyla v_a ve v_b olsun. G_{v_a} ve G_{v_b} sırasıyla v_a ve v_b nin değer gruplarını, k_{v_a} ve k_{v_b} rezidü cisimlerini göstermek üzere

i) $G_{v_a} \subseteq G_{v_b}$

ii) $k_{v_a} \subseteq k_{v_b}$

iii) $def(K(a)/K) \mid def(K(b)/K)$

iv) $[K(a):K] \mid [K(b):K]$

özellikleri sağlanır.

Kanıt: $\overline{v}(a-b)=\delta$ olsun. Hipotezden (a,δ) minimal çift olur. $\overline{w}$ (a,δ) minimal çifti ile tanımlanan bir değerlendirme ve $\overline{w}$ nın $K(x)$ cismine kısıtlanışı ile elde edilen w değerlendirmesi v nin bir rezidül transandant genişlemesi olsun. a elemanının K üzerindeki minimal polinomu $p(x)$ ve $\deg p(x) = n$ olsun.

$F(x) \in K[x]$, $\deg F(x) < n$ olmak üzere $F(a) \in K(a)$ cisminin herhangi bir elemanı olsun.

$$\overline{v}(F(a)-F(b)) > \overline{v}(F(b)) \tag{2.28}$$

olduğu gösterildiğinde (i) ve (ii) kanıtlanmış olur.

$F(x) = \alpha\prod_i (x-\beta_i)$, $\alpha \in K$, $\beta_i \in \overline{K}$ yazılsın.

$$\frac{F(a)}{F(b)} = \frac{\prod_i (a-\beta_i)}{\prod_i (b-\beta_i)} = \prod_i \left(1+\frac{a-b}{b-\beta_i}\right) \tag{2.29}$$

olur. $[K(\beta_i):K] < n$ olduğundan hipotez yardımıyla her i için $\bar{v}(b-a) > \bar{v}(a-\beta_i)$ dir.

$$\begin{aligned} \bar{v}(b-\beta_i) &= \bar{v}(b-a+a-\beta_i) \\ &= \min_i\{\bar{v}(b-a), \bar{v}(a-\beta_i)\} \\ &= \bar{v}(a-\beta_i) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\bar{v}(a-b) > \bar{v}(b-\beta_i)$ dir. Buradan (2.29) ile $\bar{v}(\frac{F(a)}{F(b)}-1) > 0$ bulunmuş olur. Böylece (2.28) ifadesi elde edilir.

k_v cismi üzerinde w_rezidüsü transandant olan bir $t \in K(x)$ elemanı alınsın. $\bar{w}$ değerlendirmesinin $K(b)$ ve $K(b,x)$ cisimlerine kısıtlanışları sırasıyla $\tilde{v}$ ve $\tilde{w}$ olsun. $\bar{w}(x-b) = \delta$ olduğu göz önüne alınarak $\tilde{w}$ değerlendirmesinin $K[b,x]$ üzerinde

$$\tilde{w}(\sum_i \alpha_i (x-b)^i) = \min_i\{\tilde{v}(\alpha_i) + i\delta\}\ , \quad \alpha_i \in K(b) \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlandığı kolaylıkla görülür. Henselian hatanın çarpımsal olduğu kullanılarak da

$$\begin{aligned} &def(K(b,x)/K(b,t))\,def(K(b,t)/K(t)) \\ &\qquad = def(K(b,x)/K(x))\,def(K(x)/K(t)) \end{aligned} \tag{2.31}$$

olduğu bulunur. (2.31) eşitliğinin sol tarafı $D_h(\tilde{w}/\tilde{v})$ dır. $\tilde{w}$ değerlendirmesinin (2.30) ifadesindeki tanımından ve 2.27. Lemma'nın $K(b,(x-b))/K(b)$ basit transandant genişlemesine uygulanmasından $D_h(\tilde{w}/\tilde{v}) = 1$ olur. 2.30. Lemma'dan ise $def(K(b,t)/K(t)) = def(K(b)/K)$ elde edilir. (2.31) ifadesinden $def(K(x)/K(t)) \mid def(K(b)/K)$ olur. 2.29. Sonuç'tan da $def(K(x)/K(t)) = def(K(a)/K)$ bulunur. Böylece

$$def(K(a)/K) \mid def(K(b)/K)$$

elde edilmiş olur. v Henselian olduğundan ilk üç ifade kullanılarak (iv) ifadesi kolaylıkla görülür.

2.32. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $a \in \overline{K}$, $[K(\alpha):K] = n > 1$ ve $charK = 0$ olsun. n, $chark_v$ nin bir kuvveti olmasın. Bu durumda $[K(c):K] < n$ ve $w_K(a) = \overline{v}(a-c)$ olacak şekilde en az bir $c \in \overline{K}$ elemanı vardır. Eğer $rank\, v = 1$ ise $\delta_K(a) = w_K(a)$ olur.

Kanıt: $chark_v = p$ olmak üzere a elemanının K üzerindeki minimal polinomu $f(x)$ ve derecesi $n = p^m d$ olsun. $f(x)$ polinomunun tüm kökleri a merkezli $w_K(a)$ çaplı bir diskin içinde olduğundan 2.21. Lemma'dan $f^{[q]}(x) \in K[x]$ polinomunun $\overline{v}(a-c) \geq w_K(a)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir c kökü vardır. a elemanının herhangi bir K_eşleniği a' olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{v}(a-a') &= \overline{v}(a-c+c-a') \\ &\geq \min\{\overline{v}(a-c), \overline{v}(c-a')\} \\ &= \overline{v}(a-c) \end{aligned}$$

olduğu da kullanıldığında $w_K(a) = \overline{v}(a-c)$ eşitliği elde edilir. $rank\, v = 1$ ise $\delta_K(a) \geq w_K(a)$ dır. Krasner Lemma'dan da $w_K(a) \geq \delta_K(a)$ olduğu bilindiğine göre $\delta_K(a) = w_K(a)$ eşitliği de sağlanır.

2.33. Teorem: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $K(a)/K$ genişlemesi $[K(a):K] = n > 1$ olan bir tame genişlemesi olsun. Bu durumda $[K(c):K] < n$ *ve* $w_K(a) = \overline{v}(a-c)$ olacak şekilde en az bir $c \in K(a)$ elemanı vardır. Eğer $rank\, v = 1$ ise $\delta_K(a) = w_K(a)$ olur. (Khanduja ve Saha, 1999)

2.34. Teorem: K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\overline{K}$ cisminin; $[K(c):K] < [K(a):K]$ eşitsizliğini sağlayan her $c \in \overline{K}$ elemanı için $\overline{v}(a-b) > \overline{v}(a-c)$ özelliğini sağlayan elemanları a ve b olsun. Bu durumda $K(a)/K$ genişlemesinin maksimal tame alt genişlemesi $K(b)/K$ genişlemesinin maksimal tame alt genişlemesi içinde kalır.

Kanıt: $K(a)/K$ genişlemesinin maksimal tame alt genişlemesi F ile gösterilsin. F/K basit ve ayrılabilir bir genişlemedir. $F \subseteq K(b)$ olduğu gösterilmelidir.

$[F:K]=1$ ise kanıt aşikardır.

$[F:K]\neq 1$ olsun. $s\geq 2$ F nin K cismi üzerindeki derecesini geçmeyecek şekilde bir tamsayı olsun. F nin K cismi üzerindeki dereceleri s den küçük olan tüm alt cisimlerinin $K(b)$ içinde kaldığı varsayılsın. $F_1=K(d)$ cismi F nin K cismi üzerindeki derecesi s olan bir alt cismi olsun. 2.33. Teorem'den $[K(c):K]<s$ ve

$$w_K(d)=\bar{v}(d-c) \tag{2.32}$$

olacak şekilde $c\in F_1$ elemanı vardır. (2.28) ifadesi $d-c\in K(a)$ elemanına uygulandığında

$$\bar{v}(d-c-h)>\bar{v}(d-c) \tag{2.33}$$

olacak şekilde en az bir $h\in K(b)$ elemanı vardır. (2.32) ve (2.33) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında

$$\bar{v}(d-c-h)>w_K(d) \tag{2.34}$$

olduğu görülür. Krasner Lemma yardımıyla (2.34) ifadesinden

$$K(d)\subseteq K(c+h)\subseteq K(h,c)\subseteq K(b,c)$$

olduğu elde edilir. Varsayımdan dolayı $c\in K(b)$ dir. Dolayısıyla $F_1=K(d)\subseteq K(b)$ elde edilmiş olur.

2.35. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $(\alpha,\delta)\in\overline{K}\times G_{\bar{v}}$ ikilisi K ve $\bar{v}$ ye göre bir minimal çift ve θ, $\overline{K}$ cisminin $\bar{v}(\theta-\alpha)\geq\delta$ eşitsizliğini sağlayan bir elemanı olsun. $h(x)\in K[x]$ polinomu, tüm β kökleri $\bar{v}(\alpha-\beta)<\delta$ sağlayan bir polinom olarak seçilsin. Bu durumda $\bar{v}(h(\theta)-h(\alpha))>\bar{v}(h(\alpha))$ olur. (Aghigh ve Khanduja, 2002)

2.36. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. θ $\overline{K}\setminus K$ nın $\delta_K(\theta)\in M(\theta,K)$ özelliğini sağlayan bir elemanı olarak alınsın. $\alpha\in\overline{K}$ elemanı $\bar{v}(\theta-\alpha)\geq\delta_K(\theta)$ eşitliğini sağlayan ve K cismi üzerinde en küçük dereceye sahip bir eleman ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $(\alpha, \delta_K(\theta))$ bir minimal çifttir.

ii) 1.56. Tanım'da $\delta = \delta_K(\theta)$ alınarak tanımlanan değerlendirme $\overline{w}_{\alpha,\delta}$ olmak üzere θ elemanının K cismi üzerindeki derecesinden küçük dereceli herhangi bir $G(x) \in K[x]$ polinomu için $\overline{w}_{\alpha,\delta}(G(x)) = \overline{v}(G(\theta))$ dır. (Aghigh ve Khanduja, 2002)

<u>2.37. Teorem:</u> K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanına $\delta_K(\alpha) = \overline{v}(\alpha - \beta)$ eşitliğini sağlayan $[K(\beta):K] < [K(\alpha):K]$ olan en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı karşılık gelir.

ii) Her $\theta \in \overline{K}$ için $\overline{v}$ değerlendirmesinin kısıtlanışı ile elde edilen değerlendirmeye göre $K(\theta)$ K cisminin hatasız bir genişlemesidir.

