TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mehmet SEZGİN

DOKTORA TEZİ

Danışman:Prof.Dr.Yılmaz Asadoğlu VERDİYEV

Edirne-1998

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SU(2) ve SU(1,1) Gruplarıyla Bağlantılı İntegrallenebilir Kuantum Sistemler

Mehmet SEZGİN

DOKTORA TEZİ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof.Dr.Yılmaz Asadoğlu VERDİYEV

Edirne - 1998

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SU(2) ve SU(1,1) Gruplarıyla Bağlantılı İntegrallenebilir Kuantum Sistemler

Mehmet SEZGİN

DOKTORA TEZİ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 21 / 04 /1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Yılmaz Asadoğlu VERDİYEV
Danışman

Prof.Dr.İsmail Hakkı DURU
Üye

Prof.Dr.Cihan SAÇLIOĞLU
Üye

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET

Bu çalışmada, birinci bölümde SU(2) ve SU(1,1) grupları, bu grupların parametrizasyonu , SU(2) ile SO(3) grubu ve SU(1,1) ile SL(2,R), SO(1,2) grupları arasındaki homomorfizma verildi. İkinci ve üçüncü bölümde aşağıdaki türden olan potansiyeller için verilen kuantum sistemlere bakıldı. Verilen kuantum sistemlerin hal fonksiyonları, spektraları ve S-matrisleri bulundu. Ek A 'da gruplarla bağlantılı Homojen ve Simetrik uzaylar, Laplace-Beltrami operatörü ve İntegrallenebilir Kuantum Sistemler hakkında bilgi verildi. Ek B'de teorik ve pratik araştırmalarda önemli rol oynayan özel fonksiyonlar anlatıldı. Ek C'de parçacığın dalga fonksiyonunu veren Schrödinger denklemi, normalleştirme ve spektrum verildi.

$$
V(x) = \begin{cases} \dfrac{g_1}{\cos^2 x} + \dfrac{g_2}{\sin^2 x} \quad , \quad \dfrac{g_3}{\sin^2 x} & \Big\} \; SU(2) \\[2ex] -\left[\dfrac{g_4}{\sinh^2 x} + \dfrac{g_5}{\cosh^2 x} \right] \quad , \quad -\dfrac{g_6}{4e^x} \quad , \quad -\dfrac{g_7}{\cosh^2 x} & \Big\} \; SU(1,1) \end{cases}
$$

S U M M A R Y

In this study, the SU(2) and SU(1,1) groups, the parametrization of these groups, the homomorphism between SU(2) and SO(3), SU(1,1) and both SL(2,R), SO(1,2) groups are given in the first section. In section 2 and 3, quantum systems related to the potentials considered below are analysed. The state functions, spectra and S-matrices of the given quantum systems are found. The homogeneous and symmetric spaces, Laplace-Beltrami operator and quantum integrable system connected to groups are given in appendix A. The special functions which are important in theoretical and practical researches are described in appendix B. Finally in appendix C, the Schrödinger equation giving the wave function of the particle, normalization and spectrum are presented.

$$V(x)=\begin{cases} \dfrac{g_1}{\cos^2 x}+\dfrac{g_2}{\sin^2 x} \quad , \quad \dfrac{g_3}{\sin^2 x} & \} \; SU(2) \\ \\ -\left[\dfrac{g_4}{\sinh^2 x}+\dfrac{g_5}{\cosh^2 x}\right] \quad , \quad -\dfrac{g_6}{4e^{x}} \quad , \quad -\dfrac{g_7}{\cosh^2 x} & \} \; SU(1,1) \end{cases}$$

Ö N S Ö Z

Bana kendisi ile böyle bir çalışma olanağı tanıyan ve bu çalışmanın tamamlanmasında büyük yardım ve rehberliğini esirgemeyen değerli hocam sayın Prof.Dr. Yılmaz Asadoğlu VERDİYEV'e en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarımı her zaman destekleyen , görüşleri ile yardımcı olan değerli hocalarım Prof.Dr.İsmail Hakkı DURU ve Prof.Dr.Gül-Mirze A. KERİMOV'a teşekkür ederim.

Mehmet SEZGİN

GİRİŞ

SU(2) ve *SU(1,1)* gruplarının simetrik yüzeylerine bağlı bir boyutlu tam çözülebilen kuantum sistemler ele alınmıştır. Bu kuantum sistemler, genelleştirilmiş Pöschl-Teller, Toda ve Morse potansiyellerini içermektedir.

$\Delta_{L,B}$ operatörü X simetrik yüzeyinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörü olup, serbest parçacığın Hamiltonyeni, λ serbest parçacığın enerjisi, *f(x)* hal fonksiyonu olmak üzere, X simetrik yüzeyinde verilmiş serbest parçacık hal denkleminin

$$\Delta_{L,B} f(x) = \lambda\, f(x) \quad , \quad x \in X$$

yüzeyde verilmiş koordinat sistemine uygun gelen "radyal" kısmı bir boyutlu Schrödinger denklemine dönüştürülür. Bu dönüşüm $J^2 = \det(h_{ij})$, (h_{ij}), X yüzeyinde tanımlanmış metrik matris, *H* operatörü, *V* potansiyeline sahip bir boyutlu sistemin Hamiltonyeni olmak üzere

$$\Delta_R = \frac{1}{\sqrt{J}} H \sqrt{J} + sabit$$

şeklinde verilir. *V* potansiyelin ifadesi X yüzeyine ve bu yüzeyde seçilmiş koordinat sistemine bağlıdır. *H* Hamiltonyeni ile verilen bir boyutlu kuantum sistemin tam çözümünün varlığı ve onun açık ifadesi, serbest parçacığın simetri teorisinden belli çözümüne dayanır. Bir boyutlu tam çözülebilen kuantum sistemlerin varlığı yüksek boyutlu yüzeyde serbest parçacığın sahip olduğu simetrinin bozulması sonucu gibi algılanmalıdır.

F.Calogero ile başlayan bir boyutlu *n* parçacıklı kuantum sistemlerin tam çözümlerinin varlığının genel ispatı M.A. Olshanetsky ve M.A. Perelomov [3] tarafından Lie Cebiri teorisine dayanarak verilmiştir. Bu çalışmada saçılma hallerine sahip kuantum sistemler ele alındığı halde , bu tezde hem saçılma hem de bağlı hallere sahip kuantum sistemler ele alınmaktadır.

1. SU(2) ve SU(1,1) GRUPLARI

1.1. Grup.

$G \neq \emptyset$ bir küme, bu kümede $\circ : G \times G \to G$ bir ikili işlem verilmiş olsun.

- $\forall a,b \in G$ için $a \circ b \in G$, kapalılık özelliği
- $\forall a,b,c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, birleşme özelliği
- $\circ$ işlemine göre G 'de bir birim eleman vardır.
  $\exists e \in G \ni \forall a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ dir.
- $\circ$ işlemine göre verilen her elemanın bir tersi vardır.
  $\forall a \in G$ *için* $\exists a^{-1} \in G \ni a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ dir.

Bu özellikleri sağlayan $(G,\circ)$ cebirsel yapısına grup denir. Ayrıca, $\circ$ işlemine göre değişme özelliği var, $\forall a,b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ ise gruba Komutatif veya Abel grubu denir. Kompleks sayılar kümesi C, toplama işlemine göre grup oluşturur, $C_o = C - \{0\}$ kümesi de çarpma işlemine göre grup oluşturur. $(R,+)$ kümesi bir değişmeli gruptur. Uzayda dönmeler, ötelemeler, simetriler topluluğu da hareketler grubunu oluşturur.

G grubunun eleman sayısı n ise buna grubun mertebesi denir ve $n = |G|$ ile gösterilir. Sonlu sayıda elemanı olan gruba sonlu grup, sonlu sayıda elemanı olmayan bir gruba da sonsuz grup denir. Sonsuz grubun mertebesi de sonsuz olarak tanımlanır.

Grubun elemanları reel parametrelerin bir kümesiyle karakterize edilebilirse gruba sürekli grup denir ve grubun mertebesi de bağımsız parametrelerin sayısı olarak tanımlanır. Her bir dönme (α,β,θ) üç bağımsız parametreyle verilebilir ki bunlar Euler açılarıdır ve bu küme dönmelerin sürekli grubudur. $x' = ax + b$ dönüşümlerinin kümesi grup oluşturur ve a,b parametreleri $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı olduğundan grup iki parametreli sürekli grup olur.

G bir grup, H, G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. H da grup ise buna G 'nin bir altgrubu denir. H 'ın G grubunun bir altgrubu olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır. e, G grubunun birimi ise G ve $\{e\}$, G grubunun aşikar altgruplarıdır.

H_1 *ve* H_2, G grubunun iki altgrubu olsun. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, $g \in G$ *ise* $g = h_1 h_2$ olarak tek şekilde ifade edilsin ve $h_1 h_2 = h_2 h_1$ *ise* G grubu H_1 *ve* H_2 gruplarının direkt çarpımı olarak yazılabilir, $G = H_1 \times H_2 = \{(h_1,h_2)|h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$. Direkt çarpım uzayında birim eleman $e=(e_1,e_2)$ ve ters eleman $g=(h_1,h_2)$, $g^{-1}=(h_1,h_2)^{-1}=(h_1^{-1},h_2^{-1})$ dir.

H, G grubunun bir altgrubu olsun. $\forall h \in H$ *ve* $\forall g \in G$ *için* $ghg^{-1} \in H$ *ise* H altgrubuna invaryant veya normal altgrup denir.

$g \notin H$, $g \in G$ olmak üzere $gH = \{gh|g \in G, h \in H\}$ kümesine G de H 'ın denklik sınıfları denir. Farklı g 'ler için farklı denklik sınıfları alırız. İki denklik sınıfı ya çakışır yada kesişimleri boş kümedir. Bu denklik sınıfları G grubunun bir ayrışımını oluştururlar. H invaryant altgrup, $H, aH, bH, ...$, altkümelerine grubun elemanları olarak bakılabilir, bu durumda G/H grubu bölüm grubu olarak tanımlanır.

G_1, G_2 iki grup, $f: G_1 \to G_2$ bir dönüşüm olmak üzere, $g,h \in G_1$ için $f(gh)=f(g)f(h)$ ise f dönüşümüne bir homomorfizma denir. G_1, G_2 grupları arasındaki bire-bir homomorfizmaya izomorfizma denir ve bu iki grubun izomorf olduğu söylenir, $G_1 \cong G_2$. G_1 grubunun kendisine bir izomorfizması otomorfizma olarak tanımlanır. G_1 grubunun çeşitli elemanları G_2 grubunun ayni elemanına karşı gelebilir, özellikle G_2 grubunun e' birim elemanına. G_1 grubunun $e_1, e_2, ...$ elemanlarının kümesini E ile gösterirsek bu G_1 grubunun invaryant bir altgrubudur ve G_1/E bölüm grubu G_2 grubuna izomorftur. E altgrubu homomorfizmanın çekirdeği olarak tanımlanır.

Bir topolojik grubun parametrik uzayı R^n uzayında kompakt ise topolojik grup kompakttır denir. Euclidean uzayda bir bölge kapalı yani sınırlı ve limit noktalarını içeriyorsa kompakttır denir. Bununla beraber grupla parametrik bölge topolojik eşyapılı olmalıdır, başka sözle grubun elemanlarının komşuluğuna parametrik uzayda noktaların komşuluğu karşılık gelmelidir. Topolojik grup yukarıdaki özelliği sağlamıyorsa kompakt değildir denir. $U(n), SU(n), O(n), SO(n), Sp(n)$ grupları kompakt, $GL(n), SL(n)$, $U(p,q-p)$, $O(p,q-p), SU(p,q-p), SO(p,q-p)$ grupları kompakt değildir.

G sürekli bir grup, $a,b \in G$. a, b elemanlarına grubun parametrik uzayında A, B noktaları karşı gelsin. Eğer A, B noktaları verilen bölgede sürekli bir yolla bağlantılı ise, a, b elemanları da G grubunda sürekli bir yolla bağlantılı olduğu söylenir. Eğer G grubunun herhangi iki elemanı bu şekilde bağlı ise G grubuna bağlantılıdır denir.
$GL(n,C), SL(n,C), SL(n,R), U(n), SU(n,) SO(n), U(p,q-p), SU(p,q-p)$ grupları bağlantılı, $GL(n,R), O(n), SO(p,q-p), O(p,q-p)$ grupları bağlantılı değildir. Bağlantılı bir G grubunda, eğer herhangi kapalı bir eğri bir noktaya sürekli

şekilde büzülebilirse, grup basit bağlantılı, büzülemiyorsa grubun çok bağlantılı olduğu söylenir. G grubunda tüm kapalı yollar belirli türden sınıflara ayrılırsa herbiri diğerine sürekli olarak deforme edilebilir. Farklı sınıfların sayısı m ise G grubu m defa bağlantılıdır denir. *SU(n)* grubu basit bağlantılı, *SO(3)* grubu iki defa bağlantılıdır.