Kanıt: (i) ifadesi sağlansın. (ii) ifadesinin kanıtlanması için her $\theta \in \overline{K} \backslash K$ elemanına $[K(\alpha):K] < [K(\theta):K]$ ve $def(K(\alpha)/K) = def(K(\theta)/K)$ özelliklerini sağlayan en az bir $\alpha \in \overline{K}$ elemanının karşılık geldiğinin gösterilmesi yeterlidir.

$\theta \in \overline{K}$ elemanı alınsın. $\deg\theta = m \geq 2$ olsun. $\alpha \in \overline{K}$ elemanı $\delta_K(\theta) = \overline{v}(\theta - \alpha)$ eşitliğini sağlayan K cismi üzerinde en küçük dereceli bir eleman olsun. α elemanının minimal polinomu K cismi üzerindeki minimal polinomu derecesi $n \geq 1$ olan $f(x)$ polinomu olsun. $\delta_K(\theta) = \delta$ ile gösterilsin. 2.36. Lemma'nın (i) ifadesinden (α, δ) bir minimal çifttir. $\overline{w}_{\alpha,\delta}$ $\overline{K}(x)$ cisminin

$$\overline{w}_{\alpha,\delta}\left(\sum_i c_i (x-\alpha)^i\right) = \min_i \{\overline{v}(c_i) + i\delta\}, \quad c_i \in \overline{K}$$

şeklinde tanımlı bir değerlendirmesi olsun. $\gamma \in \overline{K}$ ve $\deg\gamma < \deg\alpha = n$ ise $\overline{v}(\theta - \gamma) < \overline{v}(\theta - \alpha)$ olur. Sonuç olarak $\overline{v}(\alpha - \gamma) < \overline{v}(\alpha - \theta) = \delta$ dır. $\overline{v}$ değerlendirmesinin $K(\theta)$ ve $K(\alpha)$ cisimlerinin kısıtlanışları sırasıyla v_θ ve v_α olsun. 2.31. Teorem'den $G_{v_\alpha} \subseteq G_{v_\theta}$, $k_{v_\alpha} = k_{v_\theta}$ ve $def(K(\alpha)/K) \mid def(K(\theta)/K)$ ifadeleri elde edilir.

e , $\bar{ev}(f(\theta)) \in G_{v_\alpha}$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olsun. Lagrange teoreminden $e \mid [G_{v_\theta} : G_{v_\alpha}]$ dır. Buradan $en \mid m$ olur. $\frac{m}{en} = l$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$l = \left(\frac{[G_{v_\theta} : G_{v_\alpha}]}{e} \right) [k_{v_\theta} : k_{v_\alpha}] \left(\frac{def(K(\theta)/K)}{def(K(\alpha)/K} \right) \tag{2.35}$$

yazılır.

$$l = [k_{v_\theta} : k_{v_\alpha}] \tag{2.36}$$

eşitliğinin sağlandığı kanıtlanmalıdır. Böylece (2.35) ve (2.36) ifadelerinden gösterilmek istenilen $def(K(\theta)/K) = def(K(\alpha)/K)$ eşitliği bulunmuş olacaktır.

Derecesi n den küçük olan ve $\bar{ev}(f(\theta)) = -\bar{v}(h(\alpha))$ eşitliğini sağlayan bir $h(x) \in K[x]$ polinomu seçilsin. (2.36) eşitliğinin kanıtlanması için $(f(\theta)^e h(\alpha))^*$ elemanının k_{v_α} cismi üzerinde $l.$ dereceden cebirsel olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bu ifadenin tersinin doğru olduğu varsayılsın. Yani $(f(\theta)^e h(\alpha))^*$ elemanı k_{v_α} cismi üzerinde $q < l$ dereceden cebirsel olsun. Bu durumda

$$((f(\theta)^e h(\alpha))^*)^q + (A_{q-1}(\alpha))^* ((f(\theta)^e h(\alpha))^*)^{q-1} + \ldots + (A_0(\alpha))^* = 0 \tag{2.37}$$

eşitliği sağlanacak şekilde dereceleri n den küçük ve $(A_0(\alpha))^* \neq 0$ olan $A_i(x) \in K[x]$ polinomları vardır. $0 \le i \le q-1$ için her bir $B_i(x) \in K[x]$ polinomunun derecesi n den küçük olmak üzere $h(\alpha)^i A_i(\alpha) = B_i(\alpha)$ ve $h(\alpha)^q = B_q(\alpha)$ olarak yazılsın. Böylece (2.37) eşitliği $(B_0(\alpha))^* = (A_0(\alpha))^* \neq 0$ olmak üzere

$$(B_q(\alpha) f(\theta)^{eq})^* + (B_{q-1}(\alpha) f(\theta)^{e(q-1)})^* + \ldots + (B_0(\alpha))^* = 0 \tag{2.38}$$

şeklinde yazılır. (α, δ) minimal çift, $\bar{v}(\theta - \alpha) = \delta$ olduğu için 2.35. Lemma'dan $\left(\frac{B_i(\alpha)}{B_i(\theta)} \right)^* = 1$ dir. Buradan (2.38) eşitliği kullanılarak

$$\bar{v}(B_q(\theta) f(\theta)^{eq} + B_{q-1}(\theta) f(\theta)^{e(q-1)} + \ldots + B_0(\theta)) > 0 \tag{2.39}$$

olduğunu görülür.

$$G(x) = B_q(x)f(x)^{eq} + B_{q-1}(x)f(x)^{e(q-1)} + ... + B_0(x) \qquad (2.40)$$

polinomu yazılsın.

$$\deg G(x) < n + eqn < n + enl \le m - en + n = m - (e-1)n \le m$$

dir. (2.40) ifadesi $G(x)$ polinomunun f _açılımıdır ve 1.57. Teorem'den

$$\overline{w}_{\alpha,\delta}(G(x)) = \min_{0 \le i \le q} \{\overline{v}(B_i(\alpha)) + ie\overline{w}_{\alpha,\delta}(f(x))\} \le \overline{v}(B_0(\alpha)) = 0 \qquad (2.41)$$

olur. $\deg G(x) < m$ olduğundan 2.36. Lemma'nın (ii) koşulu ve (2.39) eşitsizliğinden $\overline{w}_{\alpha,\delta}(G(x)) = \overline{v}(G(\theta)) > 0$ olur. Bu ifade ise (2.41) ifadesi ile çelişir. Böylece (2.36) eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) ifadesi sağlansın. $K(\theta)$, K cisminin hatasız bir genişlemesi olduğundan $\widetilde{K}$ K cisminin v değerlendirmesine göre tamlanışı olmak üzere $[K(\theta):K] = [\widetilde{K}(\theta):\widetilde{K}]$ eşitliği sağlanır. Böylece 2.18. Teorem'den $M(\theta,K)$ kümesinin $G_{\overline{v}}$ grubunda bir üst sınırı vardır. Bu üst sınır da $\delta_K(\theta)$ ile gösterilir.

(i) ifadesinin doğru olmadığı varsayılsın. α $\overline{K} \setminus K$ nın K cismi üzerindeki derecesi n olan ve $\delta_K(\alpha) \notin M(\alpha,K)$ yı sağlayan bir elemanı olarak seçilsin. Aranan çelişki $K(\alpha)$ nın K cismi üzerinde hatasız bir genişleme olmadığının gösterilmesi ile elde edilecektir

$M(\alpha,K)$ en büyük elemanı olmayan tam sıralı bir küme olduğundan iyi sıralı bir kofinal alt kümesi vardır. O halde

(1) $\{\delta_i\}_{i\in I}$, $M(\alpha,K)$ da bir kofinal alt kümedir ve $i,j \in I$, $i<j$ için $\delta_i < \delta_j$ dir.

(2) $\beta_i \in \overline{K}$, $\deg \beta_i < n$ iken $\delta_i = \overline{v}(\alpha - \beta_i)$ dır ve $\gamma \in \overline{K}$, $\deg \gamma < \deg \beta_i$ iken $\overline{v}(\alpha - \gamma) < \delta_i$ dır.

özelliklerini sağlayan $M(\alpha,K)$ da bir $\{\delta_i\}_{i\in I}$ neti seçilebilir. Ayrıca β_i lerin her birinin K cismi üzerinde aynı s derecesine sahip olduğu varsayılabilir. $i<j$ iken $\delta_i < \delta_j$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{v}(\beta_i - \beta_j) &= \bar{v}(\beta_i - \alpha + \alpha - \beta_j) \\ &\geq \min\{\bar{v}(\beta_i - \alpha), \bar{v}(\alpha - \beta_j)\} \\ &= \min\{\delta_i, \delta_j\} \\ &= \delta_i\end{aligned}$$

olur. Herhangi bir $\gamma \in \overline{K}$, $\deg \gamma < s$ için

$$\begin{aligned}\bar{v}(\beta_i - \gamma) &= \bar{v}(\beta_i - \alpha + \alpha - \gamma) \\ &= \min\{\bar{v}(\beta_i - \alpha), \bar{v}(\alpha - \gamma)\} \\ &= \min\{\delta_i, \bar{v}(\alpha - \gamma)\} \\ &= \bar{v}(\alpha - \gamma) \\ &< \delta_i\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak 2.31. Teorem'den

$$G_{v_{\beta_i}} \subseteq G_{v_{\beta_j}} \quad , \quad i < j \tag{2.42}$$

$$k_{v_{\beta_i}} \subseteq k_{v_{\beta_j}} \quad , \quad i < j,\ i, j \in I \tag{2.43}$$

yazılır. Tüm $K(\beta_i)$ cisimleri K cismi üzerinde hatasız ve $s < n$ dereceli olduğundan (2.42) ve (2.43) ifadeleri eşitliğe dönüşür. Buradan herhangi bir $j \in I$ için

$$\bigcup_{i \in I} G_{v_{\beta_i}} = G_{v_{\beta_j}}, \quad \bigcup_{i \in I} k_{v_{\beta_i}} = k_{v_{\beta_j}} \tag{2.44}$$

olur.

$$G_{v_\alpha} = \bigcup_{i \in I} G_{v_{\beta_i}}, \quad k_{v_\alpha} = \bigcup_{i \in I} k_{v_{\beta_i}} \tag{2.45}$$

olduğu gösterilmelidir. Böylece $K(\alpha)$ K cisminin $n > s$ dereceli genişlemesi olduğundan (2.44) ve (2.45) ifadeleri kullanılarak $K(\alpha)$ nın K cismi üzerinde hatasız olmadığı sonucu elde edilir. Bu da bir çelişkidir.

(2.45) deki eşitliklerin elde edilmesi için; derecesi n den küçük herhangi bir $F(x) \in K[x]$ polinomu alınsın.

$\bar{v}(F(\alpha) - F(\beta_k)) > \bar{v}(F(\beta_k))$ eşitsizliğini sağlayan $k \in I$ elemanının var olduğunun kanıtlanması yeterlidir.

γ $F(x)$ polinomunun bir kökü olsun. $\bar{v}(\alpha-\gamma)\in M(\alpha,K)$ olduğu için $\{\delta_i\}_{i\in I}$ netinin (1) özelliğinden $\bar{v}(\alpha-\gamma)<\delta_k$ olacak şekilde $k\in I$ elemanı vardır. k yeteri kadar büyük seçilerek $F(x)$ polinomunun her bir γ_t kökü için

$$\bar{v}(\alpha-\gamma_t)<\delta_k \tag{2.46}$$

olduğu varsayılabilir. $F(x)=c\prod_t(x-\gamma_t)$ olarak yazılsın. Buradan

$$\frac{F(\alpha)}{F(\beta_k)}=\prod_t\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right)=\prod_t\left(1+\frac{\alpha-\beta_k}{\beta_k-\gamma_t}\right) \tag{2.47}$$

olur. (2.46) eşitsizliği ile $\bar{v}(\alpha-\beta_k)=\delta_k$ ifadesinden

$$\begin{aligned}\bar{v}(\beta_k-\gamma_t)&=\bar{v}(\beta_k-\alpha+\alpha-\gamma_t)\\&=\min\{\bar{v}(\beta_k-\alpha),\bar{v}(\alpha-\gamma_t)\}\\&=\bar{v}(\alpha-\gamma_t)\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak (2.47) ifadesinden

$$\bar{v}\left(\frac{F(\alpha)}{F(\beta_k)}-1\right)>0$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (2.45) deki eşitlikler sağlanmış olur ve kanıt tamamlanır.

<u>2.38. Lemma:</u> K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $chark_v=p>0$ olsun. n, $n\geq 2$ olan ve p ile bölünemeyen bir doğal sayı ve ζ birimin n. ilkel kökü olsun. Bu durumda $K(\zeta)$ cismi K cisminin dallanmamış hatasız bir genişlemesidir. (Khanduja, 2002)

<u>2.39. Sonuç:</u> K, v, n ve ζ 2.38. Lemma'daki gibi olsun. c K cisminin bir elemanı ve θ, $x^n-c=0$ polinomunun bir kökü ise $K(\zeta,\theta)$ cismi K cisminin bir tame genişlemesidir. (Khanduja, 2002)

<u>2.40. Lemma:</u> : K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi, $K(\alpha)$ K cisminin ayrılabilir bir genişlemesi, $[K(\alpha):K]=n$ ve $\Delta_K(\alpha)=w_K(\alpha)$ olsun. $Q(x)$ K cismi üzerinde n. dereceden monik indirgenemez bir polinom olsun. Eğer $\bar{v}(Q(\alpha))\leq nw_K(\alpha)$ oluyorsa $Q(x)$ polinomunun her β kökü için $\bar{v}(\alpha-\beta)=\bar{v}(Q(\alpha))/n$ olur. (Bhatia ve Khanduja, 2002)

2.41. Lemma: K bir cisim, v K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi, α K cismi üzerinde $\bar{v}(\alpha)=0$ sağlayan $n>1$ dereceden ayrılabilir bir eleman olsun. $g(x)=\sum_i c_i x^i \in K[x]$ polinomu $\min_i\{v(c_i)\}=0$ olacak şekilde derecesi $m<n$ olan bir polinom olsun. Bu durumda

$$v(g(\alpha)) \leq m\delta_K(\alpha)$$

sağlanır. (Bhatia ve Khanduja, 2002)

2.42. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $chark_v = p > 0$ olsun. K' K cisminin ayrılabilir bir genişlemesi, $[K':K]=p$ asal sayı ve v', v değerlendirmesinin K' cismine genişlemesi olsun. Bu durumda

i) Eğer K', K cisminin hatasız bir genişlemesi ve γ, K' cisminde ya $v'(\gamma)\notin G_v$ özelliğini ya da $v'(\gamma)=0$ ve $\gamma^* \notin k_v$ özelliklerini sağlayan bir eleman ise

$$\min\{v(Tr_{K'/K}(\delta)) - v'(\delta) \mid 0 \neq \delta \in K'\} = (p-1)[w_K(\gamma) - v'(\gamma)]$$

sağlanır.

ii) Eğer v reel bir değerlendirme ve γ, $K'\backslash K$ da $v'(\gamma)=0$ olan bir eleman ise $0 \neq \delta \in K'$ elemanı için

$$v(Tr_{K'/K}(\delta)) - v'(\delta) = (p-1)[w_K(\gamma) - \delta_K(\gamma)]$$

dır.

özellikleri sağlanır. (Khanduja, 2002)

2.43. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi, $charK = p > 0$ olsun. $\alpha \in \overline{K}$ elemanı K üzerinde p. dereceden ayrılabilir ve $\bar{v}(\alpha) \geq 0$ ise her $l>1$ doğal sayısına

$$\bar{v}(\alpha-\beta) \geq (1-\frac{1}{l})\Delta_K(\alpha)$$

eşitsizliğini sağlayan K üzerinde tamamıyla ayrılamaz olan $\beta \in \overline{K}$ elemanı karşılık gelir. (Ax, 1970)

2.44. Tanım: K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K', K cisminin $[K':K]=n$ olan bir genişlemesi ve v', v değerlendirmesinin K' cismine genişlemesi olsun. Eğer her $x \in K'$ elemanı için

$$x=\sum_i a_i x_i \ , \ a_i \in K \ , \ v'(x)=\min_i\{v'(a_i x_i)\}$$

oluyorsa K'/K genişlemesinin $x_1,x_2,...,x_n$ tabanına v'/v ye göre bir <u>değerlendirme tabanı</u> denir. $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ bir değerlendirme tabanı ise $y \in K'$, $y \neq 0$ olmak üzere $\{x_1/y,x_2/y,...,x_n/y\}$ de bir değerlendirme tabanı olur.

2.45. Teorem: K bir cisim, v K cisminin reel, Henselian bir değerlendirmesi ve ,$\alpha \in \overline{K}\setminus K$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir bir eleman olsun. λ IR nin

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta)>\lambda \text{ iken } K(\alpha)\subseteq K(\beta) \tag{2.48}$$

özelliğini sağlayan bir elemanı ise $\lambda \geq w_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: λ teoremdeki (2.48) özelliğini sağlayan bir reel sayı olsun. $\lambda \geq \overline{v}(\alpha)$ olmalıdır. Çünkü $\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\alpha-0)>\lambda$ iken $K(\alpha)\subseteq K$ olur ki bu mümkün değildir. $\beta \in \overline{K}$ için $\overline{v}(\alpha-\beta)>\lambda$ eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $\overline{v}(\alpha^{-1}-\beta^{-1})>\lambda-2\overline{v}(\alpha)$ olmasıdır. $w_K(\alpha^{-1})=w_K(\alpha)-2\overline{v}(\alpha)$ olduğu da göz önüne alındığında teoremin $\overline{v}(\alpha)\geq 0$ olması durumu için kanıtlanması yeterlidir.

N α elemanını bulunduran, K cisminin en küçük normal genişlemesi olsun. $Gal(N/K)$ grubunun

$$H=\{\sigma \in Gal(N/K) \mid \overline{v}(\alpha-\sigma(\alpha))\geq w_K(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlanan H alt grubunun sabit cismi $L\subseteq K(\alpha)$ olsun.

$$\Delta_L(\alpha)=w_K(\alpha) \tag{2.49}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$\lambda < w_K(\alpha)$ olduğu varsayılsın. $0\leq \overline{v}(\alpha)\leq\lambda$ olduğundan $w_K(\alpha)>0$ dır. α elemanının herhangi bir $\alpha'\neq\alpha$ L _eşleniği için (2.49) eşitliğinden $\overline{v}(\alpha-\alpha')=w_K(\alpha)$ olur. λ nın (2.48) özelliğinden de $K(\alpha)\subseteq K(\alpha')$ dir. Buradan da $L(\alpha)=L(\alpha')$ olur. Yani $K(\alpha)$ L cisminin bir normal genişlemesidir. $Gal(K(\alpha)/L)$ grubunun p_Sylow alt grubunun sabit cismi F_0 ile gösterilsin. Her i için F_{i+1} F_i cisminin p dereceli bir normal genişlemesi olacak şekilde

$$F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_s = K(\alpha)$$

ara cisimleri vardır. $F_{s-1} = F$ olarak yazılsın.

1. durum: $charK = p > 0$ olsun. Her $m > 1$ doğal sayısı için $\lambda \geq (1 - \frac{1}{m}) w_K(\alpha)$ olduğu gösterilmelidir.

Bu ifadenin doğru olmadığı varsayılsın. Yani $l > 1$,

$$\lambda < (1 - \frac{1}{l}) w_K(\alpha) \tag{2.50}$$

eşitsizliğini sağlayan bir doğal sayı olsun. 2.43. Lemma'da K' olarak $K(\alpha)$ ve K olarak F alınırsa

$$\bar{v}(\alpha - \beta) \geq (1 - \frac{1}{l}) \Delta_F(\alpha) \tag{2.51}$$

eşitsizliğini sağlayan F üzerinde tamamıyla ayrılamaz olan $\beta \in \overline{K}$ elemanı olduğu görülür. (2.48) eşitsizliği ile $L \subseteq F$ olduğu göz önüne alındığında

$$w_K(\alpha) = \Delta_L(\alpha) = \Delta_F(\alpha) \tag{2.52}$$

dır. (2.50), (2.51) ve (2.52) ifadelerinden $\bar{v}(\alpha - \beta) > \lambda$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$ dır. Buradan da $F(\alpha) \subseteq F(\beta)$ olur. Bu bir çelişkidir. Çünkü $F(\beta)$ F cisminin tamamıyla ayrılamaz bir genişlemesi iken $F(\alpha)$ F cisminin, $[F(\alpha):F] = p$ olan ayrılabilir bir genişlemesi olamaz.