Matrislerin grupları olarak tanımlanan sürekli lineer dönüşüm grupları fiziksel uygulamalarda önemli rol oynar. Bu türden olan n boyutlu grupları ele alırsak ki her bir eleman n adet reel parametreyle verilebilir. Bu durumda bu grubun elemanları ile n-boyutlu reel Euclidean R^n uzayın bir bölgesinin noktaları arasında bire-bir uygunluk oluşturmak mümkündür. Grubun parametrelerinin verildiği bölge parametrik uzay olarak tanımlanır. Belirli bir grup doğal olarak bir çok koordinat sistemi kabul eder. Bunların her biri grubun bir parametrizasyonu olarak tanımlanır.

G bir grup ;

- G bir analitik manifold,
- $x \to x^{-1}$ dönüşümü analitik,
- $G \times G \to G$ dönüşümü de analitikse G grubuna bir Lie grubu denir.

R reel sayılar kümesi bir Lie grubu oluşturur. Manifold kompleks ise grup kompleks Lie grubu olur. n-boyutlu kompleks Lie grubu $2n$-boyutlu reel Lie grubu olarak alınır. Lie grubunun boyutu manifoldun boyutuna eşittir. Her bir Lie grubu ayni zamanda bir topolojik gruptur.

$n \times n$ matris gruplarının listesini verelim ki bunlar ayni zamanda Lie gruplarıdır.

GL(n,C) : M, kompleks regüler matrislerin genel lineer grubu, $\det M \neq 0$,
boyutu $r = 2n^2$ dir.

SL(n,C) : Özel lineer grup, *GL(n,C)* grubunun bir altgrubudur, $\det M = 1$,
boyutu $r = 2(n^2 - 1)$ dir.

GL(n,R) : M reel regüler matrislerin genel lineer grubudur, $\det M \neq 0$,
boyutu $r = n^2$ dir.

SL(n,R) : Özel lineer grup, *GL(n,R)* grubunun bir altgrubudur, $\det M = 1$,
boyutu $r = n^2 - 1$ dir.

U(n) : $uu' = u'u = 1$ koşulunu sağlayan kompleks matrislerin üniter
grubudur. u' de u matrisinin kompleks eşleniğidir, boyutu $r = n^2$ dir .

SU(n) : Özel üniter grup, *U(n)* grubunun bir altgrubudur, $\det u = 1$,
boyutu $r = n^2 - 1$ dir .

$O(n,C)$: $AA' = 1$ koşulunu sağlayan A kompleks matrislerin ortogonal grubudur, $\det A = \pm 1$, boyutu $r = n(n-1)$ dir .

$O(n,R)$: $AA' = 1$ koşulunu sağlayan A reel matrislerin ortogonal grubudur, $\det A = \pm 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir .

$SO(n)$: n boyutlu özel ortogonal grup veya dönme grubu $O(n)$ grubunun bir altgrubudur, $\det A = 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir .

$Sp(n)$: Simplektik grup, $u' A u = A$ koşulunu sağlayan $n \times n$ üniter matrislerin grubudur. Burada A singüler olmayan anti-simetrik matris , u' de u matrisinin transpozudur, boyutu $r = n(n+1)/2$ dir .

$U(m,n\text{-}m)$: $AgA' = A$ koşulunu sağlayan A kompleks matrislerin pseudo-üniter grubudur. Burada g, $g_{kk} = -1$, $p+1 \le k \le q$ ve $g_{kk} = 1$, $1 \le k \le p$ elemanlı diagonal matristir , boyutu $r = n^2$ dir .

$SU(m,n\text{-}m)$: Özel pseudo-üniter grup $U(m,n\text{-}m)$ grubunun bir altgrubudur, $\det A = 1$, boyutu $r = n^2 - 1$ dir .

$O(m,n\text{-}m)$: $AgA' = A$ koşulunu sağlayan A reel matrislerin pseudo-ortogonal grubudur, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir .

$SO(m,n\text{-}m)$: Özel pseudo-ortogonal grup $O(m,n\text{-}m)$ grubunun bir altgrubudur, $\det A = 1$, boyutu $r = n(n-1)/2$ dir .

$GL(n,C)$ grubunun her elemanı $2n^2$ boyutlu R_{2n^2} reel Euclidean uzayda bir noktaya karşı gelir. Diğer bütün gruplar $GL(n,C)$ grubunun bir altgrubudur ve uygun parametrik uzaylar R_{2n^2} uzayının altuzaylarıdır.

1.2. SU(2) Grubu.

Özel üniter grup $SU(2)$,

- Ünimodülerlik koşulu : $\det g = 1$,
- Üniterlik koşulu : $g' g = 1$,

koşullarını sağlayan *2x2*, g matrislerinin grubudur. Burada g', g matrisinin hermitik eşleniğidir. Üç parametreli $SU(2)$ grubu $\det g = 1$ olan tüm *2x2* kompleks matrisleri içeren $SL(2,C)$ özel lineer grubun bir altgrubudur.

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,C)$$

Üniterlik koşulundan $\delta = \overline{\alpha}$, $\gamma = \overline{\beta}$ ve ünimodülerlik koşulundan da

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

alınır. Böylece *SU(2)* grubunun elemanları

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \in SU(2,C)\ ,\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \qquad (1.1)$$

formunda ikinci mertebeden ünimodüler üniter matrisler olup (α,β) kompleks sayı çiftiyle tek şekilde belirlenir. $\alpha=x_1+ix_2\ ,\beta=x_3-ix_4$ şeklinde alırsak $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ koşulundan $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ bulunur.

$$x\in S^3\ ,\quad \Phi(x)\in SU(2)\quad ,\ \Phi\colon x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\rightarrow\begin{pmatrix}x_1+ix_2 & -x_3+ix_4 \\ x_3+ix_4 & x_1-ix_2\end{pmatrix},$$

bire-bir ve örten dönüşüm olmak üzere $\|x\|^2=\det\Phi(x)=1$ koşulu sağlanır. Böylece *SU(2)* grubu bir topolojik uzay olarak , R^4 dört boyutlu reel uzayda S^3 birim küresine homomorf olur. Burada *SU(2)* grubunun manifolduyla S^3 birim küresinin özdeş olduğu söylenir.

1.2.1. SU(2) Grubunun Parametrizasyonu.

Grubu aynı anda birden fazla parametreyle incelemek güçtür. Bu nedenle grubun bir parametreli altgrupları verilir. Grubun bir parametreli altgruplarını vermek demek grubun manifoldunda koordinat sistemi vermek demektir. Grup bir çok koordinat sistemi kabul eder ki bunların her biri grubun bir parametrizasyonu olarak tanımlanır. Yukarıda verilen (α,β) kompleks sayıları , $|\alpha|, \arg(\alpha), \arg(\beta)$ gibi üç reel parametreyle verilebilir. $\alpha.\beta\neq 0$ ise (φ,θ,ψ) parametrelerini almak daha uygundur ki bu parametreler Euler açıları olarak bilinir ve *SU(2)* grubunun elemanlarının parametrizasyonunda kullanılır. Bu parametrelerle $|\alpha|, \arg(\alpha), \arg(\beta)$ arasındaki bağıntılar

$$|\alpha|=\cos(\theta/2), |\beta|=\sin(\theta/2)\ ,\ \arg(\alpha)=(\varphi+\psi)/2, \arg(\beta)=(\varphi-\psi+\pi)/2$$

formülleri ile verilir. (φ,θ,ψ) parametreleri $0\leq\varphi\langle 2\pi,\ 0\leq\theta\langle\pi,\ -2\pi\leq\psi\langle 2\pi$ şeklinde tanımlansın. $(\alpha,\beta)\rightarrow(\varphi,\theta\psi)$ dönüşümü bire-bir dir. Böylece (φ,θ,ψ) parametrizasyonu *SU(2)* grubunun her yerinde tanımlıdır.

Euler açılarıyla *SU(2)* grubunun bir elemanı

$$g(\varphi,\theta,\psi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2} & i\sin(\theta/2)e^{i(\varphi-\psi)/2} \\ i\sin(\theta/2)e^{i(\psi-\varphi)/2} & \cos(\theta/2)e^{i(\varphi+\psi)/2}\end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

şeklinde verilir . Bu *SU(2)* grubunun bir parametrizasyonudur. Grubun başka parametrizasyonlarını da vermek mümkündür . (1.2) ifadesi

$$g(\varphi,\theta,\psi)=g(\varphi,0,0)\ g(0,\theta,0)\ g(0,0,\psi)$$
$$=\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2}\end{pmatrix}$$

şeklinde çarpımsal formda yazılabilir ve bu *SU(2)* grubunun bir parametreli altgruplarına Cartan açılımıdır.

1.2.2. SU(2) Grubunun Diğer Gruplarla Bağlantısı.

SU(2) ve *SO(3)* grupları arasındaki ilişkiyi verelim. $x=(x_1,x_2,x_3)$ üç boyutlu R^3 uzayının her bir vektörüne karşı ikinci mertebeden

$$h_x=\begin{pmatrix} x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & -x_3\end{pmatrix}\ ,\quad -\det h_x=x_1^2+x_2^2+x_3^2 \qquad (1.3)$$

formunda kompleks matrisler verilebilir. Bu matrisler izi sıfır olan Hermityen matrislerdir. *SU(2)* grubunun her bir *g* elemanıyla bağlantılı *T(g)* dönüşümü h_x matrisini $T(g)h_x=gh_xg^{\dagger}$ formundaki matrise dönüştürür. $T(g)h_x$ matrisi Hermityen ve izi sıfırdır.

$$tr\, gh_xg^{\dagger}=tr\, g^{\dagger}gh_x=tr\, h_x=0\quad ,\quad \det gh_xg^{\dagger}=\det g\ \det h_x\ \det g^{\dagger}=\det h_x$$

Böylece

$$T(g)h_x=\begin{pmatrix} y_3 & y_1+iy_2 \\ y_1-iy_2 & -y_3\end{pmatrix}=h_y\ ,\quad -\det h_y=y_1^2+y_2^2+y_3^2 \qquad (1.4)$$

olur ki $y=(y_1,y_2,y_3)$ üç boyutlu R^3 uzayının bir vektörüdür. $T(g)$ üç boyutlu uzayda bir lineer dönüşüm olarak bakılabili, $T(g)x=y$. Bu dönüşüm bir dönmedir, $\det h_x=-x_1^2-x_2^2-x_3^2$, $h_x=\det[T(g)h_x]$. Buradan *T(g)* dönüşümüyle Euclidean uzayda noktalar arasındaki uzaklık değişmez kalır. Böylece $T(g)\in SO(3)$ olur. Her $g\in SU(2)$ matrisi için $T(g)\in SO(3)$ dönüşümü verilir ki bu dönüşüm *SU(2)* ile *SO(3)* grupları arasında bir homomorfizma tanımlar. Homomorfizmanın çekirdeğinde $\{e,-e\}$ matrisleri bulunur , yani *SU(2)* grubunun iki elemanına karşılık *SO(3)* grubunda bir eleman karşılık gelir. *SU(2)* ve *SO(3)* grupları lokal olarak izomorftur, $SU(2)/\{e,-e\}\cong SO(3)$ ve *SU(2)* grubu *SO(3)* grubunu iki defa örter. *SU(2)* grubu basit bağlantılı olduğundan *SO(3)* grubu da iki kere bağlantılıdır.

1.3. SU(1,1) Grubu.

Özel pseudo-üniter grup $SU(1,1)$,
- Ünimodülerlik koşulu : $\det g = 1$,
- Pseudo-üniterlik koşulu : $g^t \sigma g = \sigma$, $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

koşullarını sağlayan $2x2$, g matrislerinin grubudur. $SU(1,1)$ grubunun elemanları ,

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1), \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \tag{1.5}$$

formunda ikinci mertebeden pseudo-üniter ünimodüler matrisler olup (α,β) kompleks sayı çiftiyle tek şekilde belirlenir. $\alpha = x_1 + ix_2$,$\beta = x_3 - ix_4$ şeklinde alırsak $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ koşulundan

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1 \tag{1.6}$$

bulunur. Bu $R^4_{2,2}$, dört boyutlu reel pseudo-Euclidean uzayda tek oyuklu bir Hiperboloid tanımlar. Buradan $SU(1,1)$ grubunun manifolduyla $R^4_{2,2}$ uzayındaki bir oyuklu Hiperboloidin özdeş olduğu söylenir. (1.6) denkleminden $SU(1,1)$ grubu kompakt değildir.