2. durum: $charK = 0$ olsun. F cisminin $\overline{K}$ içindeki tüm tame genişlemelerinin bileşkesi T ile gösterilsin. $T(\alpha)$ T nin bir tame genişlemesi değildir ve $[T(\alpha):T] = p$ dir. 2.16. Lemma'dan $\Delta_F(\alpha) = w_F(\alpha) = w_T(\alpha)$ olur. (2.52) eşitliği göz önüne alındığında

$$w_K(\alpha) = \Delta_F(\alpha) = w_F(\alpha) = w_T(\alpha) \tag{2.53}$$

olduğu görülür. Eğer $\beta \in \overline{K}$ ve $[T(\beta):T] < p$ ise $T(\beta)$, T cisminin bir tame genişlemesidir ve $\beta \in T$ olmalıdır. Buradan

$$\delta_T(\alpha) = \sup\{\bar{v}(\alpha - t) \mid t \in T\} \tag{2.54}$$

olarak bulunur. $\lambda < w_K(\alpha)$ olarak varsayıldığından

$$\lambda < (1-\frac{1}{n})w_K(\alpha) \tag{2.55}$$

olacak şekilde p ile bölünmeyen $n > 1$ doğal sayısı vardır. Bu ifadenin de bir çelişkiye neden olacağı gösterilecektir.

$T(\alpha) = T'$ ile gösterilsin. $\bar{v}$ değerlendirmesinin T ve T' cisimlerine kısıtlanışları sırasıyla v_T ve $v_{T'}$ olsun.

<u>2. durumun 1. alt durumu:</u> T' T cisminin hatasız bir genişlemesi olsun.
Eğer $G_{v_T} \neq G_{v_{T'}}$ ise $\tau \in T'$, $v'(\tau) \notin G_{v_T}$ elemanı seçilsin. Eğer $k_{v_T} \neq k_{v_{T'}}$ ise $\tau \in T'$, $v'(\tau) = 0$ ve $\tau^* \notin k_{v_T}$ elemanı seçilsin. $t_i \in T$ olmak üzere

$$\bar{v}(\sum_{i=0}^{p-1} t_i \tau^i) = \min_i \{\bar{v}(t_i) + i\bar{v}(\tau)\}$$

şeklinde yazılır. $i = 1,2,...p-1$ için a, $a_i \in T$ iken

$$\alpha = a + \sum_{i=1}^{p-1} a_i \tau^i$$

olarak yazılırsa $\bar{v}(\alpha) \geq 0$ olduğu göz önüne alınarak $\bar{v}(a) \geq 0$ ve $\bar{v}(\alpha - a) = \min_i \{\bar{v}(a_i) + i\bar{v}(\tau)\}$ olduğu görülür.

$G_{v_T} \neq G_{v_{T'}}$ iken $\bar{v}(\alpha - a) \notin G_{v_T}$ olduğu açıktır.

$k_{v_T} \neq k_{v_{T'}}$ ise $b \in T$ elemanı $\bar{v}(\alpha - a) = \min_i \{\bar{v}(a_i) + i\bar{v}(\tau)\} = \min_i \{\bar{v}(a_i)\} = \bar{v}(b)$ olacak şekilde seçilebilir. Böylece

$$\left(\frac{\alpha - a}{b}\right)^* = \sum_{i=1}^{p-1} (a_i / b)^* (\tau^*)^i \notin k_{v_T}$$

yazılır. $\gamma \in T'$ elemanı

$$\gamma = \begin{cases} \alpha - a & ; \quad G_{v_T} \neq G_{v_{T'}} \\ \dfrac{\alpha - a}{b} & ; \quad k_{v_T} \neq k_{v_{T'}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. 2.42. Lemma'da $K' = T'$ ve $K = T$ olarak alınırsa

$$\min\{v(Tr_{T'/T}(\delta)) - v'(\delta) \mid 0 \neq \delta \in T'\} = (p-1)[w_T(\gamma) - v'(\gamma)] \tag{2.56}$$

olur.

(2.55) ifadesi doğru olarak varsayıldığından

$$v(Tr_{T'/T}(\alpha - a - \beta)) - v'(\alpha - a - \beta) < (p-1)[w_T(\gamma) - v'(\gamma)]$$

olacak şekilde $\beta \in T'$ elemanı bulunacaktır. Bu da (2.56) ifadesi ile çeliştiğinden bu alt durumun kanıtı tamamlanmış olacaktır.

$K(\alpha)$ F cisminin $[K(\alpha):F] = p$ olan bir Galois genişlemesi olduğundan T', T cisminin bir Galois genişlemesidir ve $[T':T] = p$ olur. (2.53) eşitliklerinden en az bir $c \in F$ için $pw_K(\alpha) = \bar{v}(c)$ olur. n (2.55) ifadesini sağlayan bir doğal sayı olmak üzere $x^n - c^{n-1}$ polinomunun bir y kökü alınsın. 2.39. Sonuç'tan $y \in T$ olmalıdır. d, T cisminin

$$p\bar{v}(\alpha - a) = \bar{v}(d)$$

eşitliğini sağlayan bir elemanı ve ξ , $x^{1+pn} - d^{n(p-1)}$ polinomunun bir kökü olsun. Yine 2.39. Sonuç'tan $T(\xi)$ T cisminin bir tame genişlemesi olacağından $\xi \in T$ elde edilir. $k_{v_T} \neq k_{v_{T'}}$ iken $b \in T$ için $\bar{v}(\alpha - a) = \bar{v}(b)$ olduğu göz önüne alınarak $z \in T$ elemanı

$$z = \begin{cases} \dfrac{y}{b^{p-1}} & ; \; k_{v_T} \neq k_{v_{T'}} \\ \dfrac{y}{\xi} & ; \; G_{v_T} \neq G_{v_{T'}} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\bar{v}(z) = \begin{cases} (1 - \dfrac{1}{n})pw_K(\alpha) - (p-1)\bar{v}(\alpha - a) & ; \; k_{v_T} \neq k_{v_{T'}} \\ (1 - \dfrac{1}{n})pw_K(\alpha) - \left[\dfrac{np(p-1)}{1+pn}\right]\bar{v}(\alpha - a) & ; \; G_{v_T} \neq G_{v_{T'}} \end{cases} \tag{2.57}$$

olur. $\alpha - a$ elemanının T cismi üzerindeki minimal polinomu

$$P(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p$$

olsun. $Q(x) \in T[x]$ polinomu da

$$Q(x) = x^p + (c_1 + z)x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \ldots + c_p$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\bar{v}(Q(\alpha-a)) &= \bar{v}(Q(\alpha-a)-P(\alpha-a))\\ &= \bar{v}(z(\alpha-a)^{p-1})\\ &= pg\end{aligned} \tag{2.58}$$

olur. (2.57) ve (2.58) karşılaştırıldığında

$$g=\begin{cases}(1-\frac{1}{n})w_K(\alpha) & ;\ k_{v_T}\neq k_{v_{T'}}\\ (1-\frac{1}{n})w_K(\alpha)-\left[\frac{(p-1)}{p(1+pn)}\right]\bar{v}(\alpha-a) & ;\ G_{v_T}\neq G_{v_{T'}}\end{cases} \tag{2.59}$$

olarak bulunur. $0\leq \bar{v}(\alpha-a)\leq w_T(\alpha)=w_K(\alpha)$ ve $w_K(\alpha)>0$ olduğu göz önüne alındığında (2.59) ifadesinden

$$(1-\frac{1}{n})w_K(\alpha)\leq g<w_K(\alpha)$$

olduğu bulunur. (2.55) ifadesi de kullanılarak

$$\lambda<g<w_K(\alpha) \tag{2.60}$$

elde edilir. $Q(x)$ polinomunun kökleri $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p$ ise (2.58) ifadesi $\sum_i \bar{v}(\alpha-a-\beta_i)=pg$ olduğunu gösterir. Bu durumda $Q(x)$ polinomunun

$$\bar{v}(\alpha-a-\beta)\geq g$$

eşitsizliğini sağlayan bir β kökü vardır. $\lambda>g$ olduğundan λ elemanının (2.48) özelliğinden $K(\alpha)\subseteq K(a+\beta)$ olur. Buradan $T(\alpha)\subseteq T(a+\beta)=T(\beta)$ olur. $[T(\alpha):T]=p$ ve β, $Q(x)\in T[x]$ polinomunun bir kökü olduğundan $T(\alpha)=T(\beta)$ dır ve $Q(x)$ polinomu T üzerinde asaldır. 2.40. Lemma yardımıyla

$$\bar{v}(\alpha-a-\beta)=g \tag{2.61}$$

bulunur.

$$Tr_{T'/T}(\alpha-a-\beta)=Tr_{T'/T}(\alpha-a)-Tr_{T'/T}(\beta)=z$$

olduğundan (2.58) ifadesi göz önüne alınarak

$$\bar{v}(Tr_{T'/T}(\alpha-a-\beta))=\bar{v}(z)=pg-(p-1)\bar{v}(\alpha-a) \tag{2.62}$$

eşitliklerinden

$$\bar{v}(Tr_{T'/T}(\delta)) - \bar{v}(\delta) = (p-1)[g - \bar{v}(\alpha - a)]$$

elde edilir. (2.56) ifadesinden de

$$g - \bar{v}(\alpha - a) \geq w_T(\gamma) - v'(\gamma) \qquad (2.63)$$

olur. $G_{v_T} \neq G_{v_{T'}}$ iken $\gamma = \alpha - a$ eşitliği ile $w_T(\alpha - a) = w_T(\alpha) = w_K(\alpha)$ eşitlikleri göz önüne alındığında (2.63) ifadesinden

$$g \geq w_K(\alpha)$$

olduğu elde edilir. Bu da (2.60) ifadesi ile çelişir.

$$k_{v_T} \neq k_{v_{T'}} \text{ iken } \gamma = \frac{\alpha - a}{b} \ , \ v'(\gamma) = 0$$

ile

$$w_T(\gamma) = w_T(\alpha - a) - \bar{v}(b) = w_K(\alpha) - \bar{v}(\alpha - a)$$

eşitlikleri göz önüne alındığında da (2.63) ifadesinden

$$g \geq w_K(\alpha)$$

olduğu elde edilir. Böylece bu çelişki ile birlikte 2. durumun 1. alt durumunun kanıtı tamamlanır.