1.3.1. SU(1,1) Grubunun Parametrizasyonu.

$SU(1,1)$ grubunun parametrizasyonu $SU(2)$ grubuna benzer şekilde verilir. $SU(1,1)$ grubu içinde (φ,θ,ψ) reel parametreleri alabiliriz. $SU(2)$ grubunun her elemanı için $\theta = it$, $t \in R$ dönüşümü yapılarak $SU(1,1)$ grubunun bir elemanına dönüştürülür.

$$u(0,\theta,0) = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} \in SU(2), \qquad \theta = it \text{ alırsak}$$

$$g(0,t,0) = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh\theta/2 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$$

buluruz. Buradan, $0 \le \varphi \langle 2\pi$, $0 \langle t \langle \infty$, $-2\pi \le \psi \langle 2\pi$ olmak üzere (φ,θ,ψ) parametreleriyle $SU(1,1)$ grubunun bir elemanı

$$g(\varphi,t,\psi) = \begin{pmatrix} \cosh(t/2)\, e^{i(\varphi+\psi)/2} & \sinh(t/2)\, e^{i(\varphi-\psi)/2} \\ \sinh(t/2)\, e^{i(\psi-\varphi)/2} & \cosh(t/2)\, e^{-i(\varphi+\psi)/2} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

şeklinde verilir. Bu *SU(1,1)* grubunun bir parametrizasyonudur. (1.7) ifadesi

$$g(\varphi,t,\psi)=g(\varphi,0,0)\,g(0,t,0)\,g(0,0,\psi)$$
$$=\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh(t/2) & \sinh(t/2)\\ \sinh(t/2) & \cosh(t/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0\\ 0 & e^{-i\psi/2}\end{pmatrix}$$

şeklinde çarpımsal formda yazılabilir. Bu *SU(1,1)* grubunun bir parametreli altgruplarına Cartan açılımıdır.

1.3.2. SU(1,1) Grubunun Diğer Gruplarla Bağlantısı.

$c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}$ üniter matrisini alalım. $h=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in SL(2,R)$ reel ünimodüler matris olmak üzere $g=chc^{t}$ üniter dönüşümüyle

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in SU(1,1)\ ,\ |a|^2-|b|^2=1$$

pseudo-üniter ünimodüler g matrisini buluruz. Böylece *SU(1,1)* grubu, elemanları reel ünimodüler olan *2x2* matrisler grubu *SL(2,R)* 'a izomorftur. *SL(2,R)* grubunun bir h elemanı,

$$h(\theta,\varphi,\psi)=h(\theta,0,0)\,h(0,\varphi,0)\,h(0,0,\psi)$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)\\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\varphi/2} & 0\\ 0 & e^{-\varphi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \psi\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

formunda yazılabilir. Bu $h\in SL(2,R)$ grubunun Iwasawa açılımıdır.
$SL(2,R)$ grubundan $SU(1,1)$ grubuna verilen $g{:}h\rightarrow chc^{t}$ izomorfizmasıyla $SU(1,1)$ grubunun elemanları üç farklı bir parametreli altgruplar şeklinde verilir.

$$g_\theta=ch_\theta c^{t}=\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}\qquad \text{(Eliptik tür),}$$

$$g_\varphi=ch_\varphi c^{t}=\begin{pmatrix}\cosh(\varphi/2) & \sinh(\varphi/2)\\ \sinh(\varphi/2) & \cosh(\varphi/2)\end{pmatrix}\qquad \text{(Hiperbolik tür),}$$

$$g_\psi=ch_\psi c^{t}=\begin{pmatrix}1+i\psi/2 & -i\psi/2\\ i\psi/2 & 1-i\psi/2\end{pmatrix}\qquad \text{(Parabolik tür).}$$

Eliptik tür $SU(1,1)$ grubunun maksimum kompakt altgrubu, hiperbolik ve parabolik türler ise kompakt olmayan altgruplardır.

Üniter ünimodüler *SU(2)* grubu *SO(3)* dönme grubuna homomorf, pseudo-üniter ünimodüler $SU(1,1)$ grubu ise üç boyutlu *SO(1,2)* Lorentz grubuna homomorftur.

SO(1,2) grubu, $R^3_{1,2}$ üç boyutlu pseudo-Euclidean veya M^3 Minkowski uzayında, $x=(x_0,x_1,x_2)$ vektör, $[x,x]=x_0^2-x_1^2-x_2^2$ skaler çarpımıyla $\det A=1$ olan $x'=Ax$ dönüşümlerinin bir grubudur. *SO(1,2)* grubunda bir lineer dönüşüm skaler çarpımı invaryant bırakır, $[x',x']=[x,x]$.

M^3 uzayında $[x,x]=0$ konisi üç kısma ayrılır.

1- $[x,x]>0$, koninin dışı,

2- $[x,x]=0$, koninin yüzeyi,

3- $[x,x]<0$, koninin içi.

Koninin iç bölgesi, $x_0>0$ üst yarım bölge, $x_0<0$ alt yarım bölge olmak üzere iki kısma ayrılır. *SO(1,2)* grubu $[x,x]=0$ konisinde, $[x,x]=-c<0$ ise, bir oyuklu hiperboloidte, $[x,x]=c>0$ ise iki oyuklu hiperboloidte geçişlidir. $x:x\to x(x_0,x_1,x_2)=x_0I+x_1\sigma_1+x_2\sigma_2$, dönüşümünü alalım, burada

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\qquad \text{dir.}$$

$x'=(x_0',x_1',x_2')$, M^3 uzayında bir vektör olmak üzere, $g\in SU(1,1)$ ise $x'=gxg'$ dönüşümünden bir pseudo-üniter matris bulunur. $\det x'=\det x=[x,x]$ ve $x_0>0$ ise $x_0'>0$, $x_0<0$ ise $x_0'<0$ dir. Böylece *SU(1,1)* grubunun g elemanıyla M^3 uzayındaki $x'=A(g)x$ lineer dönüşümü *SO(1,2)* grubunun elemanı olur. Bu *SU(1,1)* grubu ile *SO(1,2)* grubu arasında bir homomorfizma teşkil eder. Homomorfizmanın çekirdeğinde $\{I,-I\}$ elemanları bulunur. Yani *SU(1,1)* grubunun iki elemanına karşılık *SO(1,2)* grubunun bir elemanı karşılık gelir ve *SU(1,1)* grubu *SO(1,2)* grubunu iki defa örter, $SU(1,1)/\{\pm I\}\cong SO(1,2)$.

SU(1,1) ve *SL(2,R)* grupları veya *SU(2)* ve *SL(2,C)* grupları kompleks düzlemin bir doğrusal kesir dönüşümüne homomorftur.

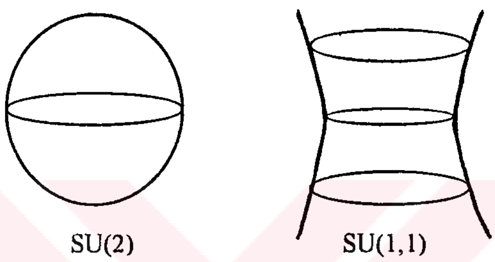
$$g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL(2,C)\ ,\ z\in\overline{C}=C\cup\{\infty\},\ w(g):z\to gz=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\ .$$

SU(1,1) grubunun elemanları ile verilen doğrusal kesir dönüşüm birim çemberi yine kendisine dönüştürür. *SL(2,R)* grubunun elemanlarıyla verilen doğrusal kesir dönüşüm alt ve üst yarım düzlemleri kendisine dönüştürür.

Özel olarak, $w(c):z\to cz=\dfrac{z-i}{z+i}$ doğrusal kesir dönüşümünü alalım ki bu dönüşüm Cayley dönüşümü olarak tanımlanır. Bu dönüşümle üst yarım düzlem birim çembere dönüşür ve *SU(1,1)* ile *SL(2,R)* grupları arasındaki izomorfizma oluşturulabilir.

SU(2) grubu kompakt, *SU(1,1)* grubu kompakt değildir. *SU(2)* ve *SU(1,1)* gruplarını birleştirilmiş halde ifade etmek mümkündür.Bunun için grup elemanları $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\varepsilon^2\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$ formunda yazılabilir. Bu durumda ünimodülerlik koşulu $|\alpha|^2 + \varepsilon^2|\beta|^2 = 1$ olur. Buradan , $\varepsilon = 1$ alınırsa *SU(2)* grubunun, $\varepsilon = -i$ alınırsa *SU(1,1)* grubunun elemanı olur.

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \qquad\qquad x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1$$



***SU(2)* ve *SU(1,1)* Gruplarının Manifoldu**

2. SU(2) GRUBU İLE BAĞLANTILI KUANTUM SİSTEMLER

SU(2) grubunun homojen simetrik uzayında çeşitli koordinat sistemleri verilebilir. Homojen simetrik uzayda verilen farklı koordinat sistemleri farklı kuantum sistemler verecektir. Burada dört boyutlu uzayda verilmiş üç boyutlu kürede iki farklı koordinat sistemi ele alacağız.

1. Biküresel Koordinat Sistemi.

R^4 dört boyutlu Euclidean uzayda biküresel koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_1 = r\cos\theta\cos\varphi_1 \ , \ x_2 = r\cos\theta\sin\varphi_1 \ , \ x_3 = r\sin\theta\cos\varphi_2 \ , \ x_4 = r\sin\theta\sin\varphi_2 \qquad (2.1)$$

$$0 < r < \infty \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le \varphi_1, \varphi_2 \le 2\pi$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $[x,x] = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$ olmak üzere $[x,x] = a$ denklemi R^4 Euclidean uzayda yerleşmiş S^3 küresini tanımlar, burada a bir sabittir.. Küre üzerinde $\theta = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $r = 1$ için $\overset{o}{x} = (1,0,0,0)$; $\overset{o}{x}$ noktasını yerinde saklayan dönüşümlerin *SO(3)* altgrubu olduğu açıktır.

$g_{ij}(\psi)$, $i,j = 1,\ldots,4$, *(i,j)* düzleminde ψ açısı kadar dönme olmak üzere küre üzerinde keyfi nokta x, $[x,x]$ kuadratik formunu invaryant saklayan *SO(4)* grubunun $g_x = g_{12}(\varphi_1) g_{13}(\theta) g_{34}(\varphi_2)$ elemanı ile $x = \overset{o}{x} g_x$ şeklinde ifade edilir. Bir parametrik altgruplar jeodesik yolları tanımladığından $\varphi_1, \theta, \varphi_2$, S^3 küresinin jeodesik yollarının koordinatlarıdır.

Biküresel koordinatlarda (g_{ab}) metrik matrisi bulalım . Yüzey üzerinde metrik matris yüzeye teğet vektörlerin skaler çarpımıyla tanımlanır ve

$$(g_{ab}) = [\dot{x}_a, \dot{x}_b] \ , \ a,b = 1,\ldots,4 \tag{2.2}$$

bağıntısıyla bulunur. Buradan biküresel koordinatlarda metrik matris

$$(g_{ab}) = diag(1, r^2, r^2\cos^2\theta, r^2\sin^2\theta) \tag{2.3}$$

şeklinde bulunur. Bu metrik matrisin tersi $(g_{ab})^{-1} = (g^{ab})$

$g = \det(g_{ab}) = r^6 \cos^2\theta \ \sin^2\theta$ olmak üzere

$$(g^{ab}) = \frac{(Cof\ g_{ab})^t}{g} \tag{2.4}$$

bağıntısından

$$(g^{ab}) = diag\left(1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\cos^2\theta}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right) \tag{2.5}$$

şeklinde bulunur.