<u>2. durumun 2. alt durumu:</u> T', T cisminin immediate bir genişlemesi olsun. $w_K(\alpha) > 0$ eşitsizliği ile p ile bölünemeyen $n > 1$ doğal sayısının

$$\lambda < (1 - \frac{1}{n}) w_K(\alpha)$$

eşitsizliğini sağladığı tekrar göz önüne alınsın. m n den daha büyük bir tamsayı olsun. T cisminde

$$\bar{v}(\alpha - a) > \delta_T(\alpha) - \frac{w_K(\alpha)}{m} \qquad (2.64)$$

eşitsizliğini sağlayan bir a elemanı vardır. T', T cisminin bir immediate genişlemesi olduğundan $\bar{v}(\alpha - a) = v_T(b)$, $b \in T$ yazılır.

$$p w_K(\alpha) = \bar{v}(c)$$

olacak şekilde $c \in F$ elemanı seçilsin ve y, $x^n - c^{n-1}$ polinomunun bir kökü olsun. $z \in T$ elemanı

$$z = \frac{y}{b^{p-1}}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha - a$ elemanının T cismi üzerindeki minimal polinomu

$$P(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + \dots + c_p$$

olsun. $Q(x) \in T[x]$ polinomu da

$$Q(x) = x^p + (c_1 + z)x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \dots + c_p$$

şeklinde tanımlansın. 2. durumun 1. alt durumunun kanıtında olduğu gibi benzer işlemler sonucunda

$$\bar{v}(\alpha - a - \beta) = (1 - \frac{1}{n}) w_K(\alpha) \tag{2.65}$$

ve

$$\bar{v}(Tr_{T'/T}(\alpha - a - \beta)) = \bar{v}(z) = p(1 - \frac{1}{n}) w_K(\alpha) - (p-1)\bar{v}(\alpha - a) \tag{2.66}$$

eşitliklerini sağlayan en az bir $\beta \in T'$ elemanı bulunur. 2.42. Lemma'nın (ii) ifadesinde $K' = T'$, $K = T$, $\gamma = \dfrac{\alpha - a}{b}$ ve $\delta = \alpha - a - \beta$ olarak alınırsa (2.65) ve (2.66) eşitliklerinden

$$(p-1)[(1 - \frac{1}{n}) w_K(\alpha) - \bar{v}(\alpha - a)] \geq (p-1)[w_T(\frac{\alpha - a}{b}) - \delta_T(\frac{\alpha - a}{b})] \tag{2.67}$$

sonucuna varılır. (2.53) ve (2.64) ifadelerinden de

$$w_T(\frac{\alpha - a}{b}) = w_K(\alpha) - \bar{v}(\alpha - a) \quad \text{ve} \quad \delta_T(\frac{\alpha - a}{b}) < \frac{w_K(\alpha)}{m} \tag{2.68}$$

olduğu görülür. (2.67) ve (2.68) ifadeleri birlikte göz önüne alındığında

$$(1 - \frac{1}{n}) w_K(\alpha) > (1 - \frac{1}{m}) w_K(\alpha)$$

elde edilir. Buradan $w_K(\alpha) > 0$ olduğundan $m < n$ bulunur. Bu ifade ise m sayısının seçilişi ile çelişir. Böylece kanıt tamamlanır.

<u>2.46. Sonuç:</u> K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $K(\alpha) \subseteq \bar{K}$ cismi K cisminin bir tame genişlemesi ve $[K(\alpha):K] > 1$ olsun. λ G_v grubunu sıralı bir alt grup olarak içeren tamamıyla sıralı bir abel grubunun

$$\beta \in \bar{K} \text{ için } \bar{v}(\alpha - \beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir elemanı olsun. Bu durumda $\lambda \geq w_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: $K(\alpha)$ K cisminin bir tame genişlemesi olduğundan bu genişleme ayrılabilir bir genişlemedir. Dolayısıyla kanıt yukarıdaki teoremin kanıtına benzer şekilde elde edilir.

2.47. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\gamma \in \overline{K}$ elemanı K cismi üzerinde cebirsel ve $[K(\gamma):K]=p$ asal olsun. $\overline{v}(\gamma) \notin G_v$ ise $\overline{v}(\gamma)=\delta_K(\gamma)$ olur. (Bhatia ve Khanduja, 2002)

2.48. Teorem:

i) K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi, $charK = chark_v$ ve $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı K cismi üzerinde ayrılabilir bir eleman olsun. λ, G_v grubunun bölünebilir kapanışında olan ve

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir eleman olsun. Bu durumda $\lambda \geq w_K(\alpha)$ dır.

ii) K bir cisim, v K cisminin $rankv > 1$ olan Henselian bir değerlendirmesi ve $charK = 0$, $chark_v = p$ asal ve $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ olsun. λ, G_v grubunun bölünebilir kapanışının

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir elemanı olsun. En az bir n pozitif tamsayısı için $n(w_K(\alpha)-\lambda)$ yı içeren G_v grubunun en küçük konveks alt grubu p _bölünebilir grup değilse $\lambda \geq w_K(\alpha)$ dır. (Bhatia ve Khanduja, 2002)

2.49. Teorem: K mükemmel bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi ve $chark_v = p > 0$ olsun. $K(\alpha)$ K cisminin tame olmayan bir Galois genişlemesi ve $[K(\alpha):K]=p$ olsun. K cisminin derecesi birden büyük olan hiçbir tame genişlemesi olmasın. v_α $\overline{v}$ değerlendirmesinin $K(\alpha)$ cismine kısıtlanışı olmak üzere G_v grubu G_{v_α} içinde yoğun olsun. λ G_v grubunun bölünebilir kapanışının

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir elemanı olsun. Bu durumda $\lambda \geq w_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: $\varphi \in \overline{K}$ ve $[K(\varphi):K] < p$ ise $K(\varphi)$, K cisminin bir tame genişlemesidir. Hipotezden $\varphi \in K$ olur. Buradan

$$\delta_K(\alpha) = \sup\{\overline{v}(\alpha - t) \mid t \in K\} \tag{2.69}$$

olarak bulunur. G_v grubunun bölünebilir kapanışındaki herhangi bir pozitif θ elemanı için G_v grubunda $0 < \mu < \theta$ özelliğini sağlayan bir μ elemanı seçilebilir.

Çünkü r $\theta p^r \in G_v$ olacak şekilde bir tamsayı ise 2.39. Sonuç'tan

$$\mu = \frac{\theta p^r}{p^r + 1} \in G_v \text{ ve } 0 < \mu < \theta$$

olur.

$w_K(\alpha) > \lambda$ olduğu varsayılsın. μ, G_v grubunun $0 < \mu < \dfrac{w_K(\alpha) - \lambda}{2}$ eşitsizliğini yani

$$\lambda < w_K(\alpha) - 2\mu \tag{2.70}$$

eşitsizliğini sağlayan bir elemanı olsun. (2.69) eşitsizliğinden

$$\overline{v}(\alpha - a) > \delta_K(\alpha) - \frac{\mu}{2} \tag{2.71}$$

olacak şekilde bir $a \in K$ elemanı vardır. $\alpha - a$ elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu

$$P(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + \dots + c_p$$

olsun. G_v grubu G_{v_α} içinde yoğun olduğundan

$$p(w_K(\alpha) - 2\mu) < v(z) + (p-1)\overline{v}(\alpha - a) \le p(w_K(\alpha) - \mu)$$

yani

$$p(w_K(\alpha) - 2\mu) - (p-1)\overline{v}(\alpha - a) < v(z) \le p(w_K(\alpha) - \mu) - (p-1)\overline{v}(\alpha - a)$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $z \in K$ elemanı vardır. $Q(x) \in K[x]$ polinomu

$$Q(x) = x^p + (c_1 + z)x^{p-1} + \sum_{i=2}^{p} c_i x^{p-i}$$

şeklinde tanımlansın.

$\overline{v}(Q(\alpha - a)) = pg$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(Q(\alpha-a)) &= \bar{v}(Q(\alpha-a)-P(\alpha-a)) \\
&= \bar{v}(z(\alpha-a)^{p-1}) \\
&= pg
\end{aligned} \tag{2.72}
$$

olur. (2.70) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$p\lambda < p(w_K(\alpha)-2\mu) < pg \le p(w_K(\alpha)-\mu) \tag{2.73}$$

olduğu görülür. $Q(x)$ polinomunun kökleri $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ ise (2.72) ifadesi yardımıyla $\sum_i \bar{v}(\alpha - a - \beta_i) = pg$ bulunur. Bu durumda $Q(x)$ polinomunun $\bar{v}(\alpha - a - \beta) \ge g > \lambda$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $\beta \in \overline{K}$ kökü vardır. Hipotezden $K(\alpha) \subseteq K(a+\beta) = K(\beta)$ olur. $[K(\alpha):K] = p$ ve β, $Q(x) \in K[x]$ polinomunun bir kökü olduğundan $K(\alpha) = K(\beta)$ dır ve $Q(x)$ polinomunu K cismi üzerinde asaldır. 2.40. Lemma'dan

$$\bar{v}(\alpha - a - \beta) = g \tag{2.74}$$

olur.

$$Tr_{K(\alpha)/K}(\alpha - a - \beta) Tr_{K(\alpha)/K}(\alpha - a) - Tr_{K(\alpha)/K}(\beta) = z$$

olduğu ve (2.72) ifadesi göz önüne alınırsa

$$v(Tr_{K(\alpha)/K}(\alpha - a - \beta)) = v(z) = pg - (p-1)\bar{v}(\alpha - a) \tag{2.75}$$

elde edilir. 2.42. Lemma (ii) de $\gamma = \alpha - a$, $\delta = \alpha - a - \beta$ alınarak

$$v(z) - \bar{v}(\alpha - a - \beta)) \ge (p-1)[w_K(\alpha - a) - \delta_K(\alpha - a)] \tag{2.76}$$

eşitsizliği bulunur. $w_K(\alpha - a) = w_K(\alpha)$ ve $\delta_K(\alpha - a) = \delta_K(\alpha)$ eşitsizlikleri ile (2.74) ve (2.75) ifadeleri kullanılarak (2.76) eşitsizliği $g - \bar{v}(\alpha - a) \ge w_K(\alpha) - \delta_K(\alpha)$ olarak yazılır. (2.71) eşitliği yardımıyla da $g \ge w_K(\alpha) + \bar{v}(\alpha - a) - \delta_K(\alpha) \ge w_K(\alpha) - \frac{\mu}{2}$ elde edilir. Bu ifade ise (2.73) eşitsizliğinden elde edilebilen $g \le w_K(\alpha) - \mu$ eşitsizliği ile çelişir. O halde $\lambda \ge w_K(\alpha)$ olmalıdır.

2.50 . Teorem: K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi, $rankv > 1$, $charK = 0$, $chark_v = p$ asal olsun. $K(\alpha)$ K cisminin tame olmayan bir Galois genişlemesi ve $[K(\alpha):K] = p$ olsun. λ, G_v grubunun bölünebilir kapanışında

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir eleman olsun. K cisminin derecesi birden büyük olan hiçbir tame genişlemesi olmasın. En az bir n pozitif tamsayısı için $n(w_K(\alpha)-\lambda)$ yı içeren G_v grubunun en küçük konveks alt grubu p _bölünebilir olmasın. Bu durumda $\lambda \geq w_K(\alpha)$ olur.