Metrik matristen istifade ederek biküresel koordinatlarda Laplace operatörünü ifade edersek

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\sqrt{g}\, g^{ab}\frac{\partial\Phi}{\partial x^b}\right) \ , \ a,b = 1,\ldots,4 \tag{2.6}$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2^2}\right] \tag{2.7}$$

olur. Laplace operatörünü

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{L,B}\Phi$$

şeklinde yazarsak , ilk terim laplace operatörünün radyal parçasını , $\Delta_{L,B}\Phi$ de yüzey üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörünü oluşturur. Burada

$$\Delta_{L,B}\Phi = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2^2} \qquad \text{dir.}$$

$$\Delta_{L,B}\Phi(\theta,\varphi_1,\varphi_2) = -l(l+2)\Phi(\theta,\varphi_1,\varphi_2) \tag{2.8}$$

denklemini değişkenlerine ayırma metoduna göre

$$\Phi(\theta,\varphi_1,\varphi_2) = V(\theta)\, e^{im\varphi_1}\, e^{in\varphi_2}$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. Bu durumda (2.8) denklemini düzenlersek

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \left[\cot\theta - \tan\theta\right]\frac{dV}{d\theta} - \left(\frac{m^2}{\cos^2\theta} + \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)V = -l(l+2)V \tag{2.9}$$

denklemini buluruz. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ aralığında $(0,\frac{\pi}{2})$ noktaları bu denklemin singüler noktalarıdır. (2.9) denklemini bilinen türden denklemlere dönüştürelim. Bunun için denklemde

$$V(\theta) = \tan^{\lambda_1}\theta\cos^{\lambda_2}\theta\, w(\theta) = \sin^{\lambda_1}\theta\cos^{\lambda_2-\lambda_1}\theta\, w(\theta) \tag{2.10}$$

dönüşümü yapalım. Buradan $\frac{dV}{d\theta}, \frac{d^2V}{d\theta^2}$ türev ifadelerini bulur ve (2.9) denkleminde yazarsak denklem

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + \left[(2\lambda_1+1)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (2\lambda_2 - 2\lambda_1 + 1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\frac{dw}{d\theta} +$$

$$\times\left[\lambda_1^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - 2\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1) - 2\lambda_1 - 2(\lambda_2-\lambda_1) + (\lambda_2-\lambda_1)^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{m^2}{\cos^2\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta} + l(l+2)\right]w = 0 \tag{2.11}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemde $z = -\tan^2\theta$ değişken dönüşümü yapalım. Bu dönüşüme göre $(0,\frac{\pi}{2})$ singüler noktalarımız $(0,\infty)$ singüler noktalarına dönüşür.

$$1 - z = \frac{1}{\cos^2\theta}\ , \quad \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = -z\ , \quad -\frac{1-z}{z} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{dw}{d\theta} = -2\sqrt{-z}\,(1-z)\frac{dw}{dz}\ , \qquad \frac{d^2w}{d\theta^2} = -4z(1-z)^2\frac{d^2w}{dz^2} - (2-6z)(1-z)\frac{dw}{dz}$$

türev bağıntılarını (2.11) denkleminde yazarsak

$$-4z(1-z)^2\frac{d^2w}{dz^2}-2(1-z)\left[-(3z-1)+(2\lambda_1+1)+(2\lambda_2-2\lambda_1+1)\right]\frac{dw}{dz}+$$
$$\times\left[\frac{n^2-\lambda_1^2}{z}-2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_1^2-2\lambda_2-(\lambda_2-\lambda_1)^2z-m^2(1-z)-n^2+l^2+2l\right]w=0$$

(2.12)

denklemini buluruz. Denklemde $\lambda_1=n$, $\lambda_2=l$ alırsak denklem singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\left[(n+1)-(-l+n+1)z\right]\frac{dw}{dz}-\frac{m^2-(l-n)^2}{-4}w=0 \tag{2.13}$$

Hipergeometrik denkleme dönüşür. Bu denklemi

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{du}{dz}-abu=0 \tag{2.14}$$

Hipergeometrik denklemiyle karşılaştırırsak parametreler

$$c=n+1\ ,\ a+b+1=-l+n+1\ ,\ a=\frac{-l+m+n}{2}\ ,\ b=\frac{-l-m+n}{2}$$

olur. Buradan (2.13) Hipergeometrik denkleminin *z=0* civarındaki regüler çözümü ,

$c\neq -n$, $n=0,1,2,\ldots$ ise,

$$w(z)=F(a,b;c;z)=F(\frac{-l+m+n}{2},\frac{-l-m+n}{2};n+1;z)$$

$c=-n$, $n=0,1,2,\ldots$ ise, (2.15)

$$w(z)=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)=z^{-n}F(\frac{-l+m-n}{2},\frac{-l-m-n}{2};n+1;z)$$

olur. İkinci çözüm regüler olması koşulunu sağlamadığından çözüm olarak alınmaz. Bu durumda (2.13) denkleminin çözümü

$$w(z)=c_1F(\frac{-l+m+n}{2},\frac{-l-m+n}{2};n+1;z) \tag{2.16}$$

olur. Buradan (2.9) denkleminin çözümü

$$V(\theta)=c_1\tan^n\theta\cos^l\theta\,F(\frac{-l+m+n}{2},\frac{-l-m+n}{2};n+1;-\tan^2\theta) \tag{2.17}$$

olarak bulunur. Çözümün $\theta=\frac{\pi}{2}$ noktasında regüler olması koşulundan $|n|\langle l$ alırız .

Hipergeometrik fonksiyonun Jacobi polinomuyla ifadesi

$$F(-r,-r-\beta;\alpha+1;\frac{z'-1}{z'+1})=\binom{r+\alpha}{r}^{-1}\left(\frac{z'+1}{2}\right)^{-n}P_r^{(\alpha,\beta)}(z') \tag{2.18}$$

şeklinde verilir.

$\frac{-l+m+n}{2}=-k$, $-l=-2k-m-n$ ve $z'=\cos 2\theta$ dönüşümü yapalım.

$$z=-\tan^2\theta\ ,\ z'=\frac{1+z}{1-z}\ ,\ z=\frac{z'-1}{z'+1}$$

Bu durumda $(0,\frac{\pi}{2})$ singüler noktaları $(1,-1)$ singüler noktalarına dönüşür. (2.17) çözümündeki Hipergeometrik fonksiyonu (2.18) formunda ifade edersek , $r=k$, $\alpha=n$, $\beta=m$

$$F(-k,-k-m;n+1;\frac{z'-1}{z'+1})=\binom{k+n}{k}^{-1}\left(\frac{z'+1}{2}\right)^{-k}P_k^{(n,m)}(z') \tag{2.19}$$

şeklinde olur. Bu ifadeyi (2.17) çözümünde yazarsak çözümün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$V(\theta)=c_1\frac{k!\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)}\sin^n\theta\cos^m\theta\ P_k^{(n,m)}(\cos2\theta) \tag{2.20}$$

olarak bulunur. Şimdi çözümdeki c_1 sabitini belirleyelim.

Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{\alpha}\ (1+z)^{\beta}\ P_k^{(\alpha,\beta)}(z)\ P_{k'}^{(\alpha,\beta)}(z)\ dz=h_k \tag{2.21}$$

şeklinde verilir. $\int_{-1}^{1}|V(\theta)|^2\ dz'=\delta_{kk}$ koşulundan c_1 sabiti

$$|c_1|^2=\frac{2^{n+m}}{h_k}\binom{k+n}{k}^2 \tag{2.22}$$

şeklinde bulunur. Burada h_k

$$(2n'+\alpha+\beta+1)n'!\Gamma(n'+\alpha+\beta+1)h_{n'}=2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n'+\alpha+1)\Gamma(n'+\beta+1) \tag{2.23}$$

ifadesinden , $\alpha=n$, $\beta=m$, $n'=k$

$$h_k=\frac{2^{n+m+1}\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+m+1)}{(2k+n+m+1)k!\Gamma(k+n+m+1)}\quad \text{alınır.}$$

Şimdi (2.9) denklemini Schrödinger denklemine getirelim.

$$\frac{1}{J(\theta)}\frac{d}{d\theta}(J(\theta)\frac{dV}{d\theta}) \tag{2.24}$$

denkleminde

$$V=\frac{1}{\sqrt{J(\theta)}}\Psi \tag{2.25}$$

dönüşümü yaparsak

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\theta}+\frac{1}{2}\left[-\frac{J''}{J}+\frac{1}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2\right]\Psi \tag{2.26}$$

denklemini buluruz . Bu denkleme (2.9) denklemindeki geri kalan terimleri de ilave edersek bir boyutlu Schrödinger denklemini

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\theta}+\frac{1}{2}\left[-\frac{J''}{J}+\frac{1}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2\right]\Psi=-l(l+2)\Psi \tag{2.27}$$

buluruz. Burada $J(\theta)$ hacim elemanıdır. Problemimizde S^3 küresinde hacim elemanı $\sqrt{g}\,dx=r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta d\varphi_1\,d\varphi_2$ şeklinde olup $J(\theta)=\cos\theta\sin\theta$ dir. (2.27) denkleminden Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\theta}+\left[\frac{1/4-m^2}{\cos^2\theta}+\frac{1/4-n^2}{\sin^2\theta}+(l+1)^2\right]\Psi=0 \tag{2.28}$$

şeklinde bulunur. Burada potansiyel

$$v(\theta)=\frac{1/4-m^2}{\cos^2\theta}+\frac{1/4-n^2}{\sin^2\theta} \tag{2.29}$$

ve enerji

$$E=-(l+1)^2 \quad \text{dir.} \tag{2.30}$$

2. Küresel Koordinat Sistemi.

R^4 dört boyutlu Euclidean uzayda küresel koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_1=r\cos\psi\ ,\ x_2=r\sin\psi\cos\theta\ ,\ x_3=r\sin\psi\sin\theta\cos\varphi\ ,\ x_4=r\sin\psi\sin\theta\sin\varphi \tag{2.31}$$

$0\langle r\langle\infty\ ,\ 0\le\theta,\psi\le\pi\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi$

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $[x,x]=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2$ olmak üzere $[x,x]=d$ denklemi R^4 Euclidean uzayda yerleşmiş S^3 küresini tanımlar, burada d bir sabittir.

Küresel koordinatlarda (g_{ab}) metrik matrisi bulalım. (2.2) bağıntısından küresel koordinatlarda metrik matris

$$(g_{ab})=diag\left(1,r^2,r^2\sin^2\psi,r^2\sin^2\psi\sin^2\theta\right) \tag{2.32}$$

şeklinde bulunur. Bu metrik matrisin tersi $(g_{ab})^{-1}=(g^{ab})$

$g=\det(g_{ab})=r^6\sin^4\psi\sin^2\theta$ olmak üzere (2.4) bağıntısından

$$(g^{ab})=diag\left(1,\frac{1}{r^2},\frac{1}{r^2\sin^2\psi},\frac{1}{r^2\sin^2\psi\sin^2\theta}\right) \tag{2.33}$$

olarak bulunur.

Metrik matristen istifade ederek küresel koordinatlarda Laplace operatörünü ifade edersek (2.6) ifadesinden

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\sin^2\psi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}+\frac{1}{\sin^2\psi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\psi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.34}$$

olur. Laplace operatörünü

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{L,B}\Phi$$

şeklinde yazarsak , ilk terim Laplace operatörünün radyal parçasını , $\Delta_{L,B}\Phi$ de yüzey üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörünü oluşturur. Burada

$$\Delta_{L,B}\Phi = \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\sin^2\psi\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin^2\psi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right] \qquad (2.35)$$

dir.

$$\Delta_{L,B}\Phi(\psi,\theta,\varphi) = -L(L+2)\Phi(\psi,\theta,\varphi) \qquad (2.36)$$

denklemini değişkenlerine ayırma metoduna göre

$$\Phi(\theta,\varphi_1,\varphi_2) = V(\psi)U(\theta)\,e^{im\varphi}$$

şeklinde bir çözümünü arayalım. Buradan

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + 2\cot\psi\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{1}{\sin^2\psi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]V(\psi)U(\theta)e^{im\varphi} =$$
$$-L(L+2)V(\psi)U(\theta)e^{im\varphi} \qquad (2.37)$$

denklemini düzenlersek iki adet adi diferensiyel denklem elde ederiz.

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dU}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}U(\theta) = -l(l+1)U(\theta)$$

$$(2.38)$$

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} + 2\cot\psi\frac{dV}{d\psi} - \frac{l(l+1)}{\sin^2\psi}V(\psi) = -L(L+2)V(\psi)$$

$0 \le \theta,\psi \le \frac{\pi}{2}$ aralığında $(0,\pi)$ noktaları bu denklemlerin singüler noktalarıdır.

İlk önce,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dU}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}U(\theta) = -l(l+1)U(\theta) \qquad (2.39)$$

denkleminin çözümünü araştıralım. $z = \cos\theta$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $(0,\pi)$ singüler noktaları $(1,-1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$$\frac{dU}{d\theta} = -\sqrt{1-z^2}\frac{dU}{dz} \quad , \quad \frac{d^2U}{d\theta^2} = (1-z^2)\frac{d^2U}{dz^2} - z\frac{dU}{dz}$$

türev ifadeleri (2.39) denkleminde yazılırsa

$$(1-z^2)\frac{d^2U}{dz^2} - 2z\frac{dU}{dz} - \frac{m^2}{(1-z^2)}U(z) = -l(l+1)U(z) \qquad (2.40)$$

denklemini buluruz. Bu denklem Legendre diferensiyel denklemidir. Bu denklemi Hipergeometrik denkleme getirelim. Bunun için

$$U(z) = (1-z^2)^{m/2}w(z)$$

dönüşümü yapalım.

$$\frac{dU}{dz}=m(z^2-1)^{m/2-1}z\,w+(z^2-1)^{m/2}\frac{dw}{dz}$$

$$\frac{d^2U}{dz^2}=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^2w}{dz^2}+2m(z^2-1)^{m/2-1}z\frac{dw}{dz}+\left[2m(m/2-1)(z^2-1)^{m/2-2}z^2+m(z^2-1)^{m/2-1}\right]w$$

türev ifadelerini (2.40) denkleminde yazarsak

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2(m+1)z\frac{dw}{dz}+(l-m)(l+m+1)w(z)=0 \tag{2.41}$$

denklemini buluruz. Bu denklemde $\xi=\frac{1-z}{2}$ değişken dönüşümü yapalım. Bu durumda $(1,-1)$ singüler noktaları $(0,1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{dw}{d\xi}$, $\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2w}{d\xi^2}$ türev bağıntılarını (2.41) denkleminde yazar ve denklemi düzenlersek singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2w}{d\xi^2}+\left[(m+1)-2(m+1)\xi\right]\frac{dw}{d\xi}-(m-l)(l+m+1)w(\xi)=0 \tag{2.42}$$

Hipergeometrik denklemi buluruz. Bu denklem (2.14) Hipergeometrik denklemin aynisidir. İki denklemi karşılaştırırsak katsayılar

$$c=m+1\ ,\ a=m-l\ ,\ b=l+m+1$$

olur. (2.42) denkleminin çözümü hipergeometrik fonksiyonlarla verilir. Denklemin $\xi=0$ civarındaki regüler çözümü

$$w=F(a,b;c;\xi)=F(m-l,l+m+1;m+1;\xi) \tag{2.43}$$

$$w=\xi^{1-c}\ F(a-c+1,b-c+1;2-c;\xi)=\xi^{-m}\ F(-l,l+1;1-m;\xi)$$

olur. İlk çözüm regüler olmadığından çözüm olarak alınmaz. İkinci çözüm regüler olduğundan (2.42) denkleminin çözümü olarak

$$w=c_2\,\xi^{-m}\,F(-l,l+1;1-m;\xi)$$

çözümü alınır. Bu durumda (2.39) denkleminin çözümü

$$U(z)=c_2\,(z^2-1)\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-m}F(-l,l+1;1-m;\frac{1-z}{2}) \tag{2.44}$$

olarak bulunur. Bu çözümü Legendre fonksiyonu ile ifade edelim. Hipergeometrik fonksiyonla Legendre fonksiyonu arasındaki

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2})$$

bu bağıntıdan, $\mu=m$, $\nu=l$, $c_2=\frac{1}{\Gamma(1-m)}$ alırsak (2.44) çözümünün Legendre fonksiyonuyla ifadesi

$$U(z)=P_l^m(z) \tag{2.45}$$

şeklinde olur.

Legendre fonksiyonlar için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(z)\, P_{l'}^m(z)\,dz = \begin{cases} 0 & , \; l \neq l' \\ \dfrac{2(l+m)!}{(2l+1)\,(l-m)!} \end{cases} \tag{2.46}$$

İkinci olarak ,

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} + 2\cot\psi\frac{dV}{d\psi} - \frac{l(l+1)}{\sin^2\psi}V(\psi) = -L(L+2)V(\psi) \tag{2.47}$$

denkleminin çözümünü araştıralım.

Gegenbauer polinomları ;

$r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}(x_n/r)$, $\Delta(r^l C_l^{\frac{n-2}{2}}(x_n/r)) = 0$, Harmoniklik koşulu, r yarıçap, $\theta_1,\dots,\theta_n$ açılar olmak üzere,

$$\Delta = r^{1-n}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r} + r^{-2}\sin^{2-n}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} + \dots,$$

θ_k , $1 \le k \le n-2$, $\frac{x_n}{r} = \cos\theta_{n-1}$, $n-2 = 2p$ alırsak

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2}C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + (n-2)\cot\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta}C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + l(n+l-2)C_l^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) = 0,$$

$\cos\theta_{n-1} = t$ değişken dönüşümüyle

$$(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}C_l^p(t) - (2p+1)t\frac{d}{dt}C_l^p(t) + (2p+l)C_l^p(t) = 0 \tag{2.48}$$

denkleminin çözümleri olacaktır. Bu denklem Gegenbauer denklemi olarak tanımlanır. (2.47) denkleminde

$$V(\psi) = \sin^l\psi\; C(\cos\psi)$$

dönüşümü yapalım.

$$\frac{dV}{d\psi} = l\sin^{l-1}\psi\cos\psi C + \sin^l\psi\frac{dC}{d\psi} \;,$$

$$\frac{d^2V}{d\psi^2} = l(l-1)\sin^{l-2}\psi\cos^2\psi C - l\sin^l\psi C + 2l\sin^{l-1}\psi\cos\psi\frac{dC}{d\psi} + \sin^l\psi\frac{d^2C}{d\psi^2}$$

türev ifadelerini (2.47) denkleminde yazar ve denklemi düzenlersek

$$\frac{d^2C}{d\psi^2} + 2(l+1)\cot\psi\frac{dC}{d\psi} + (L-l)(L+l+2)C = 0 \tag{2.49}$$

denklemini buluruz. Bu denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2}C_{l'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + (n-2)\cot\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta}C_{l'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) + l'(n+l'-2)C_{l'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1}) = 0$$

Gegenbauer denklemiyle aynı olur. Boyut $n=4$ olmak üzere iki denklem karşılaştırılırsa $n-2 = 2(l+1)$, $l' = L-l$ bulunur.

Benzer işlemleri boyut $n=3$ olması durumunda θ değişkeni için yapalım. Bunun için

$$U(\theta)=\sin^k\theta\; C(\cos\theta)$$

dönüşümü yapalım.

$$\frac{dU}{d\theta}=k\sin^{k-1}\theta\cos\theta\, C+\sin^k\theta\frac{dC}{d\theta}\quad,$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}=k(k-1)\sin^{k-2}\theta\cos^2\theta\, C-k\sin^k\theta\, C+2k\sin^{k-1}\theta\cos\theta\frac{dC}{d\theta}+\sin^k\theta\frac{d^2C}{d\theta^2}$$

türev ifadelerini (2.39) denkleminde yazar ve denklemi düzenlersek, $k=m$ alınırsa

$$\frac{d^2C}{d\theta^2}+(2m+1)\cot\theta\frac{dC}{d\theta}+(l-m)(l+m+1)C=0 \tag{2.50}$$

denklemini buluruz. Bu denklem

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_{n-1}^2}C_{L'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1})+(n-2)\cot\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta}C_{L'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1})+L'(n+L'-2)C_{L'}^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta_{n-1})=0$$

Gegenbauer denklemiyle ayni olduğundan mukayese edersek

$n-2=2m+1$, $L'=(l-m)$ buluruz.

Böylece (2.49) ve (2.50) denklemlerinin çözüleri Gegenbauer polinomları olacaktır. Gegenbauer denkleminin çözümleri genel olarak n-boyutta

$$\Xi_k^l(x)=A_k^l\, r^l\prod_{j=0}^{n-3}C_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}}(\cos\theta_{n-j-1})\,\sin^{k_{j+1}}\theta_{n-j-1}\; e^{\pm ik_{n-2}\theta_1} \tag{2.51}$$

şeklinde **N.Ja. Vilenkin** [8] tarafından verilmiştir. Burada k tamsayıların bir dizisini , $C_m^p(\cos\theta)$ Gegenbauer polinomunu gösterir.

$$l\equiv k_o\geq k_1\geq\ldots\geq k_{n-2}\rangle 0\quad,\quad (k_1,\ldots,\pm k_{n-2})\;,\; r^l=1\;.$$

Buradan bizim çözümümüz boyut $n=4$ olmak üzere,

$\theta_3=\psi$, $\theta_2=\theta$, $\theta_1=\varphi$, $k_o=L$, $k_1=l$, $k_2=m$,

$$\Xi_{lm}^L(x)=A_{lm}^L\; C_{L-l}^{l+1}(\cos\psi)\; C_{l-|m|}^{\frac{1}{2}+|m|}(\cos\theta)\,\sin^l\psi\,\sin^{|m|}\theta\, e^{i|m|\varphi} \tag{2.52}$$

şeklinde olur. Çözümdeki A_{lm}^L katsayısını belirleyelim. Gegenbauer polinomları için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

$$\int_{S^{n-1}}\Xi_k^l(x)\;\Xi_{k'}^{l'}(x)\,dx=\delta_{ll'}\,\delta_{kk'} \tag{2.53}$$

Burada $dx=\dfrac{\Gamma(n/2)}{2\,\pi^{n/2}}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\ldots\sin\theta_2\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}$, S^{n-1} birim küre üzerinde hacim elemanıdır. Boyutu $n=4$ alırsak bu, $\theta_1=\varphi$, $\theta_2=\theta$, $\theta_3=\psi$,

$dx=\dfrac{\Gamma(2)}{2\,\pi^2}\sin^2\psi\sin\theta\, d\varphi d\theta d\psi$ olur. $\int_{S^{n-1}}\left|\Xi_{lm}^L(x)\right|^2dx=1$ koşulundan,

$$\left(A_{lm}^{l}\right)^2 \int_{S^3} \left|\Xi_{lm}^{L}(x)\right|^2 dx = 1$$

bulunur. Burada A_{lm}^{L} katsayısı genel olarak

$$\left(A_k^l\right)^2 = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \prod_{j=0}^{n-3} \frac{2^{2k_{j+1}+n-j-4}(k_j - k_{j+1})!\,(n-j+2k_j-2)\,\Gamma^2\left(\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k_j+k_{j+1}+n-j-2)} \tag{2.54}$$

formülünden hesaplanır. Bizim çözümümüzde bu katsayı , boyut $n=4$ olmak üzere , $(L-l)! = \Gamma(l-l+1)$, $(L-|m|)! = \Gamma(l-|m|+1)$,

$$\left(A_{lm}^{L}\right)^2 = \frac{1}{\Gamma(2)} \frac{2^{2l+2|m|}\,\Gamma(L-l+1)\,\Gamma(l-|m|+1)\,(1+L)(1+2l)\,\Gamma^2(1+l)\,\Gamma^2(1/2+|m|)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(L+l+2)\,\Gamma(l+|m|+1)}$$

şeklinde bulunur.

(2.39) denklemini Schrödinger denklemine getirelim. Problemimizde S^3 küresinde hacim elemanı $\sqrt{g}\,dx = r^3 \sin^2\psi \sin\theta\, d\psi d\theta d\varphi$ şeklinde olup $J(\theta) = \sin\theta$ dir. (2.24) ve (2.25) bağıntılarında Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\theta} + \left[\frac{1-4m^2}{4\sin^2\theta} + (l+1/2)^2\right]\Psi = 0 \tag{2.55}$$

şeklinde bulunur. Burada potansiyel

$$v(\theta) = -\frac{1-4m^2}{4\sin^2\theta} \tag{2.56}$$

ve enerji

$$E = -(l+1/2)^2 \quad \text{dir.} \tag{2.57}$$

Benzer şekilde (2.47) denklemini Schrödinger denklemine getirelim. $J(\psi) = \sin^2\psi$ olmak üzere Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\psi} + \left[-\frac{l(l+1)}{\sin^2\psi} + (L+1)^2\right]\Psi = 0 \tag{2.58}$$

şeklinde bulunur. Burada potansiyel

$$v(\psi) = \frac{l(l+1)}{\sin^2\psi} \tag{2.59}$$

ve enerji

$$E = -(L+1)^2 \quad \text{dir.} \tag{2.60}$$

3. SU(1,1) GRUBU İLE BAĞLANTILI KUANTUM SİSTEMLER

SU(1,1) grubunun manifoldu dört boyutlu uzayda üç boyutlu hiperboloidtir : $[x,x]=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=1$, $x\in R^4_{2,2}$. Bu hiperboloid üzerinde üç farklı koordinat sistemi ele alacağız. Bunlar biküresel, hiperbolik ve parabolik (Horiküresel) koordinat sistemleridir.

1. Biküresel Koordinat Sistemi.

$R^4_{2,2}$ pseudo-Euclidean uzayda biküresel koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_1=r\cosh\alpha\cos\varphi_1\ ,\ x_2=r\cosh\alpha\sin\varphi_1\ ,\ x_3=r\sinh\alpha\cos\varphi_2\ ,\ x_4=r\sinh\alpha\sin\varphi_2 \qquad (3.1)$$

$$0\langle r\langle\infty\ ,\ 0\le\alpha\langle\infty\ ,\ 0\le\varphi_1,\varphi_2\le 2\pi\ .$$

Biküresel koordinatlarda (g_{ab}) metrik matrisi bulalım. Metrik matris (2.2) bağıntısından

$$(g_{ab})=diag\left(1,-r^2,r^2\cosh^2\alpha,-r^2\sinh^2\alpha\right) \qquad (3.2)$$

şeklinde bulunur. Bu metrik matrisin tersi $(g_{ab})^{-1}=(g^{ab})$

$g=\det(g_{ab})=r^6\cosh^2\alpha$ olmak üzere (2.4) bağıntısından

$$(g^{ab})=diag\left(1,-\frac{1}{r^2},\frac{1}{r^2\cosh^2\alpha},-\frac{1}{r^2\sinh^2\alpha}\right) \qquad (3.3)$$

olarak bulunur.