Kanıt: $K(\alpha) = K'$ ile gösterilsin ve $\overline{v}$ değerlendirmesinin K' cismine kısıtlanışı v' olsun. K cisminin hiçbir tame genişlemesi olmadığından $p^r(w_K(\alpha)-\lambda) \in G_v$ olacak şekilde en az bir r pozitif tamsayısı vardır. $p^r(w_K(\alpha)-\lambda)$ elemanını içeren G_v grubunun en küçük konveks alt grubu H ile gösterilsin.

$G_v = G_{v'}$ ise 2.49. Teorem'den kanıt tamamlanır. O halde $G_v \neq G_{v'}$ yani $[G_v : G_{v'}] = p$ olsun. x K' cisminin $v'(x) \notin G_v$ sağlayan bir elemanı olmak üzere

$$\alpha = a + \sum_{i=1}^{p-1} a_i x^i \quad , \quad a, a_i \in K$$

şeklinde yazılırsa

$$\overline{v}(\alpha - a) = \min_{1 \leq i \leq p-1} \{v(a_i) + iv'(x)\} \notin G_v$$

olur. $\lambda < w_K(\alpha)$ olduğu varsayılsın.

1.Durum: $p\lambda < \theta + (p-1)\overline{v}(\alpha - a) < pw_K(\alpha)$ özelliğini sağlayan $\theta \in G_v$ elemanı var olsun. $\alpha - a$ elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomunun

$$P(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p$$

olduğu varsayılsın. $Q(x) \in K[x]$ polinomu

$$Q(x) = x^p + (c_1 + z)x^{p-1} + c_2 x^{p-2} + \ldots + c_p$$

şeklinde tanımlansın.

$$v(z)+(p-1)\bar{v}(\alpha-a)=pg$$

olsun. Varsayım kullanılarak

$$\lambda < g < w_K(\alpha) \tag{2.77}$$

olduğu görülür. 2.48. Teorem'inin kanıtında olduğu gibi K' cisminde $Q(\beta)=0$ olan

$$\bar{v}(\alpha-a-\beta)=g \tag{2.78}$$

ve

$$v(Tr_{K'/K}(\alpha-a-\beta))=v(z)=pg-(p-1)\bar{v}(\alpha-a) \tag{2.79}$$

eşitliklerini sağlayan bir $\beta\in K'$ elemanı vardır. 2.42. Lemma'nın (ii) ifadesinde $\gamma=\alpha-a$, $\delta=\alpha-a-\beta$ alınırsa

$$g-\bar{v}(\alpha-a)\geq w_K(\alpha-a)-\delta_K(\alpha-a) \tag{2.80}$$

elde edilir. $\bar{v}(\alpha-a)=\notin G_v$ olduğu göz önüne alındığında 2.47. Lemma'da $\delta_K(\alpha-a)=\bar{v}(\alpha-a)$ olduğu görülür. Bu durumda (2.80) eşitsizliğinden $g\geq w_K(\alpha)$ elde edilir. Bu eşitsizlik de (2.77) ifadesi ile çelişir.

2. Durum: G_v grubunun $p\lambda<\theta+(p-1)\bar{v}(\alpha-a)<pw_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan hiçbir θ elemanı bulunmasın. $p\lambda<\theta+(p-1)\bar{v}(\alpha-a)<pw_K(\alpha)$ eşitsizliğinden

$$(p-1)\bar{v}(\alpha-a)<pw_K(\alpha)-\theta<p(w_K(\alpha)-\lambda)+(p-1)\bar{v}(\alpha-a)$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilebilir. Dolayısıyla K cisminin $\bar{K}$ cismi içinde maksimal tame cismi olması ve 2.39. Sonuç'u göz önüne alınarak G_v grubunda

$$\bar{v}(\alpha-a)<\theta_1<\bar{v}(\alpha-a)+\frac{p}{p-1}[w_K(\alpha)-\lambda] \tag{2.81}$$

eşitsizliğini sağlayan hiçbir θ_1 elemanının olmaması durumunun incelenmesi yeterli olacaktır. G_v grubunun bölünebilir kapanışında $pg_1\in G_v$ ve $\lambda<g_1<w_K(\alpha)$ olacak şekilde bir g_1 elemanı seçilebilir. Çünkü 2.49. Teorem'inin kanıtının ilk kısmında olduğu gibi μ, G_v grubunun $0<\mu<w_K(\alpha)-\lambda$ özelliğine sahip bir elemanı olmak üzere $g_1=w_K(\alpha)-\mu$ dır.

$\alpha - a$ elemanının K cismi üzerindeki minimal polinomu

$$P(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + ... + c_p$$

olsun. y, K cisminin $v(y) = pg_1$ eşitliğini sağlayan bir elemanı olmak üzere $Q_1(x) \in K[x]$ polinomu

$$Q_1(x) = x^p + c_1 x^{p-1} + ... + (c_p + y)$$

şeklinde tanımlansın. 1. durumun kanıtında olduğu gibi $Q_1(x)$ polinomunun $\bar{v}(\alpha - a - \beta_1) = g_1 > \lambda$ eşitsizliğini sağlayan bir β_1 kökü vardır. Buradan da $K(\alpha) = K(\beta_1)$ eşitliği bulunur. $Tr_{K'/K}(\alpha - a - \beta_1) = 0$ olduğundan Hilbert Teorem 90'dan $\alpha - a - \beta_1 = \sigma(\xi) - \xi$ olacak şekilde bir $\xi \in K'$ elemanı ve K' cisminin bir σ K_otomorfizması vardır. O halde

$$g_1 = \bar{v}(\alpha - a - \beta_1) = \bar{v}(\sigma(\xi) - \xi) = w_K(\xi) \tag{2.82}$$

olur.

$$\xi = \sum_{i=0}^{p-1} d_i (\alpha - a)^i \quad , d_i \in K$$

şeklinde yazılsın. ξ yerine $\xi - d_0$ yazılarak $d_0 = 0$ olduğu varsayılabilir. Sonuç olarak

$$\bar{v}(\xi) = \min_{1 \le i \le p-1} \{v(d_i) + i\bar{v}(\alpha - a)\} \notin G_v$$

olur. 2.42. Lemma'nın (i) ifadesinden

$$w_K(\xi) - \bar{v}(\xi) = w_K(\alpha - a) - \bar{v}(\alpha - a)$$

olduğu görülür. (2.82) eşitliği kullanılırsa yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} g_1 - w_K(\alpha) = \bar{v}(\xi) - \bar{v}(\alpha - a) &= \bar{v}\left(\frac{\xi}{\alpha - a}\right) \\ &= \bar{v}\left(\sum_{i=1}^{p-1} d_i (\alpha - a)^{i-1}\right) \\ &= \min_{1 \le i \le p-1} \{v(d_i) + (i-1)\bar{v}(\alpha - a)\} \end{aligned}$$

şekline dönüşür.

$$g_1 - w_K(\alpha) = v(d_1) \in G_v \tag{2.83}$$

olduğu gösterilmelidir. Bu eşitliğin sağlanmadığı varsayılsın. O halde

$$g_1 - w_K(\alpha) = v(d_j) + (j-1)\bar{v}(\alpha - a) \ , \quad j > 1$$

olur.

$g_1 = w_K(\alpha) + v(d_j) + (j-1)\bar{v}(\alpha - a)$ şeklinde yazılarak $\lambda < g_1 < w_K(\alpha)$ eşitsizliği

$$\bar{v}(\alpha - a) < \frac{v(d_j^{-1})}{j-1} < \bar{v}(\alpha - a) + \frac{1}{j-1}[w_K(\alpha) - \lambda]$$

şekline getirilebilir. Bu da (2.81) ifadesini sağlar. Oysa bu varsayımla çelişir. Böylece (2.83) eşitliği elde edilir.

g_1 elemanının G_v grubunun

$$pg_1 \in G_v \text{ ve } \lambda < g_1 < w_K(\alpha)$$

özelliklerini sağlayan bir elemanı olduğu bilindiğine göre $pw_K(\alpha) \in G_v$ olduğu göz önüne alınırsa (2.83) ifadesinden $p\theta \in G_v$ ve $0 < \theta < w_K(\alpha) - \lambda$ olması durumunda $\theta \in G_v$ olduğu sonucu elde edilir.

$\delta > 0$, H grubunun herhangi bir elemanı olsun. $0 < \delta < n(w_K(\alpha) - \lambda)$ olacak şekilde $(p,n) = 1$ varsayılabilen n pozitif tamsayısı vardır. K cismi $\overline{K}$ içinde maksimal tame genişlemesi olduğundan $\frac{\delta}{n} \in G_v$ olur. $0 < \frac{\delta}{n} < w_K(\alpha) - \lambda$ eşitsizliği de kullanılarak $\frac{\delta}{np} \in G_v$ olur. Buradan $\frac{\delta}{np} \in H$ dır. Yani $\frac{\delta}{n} \in H$ olur. Bu ifade de H grubunun p_bölünebilir olduğunu gösterir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilmiş olur. O halde $\lambda \geq w_K(\alpha)$ olmalıdır.

2.51. Lemma: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. α ve β , $\overline{K}$ cisminin $\bar{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan elemanları ise $\Delta_K(\beta) \geq \Delta_K(\alpha)$ dır. (Aghigh ve Khanduja, 2003)

2.47. Lemma: K mükemmel bir cisim; $charK = p > 0$ ve v K cisminin reel Henselian bir değerlendirmesi ise her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ olur. (Aghigh ve Khanduja, 2003)

2.53. Teorem: K bir cisim, v K cisminin herhangi ranklı Henselian bir değerlendirmesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) (K,v) bir tame cismidir.

ii) Her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

iii) Her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan ve $\deg \beta < \deg \alpha$ olan en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır.

iv) Her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - \beta) \geq w_K(\alpha)$ eşitsizliğini sağlayan ve $\deg \beta < \deg \alpha$ olan en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır.

v) Her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $K(\alpha)$ K cisminin hatasız bir genişlemesidir ve $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ dır.

vi) (K,v) hatasız değerlendirilmiş bir cisimdir ve her $\alpha \in \overline{K} \setminus K$ elemanı için $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ olur.

Kanıt: (i) ile (ii) ifadelerinin denkliği 2.9. Teorem'den görülür.

(ii) sağlanıyor ise (iii) ifadesi aşikardır.

(iii) sağlanıyor olsun. $[K(\alpha):K] = n$ üzerinden tümevarım uygulansın. Eğer $n = 2$ ise (ii) ifadesinin gerçeklendiği açıkça görülür. $n \geq 3$ olsun. Derecesi n den küçük olan her $\beta \in \overline{K} \setminus K$ elemanına

$$\overline{v}(\beta - a) \geq \Delta_K(\beta) \tag{2.84}$$

olacak şekilde $a \in K$ elemanı karşılık gelsin. (iii) ifadesinden dolayı

$$\overline{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha) \tag{2.85}$$

eşitsizliğini sağlayan $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır. O halde 2.51. Lemma'dan

$$\Delta_K(\beta) \geq \Delta_K(\alpha) \tag{2.86}$$

olur. (2.84), (2.85) ve (2.86) ifadeleri kullanılırsa

$$\overline{v}(\alpha - a) \geq \min\{\overline{v}(\alpha - \beta), \overline{v}(\beta - a)\} \geq \Delta_K(\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir.

(iv) ifadesi sağlanıyor ise $w_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ olduğundan (iii) ifadesi aşikardır.

(iii) ifadesi sağlanıyor olsun. O halde 2.9. Teorem'den (K,v) bir tame cismidir. Buradan K nın mükemmel bir cisim olduğu görülür. N, K cisminin α elemanını bulunduran en küçük Galois genişlemesi olsun. $Gal(N/K)$ grubunun H alt grubu

$$H = \{\sigma \in Gal(N/K) \mid \bar{v}(\alpha - \sigma(\alpha))\} \geq w_K(\alpha)$$

şeklinde tanımlansın ve H alt grubunun sabit cismi L olsun. $w_K(\alpha)$ sabitinin tanımından $Gal(N/K(\alpha)) \subset H$ olduğu bulunur. Buradan da $L \subset K(\alpha)$ olur.

$$w_K(\alpha) = \Delta_L(\alpha)$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. (iii) ifadesi ile (i) ifadesinin denk olduğu kullanılırsa K tame cismi ve dolayısıyla L tame cismi olur. Böylece (ii) ifadesinden

$$\bar{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_L(\alpha) = w_K(\alpha)$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\beta \in L$ elemanının var olduğu bulunur. $[K(\beta):K] \leq [L:K] < [K(\alpha):K]$ olduğundan (iv) ifadesi sağlanmış olur.

Kanıtın tamamlanabilmesi için (v) ifadesinin ilk dört ifadeden herhangi birine denk olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

(i) sağlanıyor olsun. O halde (K,v) mükemmel ve hatasız bir cisimdir. Her $\alpha \in \bar{K} \backslash K$ elemanı için Krasner Lemma'dan dolayı $\delta_K(\alpha) \leq w_K(\alpha)$ olduğu biliniyor. Ayrıca (iv) ifadesinden $\delta_K(\alpha) \geq w_K(\alpha)$ olduğu da görülür. Böylece $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ eşitliği elde edilir.

(v) sağlanıyor olsun. 2.37.Teorem'den $\delta_K(\alpha) \in M(\alpha, K)$ dır. Yani $\bar{v}(\alpha - \beta) = \delta_K(\alpha)$ eşitliğini sağlayan $\deg\beta < \deg\alpha$ olan en az bir $\beta \in \bar{K}$ elemanı vardır. $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ eşitliği göz önüne alındığında (iv) ifadesi elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

3. BÖLÜM

TAME GENİŞLEMELERİ VE SABİTLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

K bir cisim, v K cisminin bir değerlendirmesi olsun. K' K cisminin bir genişlemesi olmak üzere , v nin K' cismine genişlemesi v', değer grubu $G_{v'}$, rezidü cismi $k_{v'}$ ile gösterilsin.

3.1. Önerme: K bir cisim, v K cisminin henselian bir değerlendirmesi olsun. K' K cisminin bir genişlemesi ve $[K':K]=n$ olsun. $charK = chark_v = 0$ ve $rankv = 1$ ise K'/K bir tame genişlemesi olur.

Kanıt: $chark_v = 0$ olduğundan k_v mükemmel bir cisimdir. Dolayısıyla $k_{v'}/k_v$ ayrılabilir bir genişleme olur. Ayrıca $chark_v \nmid e$ olduğu da açıkça görülür.

$chark_v = 0$ ve $rankv = 1$ olduğundan K'/K hatasız bir genişlemedir. Böylece K'/K bir tame genişlemesi olur.

3.2. Örnek: $K = IR, v = |\ |$ mutlak değerlendirme ve $K' = C$ olarak alındığında $G_v = IR^+ \cup \{0\}$, $k_v = IR$ ve $G_{v'} = IR^+ \cup \{0\}$, $k_v = C$ olduğu kolaylıkla elde edilir. 3.1. Önerme'si yardımıyla da C/IR genişlemesinin bir tame genişlemesi olduğu görülür.

3.3. Önerme: K bir cisim, v K cisminin henselian bir değerlendirmesi, $charK = 0$ ve $chark_v = p$ olsun. K' K cisminin bir genişlemesi ve $[K':K] = p$ olsun. K'/K genişlemesinin bir tame genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul $k_{v'}/k_v$ genişlemesinin derecesi p olan ayrılabilir bir genişleme olmasıdır.

Kanıt: K' K cisminin bir tame genişlemesi olsun. Bu durumda $k_{v'}/k_v$ ayrılabilir bir genişleme, $ef = p$ ve $chark_v = p \nmid e$ olur. O halde $e \neq p$ dir. Dolayısıyla $f = p$ olmalıdır.

Tersine $k_{v'}/k_v$ ayrılabilir bir genişleme ve $f = p$ olsun. O halde $e = 1$ dir ve K'/K genişlemesi hatasız bir genişlemedir. $p = chark_v \nmid e$ olduğu da açıktır. Böylece K' nün K cisminin bir tame genişlemesi olduğu görülür.

3.4. Önerme: K mükemmel bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $charK \neq 0$ olsun. Bu durumda (K,v) bir tame cismidir.

Kanıt: $charK \neq 0$ iken $K = k_v$ olur. K mükemmel bir cisim olduğundan K' K cisminin herhangi sonlu bir genişlemesi olmak üzere $k_{v'} / k_v$ ayrılabilir bir genişlemedir. Buradan da $f = [K' : K]$ olur. Yani $ef = [K' : K]$ ve dolayısıyla $e = 1$ olmalıdır. Böylece $chark_v \nmid e$ olur. O halde K' K cisminin bir tame genişlemesidir. Yani (K,v) bir tame cismidir.

3.5. Önerme: K bir cisim, v K cisminin rankı bir olan ayrık bir değerlendirmesi ve $chark_v = q$ olsun. K' K cisminin bir genişlemesi ve $q \neq [K' : K] = p$ asal olsun. K' / K genişlemesinin bir tame genişlemesi olması için gerekli ve yeterli koşul $k_{v'} / k_v$ genişlemesinin ayrılabilir bir genişleme olmasıdır.

Kanıt: K' K cisminin bir tame genişlemesi olduğundan $k_{v'} / k_v$ ayrılabilir bir genişlemedir.

Tersine $k_{v'} / k_v$ ayrılabilir bir genişleme olsun. v değerlendirmesi ayrık ve $rankv = 1$ olduğundan K' / K genişlemesi hatasız bir genişlemedir. $(p,q) = 1$ olduğundan $chark_v = q \nmid e$ olduğu açıktır. O halde K' / K genişlemesi bir tame genişlemesi olur.

3.6. Önerme: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olsun. (K,v) bir tame cismi ise her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$, $\alpha\, ayr / K$ için $\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ olur. Özellikle $[K(\alpha) : K] = p$ asal ise $\delta_K(\alpha) = \Delta_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: (K,v) bir tame cismi olsun. 2.9. Teorem'den her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için

$$\overline{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha) \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $a \in K$ elemanı vardır. $\deg a = 1 < \deg \alpha$ olduğundan

$$\overline{v}(\alpha - a) \leq \delta_K(\alpha) \tag{3.2}$$

olduğu da kolayca görülür. (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri birlikte göz önüne alındığında

$$\delta_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha) \tag{3.3}$$

olduğu bulunur.

$[K(\alpha):K]=p$ asal ise 2.16. Teorem'den $w_K(\alpha)=\Delta_K(\alpha)$ olduğu bilinmektedir. Krasner Lemma'dan da $\delta_K(\alpha)\le w_K(\alpha)$ dır. Buradan (3.3) eşitsizliği ile birlikte $\delta_K(\alpha)=\Delta_K(\alpha)$ olduğu elde edilir.

3.7. Önerme: K bir cisim, v K cisminin reel Henselian bir değerlendirmesi olsun. $\alpha\in\overline{K}\backslash K$, $\alpha\, ayr/K$ olsun. λ IR nin

$$\beta\in\overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha-\beta)>\lambda \text{ iken } K(\alpha)\subseteq K(\beta) \tag{3.4}$$

özelliğini sağlayan bir eleman olsun. Bu durumda $w_K(\beta)>w_K(\alpha)$ ve $\delta_K(\beta)\ge\delta_K(\alpha)$ ve $\Delta_K(\beta)>\Delta_K(\alpha)$ olur.

Kanıt: $\beta\in\overline{K}$, $\overline{v}(\alpha-\beta)>\lambda$ olsun ve λ (3.4) özelliğini sağlasın. $K(\alpha)\subseteq K(\beta)$ olduğundan $\deg\alpha\le\deg\beta$ olur. O halde

$$\overline{v}(\alpha-\beta)\le\delta_K(\beta) \text{ ve } \overline{v}(\alpha-\beta)\ge\delta_K(\alpha) \tag{3.5}$$

dır. Böylece $\delta_K(\beta)\ge\delta_K(\alpha)$ eşitsizliği görülür.

2.45. Teorem'den

$$\lambda\ge w_K(\alpha) \tag{3.6}$$

dır. Krasner Lemma'dan yardımıyla elde edilen $\delta_K(\beta)\le w_K(\beta)$ eşitsizliği ile (3.5) ve (3.6) ifadeleri ve $\overline{v}(\alpha-\beta)>\lambda$ olduğu birlikte göz önüne alınırsa $w_K(\beta)>w_K(\alpha)$ olduğu bulunur.

v Henselian olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{v}(\beta-\beta') &= \overline{v}(\beta-\alpha+\alpha-\beta')\\ &\ge \min\{\overline{v}(\beta-\alpha),\overline{v}(\alpha-\beta')\}\\ &= \overline{v}(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

olur. Buradan da $\Delta_K(\beta)\ge\overline{v}(\beta-\alpha)$ dır. $w_K(\alpha)\ge\Delta_K(\alpha)$ eşitsizliğinden ve λ elemanının (3.6) ifadesinden

$$\Delta_K(\beta)\ge\overline{v}(\beta-\alpha)>\lambda\ge w_K(\alpha)\ge\Delta_K(\alpha)$$

yazılır. Yani $\Delta_K(\beta)>\Delta_K(\alpha)$ olur.