Dört boyutlu pseudo-Euclidean uzayda Laplace operatörü

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

şeklinde verilir. Metrik matristen istifade ederek biküresel koordinatlarda Laplace operatörünü ifade edersek (2.6) bağıntısından

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{-1}{\cosh\alpha\sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh\alpha\sinh\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\frac{1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1^2}-\frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2^2}\right] \qquad (3.4)$$

şeklinde bulunur. Laplace operatörünü

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{L,B}\Phi$$

şeklinde yazarsak, ilk terim Laplace operatörünün radyal parçasını, $\Delta_{L,B}\Phi$ de yüzey üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörünü oluşturur. Burada

$$\Delta_{L,B}\Phi = \frac{-1}{\cosh\alpha\ \sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh\alpha\ \sinh\alpha\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_2^2}$$

dir. $\Delta_{L,B}\Phi$ operatörünün özfonksiyonlarının özdeğer problemini ele alalım.

$$\Delta_{L,B}\Phi(\alpha,\varphi_1,\varphi_2) = -\sigma(\sigma+2)\Phi(\alpha,\varphi_1,\varphi_2) \tag{3.5}$$

diferensiyel denklemini değişkenlerine ayırma metoduna göre çözümünün

$$\Phi(\alpha,\varphi_1,\varphi_2) = V(\alpha)\ e^{im\varphi_1}\ e^{in\varphi_2}$$

şeklinde aranacağı açıktır. Burada fonksiyonların tek değerli olması koşulundan m ve n tam değerler alması zorunludur.

$$\left[\frac{-1}{\cosh\alpha\ \sinh\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh\alpha\ \sinh\alpha\ \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{\sinh^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right]V(\alpha)e^{im\varphi_1}\ e^{in\varphi_2} =$$

$$-\sigma(\sigma+2)V(\alpha)e^{im\varphi_1}\ e^{in\varphi_2}$$

denklemini düzenlersek

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + [\coth\alpha + \tanh\alpha]\frac{dV}{d\alpha} + (\frac{m^2}{\cosh^2\alpha} - \frac{n^2}{\sinh^2\alpha})V(\alpha) = \sigma(\sigma+2)V \tag{3.6}$$

denklemini buluruz. $0 \le \alpha \langle \infty$ aralığında $(0,\infty)$ noktaları bu denklemin singüler noktalarıdır. (3.6) denklemini bilinen türden denklemlere dönüştürelim. Bunun için denklemde

$$V(\alpha) = \tanh^{\lambda_1}\alpha\ \cosh^{\lambda_2}\alpha\ w(\alpha) = \sinh^{\lambda_1}\alpha\ \cosh^{\lambda_2-\lambda_1}\alpha\ w(\alpha)$$

dönüşümü yapalım. Buradan $\frac{dV}{d\alpha}, \frac{d^2V}{d\alpha^2}$ türev ifadelerini bulur ve (3.6) denkleminde yazarsak denklem

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2} + \left[(2\lambda_1+1)\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} + (2\lambda_2 - 2\lambda_1 + 1)\frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}\right]\frac{dw}{d\alpha} +$$

$$\times\left[\lambda_1^2\frac{\cosh^2\alpha}{\sinh^2\alpha} + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2 + (\lambda_2-\lambda_1)^2\frac{\sinh^2\alpha}{\cosh^2\alpha} + \frac{m^2}{\cosh^2\alpha} - \frac{n^2}{\sinh^2\alpha} - \sigma(\sigma+2)\right]w = 0$$

$$\tag{3.7}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemde $z = \tanh^2\alpha$ değişken dönüşümü yapalım. Bu dönüşüme göre $(0,\infty)$ singüler noktalarımız $(0,1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$$\cosh^2\alpha = \frac{1}{1-z}\ ,\ \sinh^2\alpha = \frac{z}{1-z}$$

$$\frac{dw}{d\alpha} = 2\sqrt{z}(1-z)\frac{dw}{dz}\ ,\qquad \frac{d^2w}{d\alpha^2} = 4z(1-z)^2\frac{d^2w}{dz^2} + \left[2(1-z)^2 - 4z(1-z)\right]\frac{dw}{dz}$$

türev bağıntılarını (3.7) denkleminde yazarsak, denkelem $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = \sigma$ olmak üzere singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\left[(n+1)-(-\sigma+n+1)z\right]\frac{dw}{dz}-\left(\frac{-\sigma+m+n}{2}\right)\left(\frac{-\sigma-m+n}{2}\right)w=0$$

Hipergeometrik denkleme dönüşür. Bu denklemi (2.14) Hipergeometrik denklemiyle karşılaştırırsak parametreler

$$c=n+1\ ,\ a=\frac{-\sigma+m+n}{2}\ ,\ b=\frac{-\sigma-m+n}{2}$$

olur. Hipergeometrik denklemin $z=0$ civarındaki regüler çözümü, (2.15) bağıntısından

$$w(z)=F(a,b;c;z)=F(\frac{-\sigma+m+n}{2},\frac{-\sigma-m+n}{2};n+1;z) \qquad (3.8)$$

$$w(z)=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)=z^{-n}F(\frac{-\sigma+m-n}{2},\frac{-\sigma-m-n}{2};1-n;z)$$

olur. Çözümde $\sigma\to-\sigma-2$ ve m için simetri var.

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)$$

$$c-a-b=\sigma+1\ ,\ c-a=\frac{\sigma-m+n+2}{2}\ ,\ c-b=\frac{\sigma+m+n+2}{2}$$

$$\Delta_{L,B}\Phi=-\sigma(\sigma+2)\Phi=-(-\sigma-2)(-\sigma-2+2)\Phi=-\sigma(\sigma+2)\Phi.$$

(3.6) denkleminin çözümü $\lambda_1=n$, $\lambda_2=\sigma$ olmak üzere,

$n\rangle 0$ için, $n=1,2,...$

$$V(\alpha)=c_1\tanh^n\alpha\cosh^\sigma\alpha\, F(\frac{-\sigma+m+n}{2},\frac{-\sigma-m+n}{2};n+1;\tanh^2\alpha)$$

$n\langle 0$ için, $n=-1,-2,...$

$$V(\alpha)=c_1\tanh^{-n}\alpha\cosh^\sigma\alpha\, F(\frac{-\sigma+m-n}{2},\frac{-\sigma-m-n}{2};1-n;\tanh^2\alpha)$$

olur. Bu iki çözümü tek şekilde

$$V(\alpha)=c_1\tanh^{|n|}\alpha\cosh^\sigma\alpha\, F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};|n|+1;\tanh^2\alpha) \qquad (3.9)$$

gibi ifade edilebilir.

σ'nin sürekli değerlerinde c_1 normalleştirme katsayısını belirleyelim.

σ'nin sürekli değerlerinde ortogonallik koşulu

$$\int_{-\infty}^{\infty}|V|^2\,dx=\delta(\rho-\rho') \qquad \text{olarak verilir.}$$

Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı

$$F(a,b;c;z)=A_1F(a,b;a+b-c+1;1-z)+A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)$$

$$|\arg(1-z)|\langle\pi \qquad (3.10)$$

şeklinde verilir. Burada katsayılar

$$A_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\ ,\ A_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \qquad \text{dir.}$$

$$a=\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2}\ ,\ b=\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2}\ ,\ c=|n|+1,$$

$$a+b-c+1=-\sigma\ ,\ c-a=\frac{\sigma-|m|+|n|+2}{2}\ ,\ c-b=\frac{\sigma+|m|+|n|+2}{2}\ ,$$

$$c-a-b+1=\sigma+2\ ,\ c-a-b=1+\sigma\ ,\ a+b-c=-\sigma-1,$$

ifadelerini (3.10) analitik devam bağıntısında yazarsak Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam ifadesi

$$F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};|n|+1;\tanh^2\alpha)=A_1F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};-\sigma,\frac{1}{\cosh^2\alpha})+$$

$$\times A_2\left(\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\sigma+1}F(\frac{\sigma-|m|+|n|+2}{2},\frac{\sigma+|m|+|n|+2}{2};\sigma+2;\frac{1}{\cosh^2\alpha})\ , \qquad (3.11)$$

katsayılar da , $\sigma=-1+i\rho$, $0\langle\rho\langle\infty$

$$A_1=\frac{\Gamma(|n|+1)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{i\rho-|m|+|n|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\rho+|m|+|n|+1}{2}\right)}\ ,\ A_2=\frac{\Gamma(|n|+1)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma\left(\frac{-i\rho+|m|+|n|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-i\rho-|m|+|n|+1}{2}\right)}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi asimptotu bulalım. (3.9) çözümünde Hipergeometrik fonksiyonun (3.11) analitik devam ifadesini yazarsak çözüm

$$V(\alpha)=c_1\tanh^{|n|}\alpha\,\cosh^{\sigma}\alpha\left\{A_1F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};-\sigma;\frac{1}{\cosh^2\alpha})+\right.$$

$$\left.\times A_2\left(\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\sigma+1}F(\frac{\sigma-|m|+|n|+2}{2},\frac{\sigma+|m|+|n|+2}{2};\sigma+2;\frac{1}{\cosh^2\alpha})\right\}\ ,$$

şeklinde olur. Bu çözümün $\alpha\to\infty$ durumunda limitine bakalım.

$$\lim_{\alpha\to\infty}V(\alpha)=\lim_{\alpha\to\infty}c_1\tanh^{|n|}\alpha\,\cosh^{\sigma}\alpha\left\{A_1F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};-\sigma;\frac{1}{\cosh^2\alpha})+\right.$$

$$\left.\times A_2\left(\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\sigma+1}F(\frac{\sigma-|m|+|n|+2}{2},\frac{\sigma+|m|+|n|+2}{2};\sigma+2;\frac{1}{\cosh^2\alpha})\right\},\qquad (3.12)$$

$\sigma=-1+i\rho$, $\lim_{\alpha\to\infty}\tanh\alpha=\pm1$, $\alpha\to\infty$ durumunda Hipergeometrik fonksiyonlar

$$F(\frac{-\sigma+|m|+|n|}{2},\frac{-\sigma-|m|+|n|}{2};-\sigma,\frac{1}{\cosh^2\alpha})=1$$

$$F(\frac{\sigma-|m|+|n|}{2},\frac{\sigma+|m|+|n|}{2};\sigma+2;\frac{1}{\cosh^2\alpha})=1$$

olur. $\lim_{\alpha\to\infty}\cosh\alpha=\infty$, $\lim_{\alpha\to\infty}e^{\alpha}=\infty$, $\left(\frac{1}{\cosh^2\alpha}\right)^{\sigma+1}\cong e^{-2i\rho\alpha}$ .Buradan (3.12) ifadesinin limitini hesaplarsak, $V(\alpha)$ çözümünden asimptot

$$\lim_{\alpha\to\infty}V(\alpha)=c_1e^{-\alpha}\left[A_1e^{i\rho\alpha}+A_2e^{-i\rho\alpha}\right]\qquad (3.13)$$

şeklinde bulunur.

Hiperboloid üzerindeki invaryant hacim elemanı dx, $\sqrt{g}\,dx = r^3 \sinh\alpha \cosh\alpha\, d\alpha\, d\varphi_1\, d\varphi_2$ şeklinde verilir.

$$\int_0^\infty V(\alpha)\overline{V(\alpha)} \sinh\alpha \cosh\alpha\, d\alpha = \delta(\rho - \rho')$$

integralinde (3.13) ifadesini yazarsak

$$|c_1|^2 |A_1|^2 \int_0^\infty \left[e^{i(\rho-\rho')\alpha} + e^{-i(\rho-\rho')\alpha}\right] d\alpha = \delta(\rho - \rho')$$

buluruz. Burada δ-kronecker delta fonksiyonunun

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\rho-\rho')\alpha}\, d\alpha = \delta(\rho - \rho') \tag{3.14}$$

özelliğini kullanırsak c_1 sabiti, $|c_1|^2 = \dfrac{1}{2\pi |A_1|^2}$ olarak bulunur.

Burada , $A(m,n,\rho) = \dfrac{\Gamma(|n|+1)\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{i\rho-|m|+|n|+1}{2})\Gamma(\frac{i\rho+|m|+|n|+1}{2})}$ olduğundan

S-matris, $S = \dfrac{A}{\overline{A}} = \dfrac{\Gamma(i\sqrt{E})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}-|m|+|n|+1}{2})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}+|m|+|n|+1}{2})}{\Gamma(-i\sqrt{E})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}-|m|+|n|+1}{2})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}+|m|+|n|+1}{2})}$ olur.

$\sigma = l$ reel değerler alsın. Bu durumda (3.9) çözümü

$$V(\alpha) = \tilde{c}_1 \tanh^{|n|}\alpha \cosh^{l}\alpha\, F\left(\frac{-l+|m|+|n|}{2}, \frac{-l-|m|+|n|}{2}; |n|+1; \tanh^2\alpha\right) \tag{3.15}$$

şeklinde olur. Bu çözümü Jacobi polinomuyla ifade edelim. Jacobi polinomlarının Hipergeometrik fonksiyonla ifadesi

$$F(-n', -n'-\beta; \alpha+1; \frac{z'-1}{z'+1}) = \binom{n'+\alpha}{n'}^{-1}\left(\frac{z'+1}{2}\right)^{-n'} P_{n'}^{(\alpha,\beta)}(z') \tag{3.16}$$

şeklinde verilir.

$$z = \tanh^2\alpha \quad , \quad z' = \cosh 2\alpha \ , \ z = \frac{z'-1}{z'+1} \ , \ z' = \frac{z+1}{1-z}$$

$z = 1$, $z' = \infty$, $z = 0$, $z' = 1$ ve $z = \infty$, $z' = -1$ olur ki $(0,\infty)$ singüler noktaları $(1,-1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$\dfrac{-l+|m|+|n|}{2} = -k$, $-l = -2k - |m| - |n|$ dönüşümüyle (3.15) çözümündeki Hipergeometrik fonksiyonu (3.16) gibi ifade edersek , $\alpha = |n|$, $\beta = |m|$, $n' = k$ olmak üzere

$$F(-k,-k-|m|;|n|+1;\frac{z'-1}{z'+1}) = \binom{k+|n|}{k}^{-1}\left(\frac{z'+1}{2}\right)^{-k} P_k^{(|n|,|m|)}(z')$$

şeklinde bulunur. Bunu (3.15) çözümünde yazarsak $V(\alpha)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$V(\alpha) = \widetilde{c}_1 \binom{k+|n|}{k}^{-1} \sinh^{|n|}\alpha \cosh^{|m|}\alpha \; P^{(|n|,|m|)}_{\frac{-l+|m|+|n|}{2}}(\cosh 2\alpha) \tag{3.17}$$

olarak bulunur. $\widetilde{c}_1$ normalleştirme katsayısını belirleyelim. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

$$\int_{-1}^{1}(1-z')^{\alpha}(1+z')^{\beta} P_k^{(\alpha,\beta)}(z')P_{k'}^{(\alpha,\beta)}(z')dz' = h_k\,\delta_{kk'} \tag{3.18}$$

Bunu kullanırsak , $\int_{-1}^{1}|V|^2 dx = 1$, $\widetilde{c}_1$ normalleştirme katsayısı

$$|\widetilde{c}_1|^2 = \frac{2^{|m|+|n|}}{h_k}\binom{k+|n|}{k}^2$$ olarak bulunur. Burada h_k katsayısı

$$(2n'+\alpha+\beta+1)n'!\Gamma(n'+\alpha+\beta+1)h_{n'} = 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n'+\alpha+1)\Gamma(n'+\beta+1)$$

bağıntısından , $n' = k$, $\alpha = |n|$, $\beta = |m|$,

$$h_k = \frac{2^{|n|+|m|+1}\,\Gamma(k+|n|+1)\,\Gamma(k+|m|+1)}{(2k+|n|+|m|+1)\,k!\,\Gamma(k+|n|+|m|+1)}$$ olur.

Şimdi (3.6) denklemini Schrödinger denklemine getirelim. (2.24), (2.25) bağıntılarından ve (3.6) denkleminden

$$\Psi'' + \frac{1}{2}\left[-\frac{J''}{J} + \frac{1}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2\right]\Psi = \sigma(\sigma+2)\Psi$$

bir boyutlu Schrödinger denklemini buluruz. Burada $J(\alpha)$ değeri, hacim elemanından $J(\alpha) = \cosh\alpha \sinh\alpha$ olarak bulunur. Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d\alpha^2} + \left[\frac{1/4-n^2}{\sinh^2\alpha} + \frac{-1/4+m^2}{\cosh^2\alpha} - (\sigma+1)^2\right]\Psi = 0 \tag{3.19}$$

şeklinde bulunur. Burada potansiyel

$$v(\alpha) = -\left[\frac{1/4-n^2}{\sinh^2\alpha} + \frac{-1/4+m^2}{\cosh^2\alpha}\right] \tag{3.20}$$

ve enerji, $E = -(\sigma+1)^2$ (3.21)

olur. $\sigma = -1+i\rho$ için enerji $E = \rho^2 \rangle 0$, $\sigma = l$ için de $E = -(l+1)^2 \langle 0$ dir.

2. Parabolik (Horiküresel) Koordinat Sistemi.

$R^4_{2,2}$ dört boyutlu pseudo-Euclidean uzayda parabolik koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_1 = r\left[\cosh\frac{t}{2} - \frac{1}{2}e^{t/2}q^2\right],\; x_2 = r\,e^{t/2}q_1,\; x_3 = r\,e^{t/2}q_2,\; x_4 = r\left[\sinh\frac{t}{2} + \frac{1}{2}e^{t/2}q^2\right] \quad (3.22)$$

$0\langle r\langle\infty\;,\; -\infty\langle t\langle\infty\;,\; -\infty\langle q_1, q_2\langle\infty\;,\; q^2 = q_1^2 - q_2^2$

Parabolik koordinatlarda (g_{ab}) metrik matrisi bulalım. (2.2) bağıntısından parabolik koordinatlarda metrik matris

$$\left(g_{ab}\right) = diag\left(1, \frac{-r^2}{4}, r^2\,e^t, -r^2\,e^t\right) \quad (3.23)$$

şeklinde bulunur. Bu metrik matrisin tersi $\left(g_{ab}\right)^{-1} = \left(g^{ab}\right)$

$g = \det\left(g_{ab}\right) = \frac{r^6}{4}e^{2t}$ olmak üzere (2.4) bağıntısından

$$\left(g^{ab}\right) = diag\left(1, -\frac{4}{r^2}, \frac{1}{r^2\,e^t}, \frac{-1}{r^2\,e^t}\right) \quad (3.24)$$

olarak bulunur.

Metrik matristen istifade ederek parabolik koordinatlarda Laplace operatörünü ifade edersek (2.6) denkleminden

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{-4}{e^t}\frac{\partial}{\partial t}e^t\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_1^2} - \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_2^2}\right]$$

olur. Laplace operatörünü

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{L,B}\Phi$$

şeklinde yazarsak, ilk terim Laplace operatörünün radyal parçasını, $\Delta_{L,B}\Phi$ de yüzey üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörünü oluşturur,

$$\Delta_{L,B}\Phi = \frac{-4}{e^t}\frac{\partial}{\partial t}e^t\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_1^2} - \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_2^2}\;.$$

$\Delta_{L,B}\Phi$ operatörünün özfonksiyonlarının özdeğer problemini ele alalım.

$$\Delta_{L,B}\Phi(t, q_1, q_2) = -\sigma(\sigma+2)\Phi(t, q_1, q_2) \quad (3.25)$$

denklemini değişkenlerine ayırma metoduna göre çözümünün

$$\Phi(t, q_1, q_2) = T(t)\,e^{i\nu q_1}\,e^{i\mu q_2}$$

şeklinde olacağı açıktır. Buradan

$$\left[\frac{-4}{e^t}\frac{\partial}{\partial t}e^t\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_1^2} - \frac{1}{e^t}\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_2^2}\right]T(t)e^{i\nu q_1}\,e^{i\mu q_1} = -\sigma(\sigma+2)T(t)e^{i\nu q_1}\,e^{i\mu q_1}$$

denklemini düzenlersek

$$4\frac{d^2T}{dt^2}+4\frac{dT}{dt}+\frac{\nu^2-\mu^2}{e^t}T=\sigma(\sigma+2)T(t) \tag{3.26}$$

denklemini buluruz. Bu denklemi Schrödinger denklemine getirelim. Bunun için $T(t)=e^{-t/2}\Psi(t)$ dönüşümü yapalım.

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{1}{2}e^{-t/2}\Psi+e^{-t/2}\frac{d\Psi}{dt}\quad,\quad \frac{d^2T}{dt^2}=e^{-t/2}\frac{d^2\Psi}{dt^2}-e^{-t/2}\frac{d\Psi}{dt}+\frac{1}{4}e^{-t/2}\Psi$$

türev ifadelerini (3.26) denkleminde yazarsak

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}+\left[\frac{\nu^2-\mu^2}{4e^t}-\frac{(\sigma+1)^2}{4}\right]\Psi=0 \tag{3.27}$$

Schrödinger denklemini buluruz. Burada potansiyel

$$v(t)=-\frac{\nu^2-\mu^2}{4e^t} \tag{3.28}$$

ve enerji , $E=-\dfrac{(\sigma+1)^2}{4}$ dir. (3.29)

(3.27) denkleminde $z=e^{-t/2}$ değişken dönüşümü yapalım.

$$\frac{d\Psi}{dt}=-\frac{1}{2}z\frac{d\Psi}{dz}\quad,\quad \frac{d^2\Psi}{dt^2}=\frac{1}{4}z^2\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\frac{1}{4}z\frac{d\Psi}{dz}$$

türev ifadelerini (3.27) denkleminde yazarsak

$$z^2\frac{d^2\Psi}{dz^2}+z\frac{d\Psi}{dz}+\left[(\nu^2-\mu^2)z^2-(\sigma+1)^2\right]\Psi=0 \tag{3.30}$$

Bessel diferensiyel denklemini elde ederiz. Denklemin çözümü için Frobenius metodu kullanılır. Denklem $z=0$ civarında bir seri çözüm kabul eder. $\nu^2-\mu^2>0$, $\lambda=\sqrt{\nu^2-\mu^2}$ durumunda denklemin genel çözümü

$$\Psi(z)=c_1 J_{\sigma+1}(\lambda z)+c_2 Y_{\sigma+1}(\lambda z) \tag{3.31}$$

şeklinde verilir. $\Psi(z)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^{s+r}$, seri çözümünden indis denklemi,

$s(s-1)+s-(\sigma+1)^2=0$, $a_o\neq 0$, kökler $s=\pm(\sigma+1)$ ve katsayılar

$$a_1=a_3=\ldots=a_{2r+1}=\ldots=0,\quad a_r=-\frac{a_{r-2}}{(s+r)^2-(\sigma+1)^2}\quad,\ r\geq 2 \tag{3.32}$$

şeklinde bulunur.

$s=\sigma+1$ kökü için (3.32) katsayısı $a_{2r}=(-1)^r\dfrac{\Gamma(\sigma+2)}{2^{2r}r!\Gamma(\sigma+r+2)}a_o$ formunda bulunur. a_o katsayısını $a_o=\dfrac{1}{2^{\sigma+1}\Gamma(\sigma+2)}$ şeklinde seçersek $s=\sigma+1$ kökü için çözüm

$$J_{\sigma+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{2r+\sigma+1}}{r!\Gamma(\sigma+r+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\sigma+1} \tag{3.33}$$

olur. Bu çözüm $(\sigma+1)$. mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olarak tanımlanır. Benzer şekilde indis denkleminin $s=-(\sigma+1)$ kökü için çözüm bulunursa, keyfi seçilen a_o katsayısını için $a_o=\dfrac{1}{2^{-(\sigma+1)}\Gamma(-(\sigma+1)+1)}$ çözüm

$$J_{(\sigma+1)}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{2r-(\sigma+1)}}{r!\,\Gamma(-(\sigma+1)+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-(\sigma+1)} \tag{3.34}$$

şeklinde bulunur.

(3.31) genel çözümündeki $J_{\sigma+1}(\lambda z)$ çözümü bizim esas çözümümüz olacaktır. Çünkü $\int|\Psi|^2\,dz\,\langle\infty$ koşulunu sağlar. $Y_{\sigma+1}(\lambda z)$ çözümü $z=0$ da regüler değildir. Bu durumda $\sigma=l$ kesikli değerler için (3.30) denkleminin çözümü

$$\Psi(z)=c_1\,J_{l+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)=c_1\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{2r+l+1}}{r!\,\Gamma(l+r+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+l+1}$$

olur. Buradan (3.26) denkleminin çözümü de

$$T(t)=c_1\,e^{-t/2}\,J_{l+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)=c_1\,e^{-t/2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{2r+l+1}}{r!\,\Gamma(l+r+2)}\left(\frac{e^{-t/2}}{2}\right)^{2r+l+1} \tag{3.36}$$

olarak bulunur. Bu çözüm σ'nın kesikli değerlerine uygun gelen çözümdür. Bu durumda potansiyel negatif işaretlidir. Yani potansiyel kuyusu vardır.