3.8. Önerme: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi olmak üzere $\alpha \in \overline{K} \backslash K$, $\alpha\, ayr / K$ ve $charK = chark_v$ olsun. λ G_v grubunun bölünebilir kapanışının

$$\beta \in \overline{K} \text{ için } \overline{v}(\alpha - \beta) > \lambda \text{ iken } K(\alpha) \subseteq K(\beta)$$

özelliğini sağlayan bir elemanı ise

$$w_K(\beta) > w_K(\alpha) \text{ ve } \delta_K(\beta) \geq \delta_K(\alpha) \text{ ve } \Delta_K(\beta) > \Delta_K(\alpha)$$

olur.

Kanıt: 2.48. Teorem'inin (i) ifadesinden $\lambda \geq w_K(\alpha)$ olur. Böylece kanıt 3.7.Önerme'sinin kanıtına benzer şekilde tamamlanır.

3.9. Önerme: K mükemmel bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $charK \neq 0$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

ii) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha)$, $\deg\beta < \deg\alpha$ olacak şekilde en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır.

iii) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - \beta) \geq w_K(\alpha)$, $\deg\beta < \deg\alpha$ olacak şekilde en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır.

iv) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $K(\alpha)/K$ hatasız bir genişleme ve $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ dır.

v) (K, v) hatasızdır ve her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: 3.4. Önerme göz önüne alındığında (K,v) bir tame cismi olduğu görülür. Böylece kanıt 2.53. Teorem'inin kanıtına benzer şekilde tamamlanır.

3.10. Önerme: K bir cisim, v K cisminin Henselian bir değerlendirmesi ve $\alpha \in \overline{K} \backslash K$, $\alpha\, ayr / K$ olsun. $c \in K$, $\overline{v}(\alpha - c) \geq w_K(\alpha)$ ise aşağıdakiler gerçeklenir.

i) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\overline{v}(\alpha - \beta) \geq w_K(\alpha)$, $\deg\beta < \deg\alpha$ olacak şekilde en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır

ii) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\bar{v}(\alpha - a) \geq \Delta_K(\alpha)$ olacak şekilde en az bir $a \in K$ elemanı vardır.

iii) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\bar{v}(\alpha - \beta) \geq \Delta_K(\alpha)$, $\deg \beta < \deg \alpha$ olacak şekilde en az bir $\beta \in \overline{K}$ elemanı vardır.

iv) Her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $K(\alpha)/K$ hatasız bir genişleme ve $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ dır.

v) (K, v) hatasızdır ve her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $\delta_K(\alpha) = w_K(\alpha)$ dır.

Kanıt: $c \in K$, $\bar{v}(\alpha - c) \geq w_K(\alpha)$ olsun. $[K(c):K] < [K(\alpha):K]$ ve $w_K(\alpha) \geq \Delta_K(\alpha)$ olduğundan (i) ve (ii) ifadeleri aşikardır. (ii) ifadesi yardımıyla da (iii) ifadesi de kolayca görülür.

Ayrıca (ii) ifadesi tekrar göz önüne alınırsa 2.9. Teorem'den dolayı (K, v) bir tame cismi olur. Dolayısıyla (K, v) hatasızdır. Yani her $\alpha \in \overline{K} \backslash K$ elemanı için $K(\alpha)/K$ hatasız bir genişleme olur. $[K(c):K] < [K(\alpha):K]$ eşitsizliği

$$\delta_K(\alpha) \geq \bar{v}(\alpha - c) \tag{3.7}$$

olduğunu da gösterir. Krasner Lemma'dan

$$w_K(\alpha) \geq \delta_K(\alpha) \tag{3.8}$$

olduğu da biliniyor. Varsayımla birlikte (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$w_K(\alpha) = \delta_K(\alpha)$$

eşitliği elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Aghigh K, Khanduja S.K, 2002, On The Main Invariant of Elements Algebraic Over A Henselian Valued Field, Proceeding of The Edinburg Mathematical Society, 45, 219-227

2. Aghigh K, Khanduja S.K, 2003, A Note On Tame Fields, Fields Institute Communications, Vol 33, 1-6

3. Alexandru V, Popescu N, Zaharescu A, 1988, A Theorem of Characterization of Residual Transcendental Extensions of A Valuation, J. Math. Kyoto Univ. (Jmkyaz), 28, 579-592

4. Alexandru V, Popescu N, Zaharescu A, 1990, Minimal Pairs of Definition of A Residual Transcendental Extensions of A Valuation, J. Math. Kyoto Univ. (Jmkyaz), 30, 207-225

5. Ax J, 1970, Zeros of Polynomials Over Local Fields –The Galois Action, J. Algabra, 15, 417-428

6. Bhatia S, Khanduja S.K, 2002, A Characterization of Krasner's Constant, Communications In Algebra, 30(6), 2975-2991

7. Bachman G, 1964, Introduction to p-adic Numbers And Valuation Theory, Academic Press, New York And London

8. Bourbaki N, 1964, Commutative Algebra, Herman, Paris

9. Deuring M, 1966, Lectures On The Theory of Algebraic Functions of One Variable, Springer-Verlag, Bombay

10. Endler O, 1972, Valuation Theory, Springer-Verlag, New York

11. Khanduja S.K, 1992, On Valuations of $K(x)$, Proceedings of The Edinburgh Mathematical Society, 35, 419-426

12. Khanduja S.K, 1995, On A Result of James Ax, Journal of Algebra, 172, 147-151

13. Khanduja S.K, 1998, Tame Fields And Tame Extensions, Journal of Algebra, 201, 647-655

14. Khanduja S.K, Saha J, 1998, On Invariants of Elements Over A Henselian Field, Journal of The Indian Math. Society, Vol 65, Nos1-4, 127-132

15. Khanduja S.K,1999, On Krasner's Constant, Journal of Algebra, 213, 225-230

16. Khanduja S.K, Saha J, 1999, A Generalized Fundamental Principle, Mathematika, 46, 83-92

17. Khanduja S.K, 2002, The Minimum Property of Kraner's Constant, Fields Institute Communications Vol 32, 237-246

18. Mc Charty P, 1966, Algebraic Extensions of Fields, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, London

19. Ohm J, 1989, The Henselian Defect For Valued Function Fields, Proceedings of The American Mathematical Society, Vol 107, No 2, 299-308

20.Ohm J. Matignon M, 1990, Simple Transcendental Extensions of Valued Fields-III; The Uniqueness Property, J. Math. Kyoto Univ., 30, 347-365

21. Schilling O.F.G, 1950, The Theory of Valuations, AMS Surveys, Nr.4, Providence, Rhode Island

22. Weiss E, 1963, Algebraic Number Theory, Chelsea Publishing Company, New York

İNDEKS

A

Ağ (net)	13, 37, 39
Artin-Schreier genişlemesi	13, 14
Aşikar değerlendirme	3
Ayrık değerlendirme	9, 58
Ayrılabilir eleman	7, 20, 26, 40, 41, 48
Ayrılabilir genişleme	7, 15, 17, 22, 27, 33, 39, 40, 42, 48, 57, 58
Ayrılabilir kapanış	7, 29
Ayrılabilirlik derecesi	8
Ayrılamazlık derecesi	8, 15

B

Basit genişleme	6, 33
Birim grubu	4

C

Cebirsel eleman	7, 29, 36, 48
Cebirsel kapanış	7, 16
Conveks grup	13, 48, 51

D

Dallanma indeksi	8, 14
Dallanmamış genişleme	39
Değer grubu	1, 2, 3, 17, 19, 23, 24, 27, 31, 57
Değerlendirme	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,19 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 47, 48, 51, 54, 55, 57, 58, 59, 60
Değerlendirme halkası	4
Değerlendirme tabanı	41
Disk	12, 27, 33

G

Galois genişlemesi	7, 14, 16, 17, 20, 21, 22, 44, 48, 51, 56
Galois grubu	7, 29
Gauss genişlemesi	11, 17, 30

H

Hatasız genişleme	2, 9, 14, 16, 20, 25, 35, 37, 39, 40, 43, 57, 58, 60, 61
Hensel Lemma	13, 14
Henselian değerlendirme	9, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 39, 40, 41, 47, 48, 51, 54, 55, 57, 58, 59,60
Henselian hata	2, 9, 32
Henselizasyon	9, 17
Hilbert Teorem 90	13, 53

İ

İmmediate genişleme 9, 18, 19, 46
İsolated alt grup 6

K

Krasner Lemma 23, 24, 29, 33, 34, 56, 59, 61
Krasner Sabiti 1, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 33, 34, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 59, 60, 61
Kofinal 13, 37

M

Minimal çift 2, 11, 31, 34, 35, 36
Mutlak değer 3, 57

N

Norm 8
Normal genişleme 7, 16, 21, 26, 41, 42

P

p- adik değerlendirme 5
Place 4
p-Sylow alt grup 12, 16, 41

R

Rank 6
Rezidü cismi 1, 2, 5, 17, 19, 23, 27, 31, 57
Rezidü derecesi 8
Rezidül transandant genişleme 1, 2, 10, 30, 31

S

Sıralı grup 3, 47

T

Tamamıyla ayrılabilir eleman 7, 40, 42
Tamamıyla ayrılabilir genişleme 7, 42
Tamamıyla wild genişleme 10, 19, 20
Tame genişlemesi 2, 10, 16, 17, 20, 22, 23, 33, 42, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60
Tamlanış 6, 26, 37
Trace 8, 15, 44, 45, 46, 47, 50, 52, 53
Transandant eleman 10, 17, 30, 32
Transandant genişleme 1, 10, 24, 32

ÖZGEÇMİŞ

12.10.1979 tarihinde Edirne'de doğdum. İlkokulu Edirne Kurtuluş İlkokulunda, ortaokulu ve liseyi Edirne Anadolu Lisesinde okudum. 1997 yılında kayıt olduğum T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden Haziran 2001 döneminde mezun oldum. Ekim 2001 döneminde açılan yüksek lisans sınavını kazanarak yüksek lisansa başladım. 2001 yılında Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı'nda açılan Araştırma Görevlisi sınavını kazanarak göreve başladım. Halen araştırma görevlisi olarak görevimi sürdürmekteyim.