(3.36) çözümündeki c_1 normalleştirme katsayısını belirleyelim. Bunun için Bessel fonksiyonlarının ortogonallik koşulunu verelim.

$$\int_0^{\infty}t^{-1}\,J_{\nu+2n+1}(t)\,J_{\nu+2m+1}(t)\,dt=\begin{cases}0 & ,\ m\neq n\\ (4n+2\nu+2)^{-1} & ,\ m=n\ ,\ \nu\rangle-1\end{cases} \tag{3.37}$$

Bu koşulda $\nu=0$, $m=n$, $2n=l$ alırsak

$\int_0^{\infty}t^{-1}\,J_{l+1}(t)\,J_{l+1}(t)\,dt=(2l+2)^{-1}$ integralini alırız. $\int_0^{\infty}|T(t)|^2\,dt=1$ koşulundan

$$|c_1|^2\int_0^{\infty}z^{-1}\,J_{l+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)\,J_{l+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\,z)\,dz=1,$$

c_1 sabiti $|c_1|^2=2(l+1)$ olarak bulunur. Burada $l=2n$ olup çift değerler alır.

$\sigma=-1+i\rho$ sürekli değerlerinde (3.36) çözümü geçerli olmaz. $\nu^2-\mu^2\langle 0$ durumunda (3.30) denklemi

$$z^2\frac{d^2\Psi}{dz^2}+z\frac{d\Psi}{dt}-\left[(\nu^2-\mu^2)z^2+(\sigma+1)^2\right]\Psi=0 \tag{3.38}$$

modified Bessel diferensiyel denklemi olacaktır. Bu denklemin genel çözümü

$$\Psi(z)=\tilde{c}_1\, J_n(i\lambda z)+\tilde{c}_2\, Y_n(i\lambda z) \tag{3.39}$$

şeklinde verilir. Fakat bu çözüm bizim koşullarımıza uygun değildir. Biz K ve I çözümlerini bulmalıyız. Bunun için $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$ bağıntısını kullanabiliriz. Buradan $I_{\sigma+1}(z)$,$I_{-(\sigma+1)}(z)$ çözümleri

$$I_{\sigma+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)=i^{-(\sigma+1)}J_{\sigma+1}(i\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\nu^2-\mu^2\right)^r}{r!\,\Gamma(\sigma+r+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\sigma+1},$$

$$I_{-(\sigma+1)}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)=i^{(\sigma+1)}J_{-(\sigma+1)}(i\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\nu^2-\mu^2\right)^r}{r!\,\Gamma(-\sigma+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r-\sigma-1}, \tag{3.40}$$

olarak bulunur. Ancak $I_{\sigma+1}(\lambda z)$,$I_{-(\sigma+1)}(\lambda z)$ çözümleri de bizim için çözüm olmaz. Bizim fiziksel koşullarımıza uygun çözüm bunların bir lineer birleşimi olan K çözümüdür. K çözümü

$$K_n(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x)-I_n(x)}{\sin n\pi} \tag{3.41}$$

bağıntısıyla verilir. Buradan K çözümü

$$K_{\sigma+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-(\sigma+1)}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)-I_{\sigma+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)}{\sin(\sigma+1)\pi}$$

olur. (3.38) denkleminin çözümü, Mcdonald K-fonksiyonuyla verilir,

$$\Psi(z)=\tilde{a}\; K_{\sigma+1}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)\;,\quad \rho=\sqrt{E} \tag{3.42}$$

(3.26) denkleminin çözümü de

$$T(t)=\tilde{a}\;\; e^{-t/2}\; K_{i\rho}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, e^{-t/2}) \tag{3.43}$$

olur. Bu çözüm $\sigma=-1+i\rho$ sürekli değerlerine uygun gelen çözüm olduğundan potansiyel pozitif işaretlidir. Yani potansiyel kuyusu yoktur sürekli bir zemin vardır.

Şimdi (3.43) çözümündeki $\tilde{a}$ normalleştirme katsayısını belirleyelim. Bunun için verilen çözümün asimptotunu bulalım.

$z=e^{-t/2}$, $t=-\infty$ için $z=\infty$, $t=\infty$ için $z=0$ olur. Yani t 'nin büyük değerleri z 'nin küçük değerleri olur. **z** 'nin büyük değerleri bizim için geçerli olmaz. z 'nin küçük değerlerine bakalım. Bunun için

$$I_{\nu}(x)\underset{x\to 0}{\rightarrow}\frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)} \tag{3.44}$$

bağıntısını kullanalım. Buradan, $\sigma=-1+i\rho$, $0\langle\rho\langle\infty$,

$$I_{i\rho}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)\underset{z\to 0}{\rightarrow}\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{i\rho} z^{i\rho}}{2^{i\rho}\,\Gamma(1+i\rho)},\; I_{-i\rho}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)\underset{z\to 0}{\rightarrow}\frac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{-i\rho} z^{-i\rho}}{2^{-i\rho}\,\Gamma(1-i\rho)} \tag{3.45}$$

alınır. (3.41) bağıntısından

$$K_{\substack{i\rho \\ z\to 0}}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z) = \frac{\pi}{2i\sinh\rho\pi}\left[I_{\substack{-i\rho \\ z\to 0}}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z) - I_{\substack{i\rho \\ z\to 0}}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z)\right] \tag{3.46}$$

bulunur. Buradan asimptot

$$K_{\substack{i\rho \\ z\to 0}}(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\, z) = \frac{\pi}{2i\sinh\rho\pi}\left[D z^{-i\rho} - \overline{D} z^{i\rho}\right] \tag{3.47}$$

şeklinde bulunur, burada $D = \dfrac{\pi}{2i\sinh\rho\pi}\dfrac{\left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{-i\rho}}{2^{-i\rho}\,\Gamma(1-i\rho)}$ dir.

S-matrix , $S = \dfrac{D}{\overline{D}} = \left(\sqrt{\nu^2-\mu^2}\right)^{-2i\rho} 2^{2i\rho}\dfrac{\Gamma(1+i\rho)}{\Gamma(1+i\rho)}$ olur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(t)\,\overline{T(t)}\, dt = \delta(\rho-\rho') \qquad \text{koşulundan ,}$$

$$\frac{|\tilde{a}|^2\pi}{4\sinh^2\rho\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\rho-\rho')t/2} + e^{-i(\rho-\rho')t/2}}{\Gamma(1+i\rho)\,\Gamma(1-i\rho)}dt = \delta(\rho-\rho')$$

buluruz. $\delta(\rho-\rho')$-kronecker delta fonksiyonunun (3.14) özelliğinden ve $\Gamma(1+i\rho)\Gamma(1-i\rho) = \dfrac{\rho\pi}{\sinh\rho\pi}$ eşitliğinden $\tilde{a}$ sabiti, $|\tilde{a}|^2 = \dfrac{\rho\sinh\rho\pi}{\pi^2}$ olarak bulunur.

3. Hiperbolik Koordinat Sistemi.

$R^4_{2,2}$ dört boyutlu pseudo-Euclidean uzayda hiperbolik koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_1 = r\cosh\alpha\cosh\beta\cos\varphi \;,\; x_2 = r\cosh\alpha\cosh\beta\sin\varphi \;,\; x_3 = r\cosh\alpha\sinh\beta \;,\; x_4 = r\sinh\alpha$$

$$0 < r < \infty \;,\; 0 \le \varphi \le 2\pi \;,\; -\infty < \alpha,\beta < \infty \tag{3.48}$$

Hiperbolik koordinatlarda (g_{ab}) metrik matrisi bulalım. (2.2) bağıntısından hiperbolik koordinatlarda metrik matris

$$(g_{ab}) = diag\left(1, -r^2, -r^2\cosh^2\alpha, r^2\cosh^2\alpha\cosh^2\beta\right) \tag{3.49}$$

şeklinde bulunur. Bu metrik matrisin tersi $(g_{ab})^{-1} = (g^{ab})$

$g = \det(g_{ab}) = r^6\cosh^4\alpha\cosh^2\beta$ olmak üzere (2.4) bağıntısından

$$(g^{ab}) = diag\left(1, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\cosh^2\alpha}, \frac{1}{r^2\cosh^2\alpha\cosh^2\beta}\right) \tag{3.50}$$

olur. Metrik matristen istifade ederek hiperbolik koordinatlarda Laplace operatörünü ifade edersek (2.6) denkleminden

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{-1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh^2\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{1}{\cosh^2\alpha\,\cosh\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\cosh\beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{1}{\cosh^2\alpha\,\cosh^2\beta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

olur. Laplace operatörünü

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_{L.B}\Phi$$

şeklinde yazarsak, ilk terim Laplace operatörünün radyal parçasını, $\Delta_{L,B}\Phi$ de yüzey üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörünü oluşturur. Burada

$$\Delta_{L,B}\Phi=\frac{-1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh^2\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{1}{\cosh^2\alpha\cosh\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\cosh\beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{1}{\cosh^2\alpha\cosh^2\beta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

dir. $\Delta_{L,B}\Phi$ operatörünün özfonksiyonlarının özdeğer problemini ele alalım.

$$\Delta_{L.B}\Phi(\alpha,\beta,\varphi)=-\sigma(\sigma+2)\Phi(\alpha,\beta,\varphi) \tag{3.51}$$

denklemini değişkenlerine ayırma metoduna göre çözümünün

$$\Phi(\alpha,\beta,\varphi)=V(\alpha)\,U(\beta)e^{im\varphi}$$

şeklinde olacağı açıktır. Buradan

$$\left[\frac{-1}{\cosh^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\cosh^2\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{1}{\cosh^2\alpha\cosh\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\cosh\beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\frac{1}{\cosh^2\alpha\cosh^2\beta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]V(\alpha)U(\beta)e^{im\varphi}=$$

$$-\sigma(\sigma+2)V(\alpha)U(\beta)e^{im\varphi}$$

denklemini düzenlersek iki adet adi diferensiyel denklem elde ederiz.

$$\frac{d^2U}{d\beta^2}+\tanh\beta\frac{dU}{d\beta}+\frac{m^2}{\cosh^2\beta}U(\beta)=\sigma_1(\sigma_1+1)U(\beta)$$

(3.52)

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+2\tanh\alpha\frac{dV}{d\alpha}+\frac{\sigma_1(\sigma_1+1)}{\cosh^2\alpha}V(\alpha)=\sigma(\sigma+2)V(\alpha)$$

İlk önce ;

$$\frac{d^2U}{d\beta^2}+\tanh\beta\frac{dU}{d\beta}+\frac{m^2}{\cosh^2\beta}U(\beta)=\sigma_1(\sigma_1+1)U(\beta) \tag{3.53}$$

denkleminin çözümünü araştıralım. Denklemi bilinen türden denklemlere dönüştürmek için

$$U(\beta)=\cosh^\lambda\beta\; w(\beta)$$

dönüşümü yapalım.

$$\frac{dU}{d\beta}=\lambda\cosh^{\lambda-1}\beta\sinh\beta\; w+\cosh^\lambda\frac{dw}{d\beta},$$

$$\frac{d^2U}{d\beta^2}=\cosh^\lambda\beta\frac{d^2w}{d\beta^2}+2\lambda\cosh^{\lambda-1}\beta\sinh\beta\frac{dw}{d\beta}+\left[\lambda(\lambda-1)\cosh^{\lambda-2}\beta\sinh^2\beta+\lambda\cosh^\lambda\beta\right]w$$

türev ifadeleri (3.53) denkleminde yazılırsa

$$\frac{d^2w}{d\beta^2}+[2\lambda+1]\tanh\beta\frac{dw}{d\beta}+\left[\lambda^2+\lambda+\frac{m^2-\lambda^2}{\cosh^2\beta}\right]w=\sigma_1(\sigma_1+1)w \tag{3.54}$$

denklemini buluruz. Bu denklemde $z=-\sinh^2\beta$ değişken dönüşümü yapalım.

$$\frac{dw}{d\beta}=-2\sqrt{1-z}\sqrt{-z}\frac{dw}{dz} \quad , \quad \frac{d^2w}{d\beta^2}=-4z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}-2(1-2z)\frac{dw}{dz}$$

türev bağıntılarını (3.54) denkleminde yazarsak, $\lambda=m$ ve singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}-(m+\frac{3}{2})z\right]\frac{dw}{dz}-\frac{m-\sigma_1}{2}\frac{m+\sigma_1+1}{2}w=0 \tag{3.55}$$

Hipergeometrik denklemi buluruz. Bu denklem (2.14) Hipergeometrik denklemin aynisidir. İki denklemi karşılaştırırsak katsayılar

$$c=\frac{1}{2},\ a=\frac{m-\sigma_1}{2}\ ,\ b=\frac{m+\sigma_1+1}{2}$$

olur. (3.55) denkleminin çözümü hipergeometrik fonksiyonlarla verilir. Denklemin $z=0$ civarındaki regüler çözümü

$$w(z)=c_1\,w_1(z)+c_2\,w_2(z)\ ,$$

$$w_1=F(a,b;c;z)=F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\frac{1}{2};z) \quad ,$$

$$w_2=z^{1-c}\,F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)=z^{1/2}\,F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\frac{3}{2};z) \tag{3.56}$$

olur. Bu iki çözümde $z=0$ da regülerdir. Bu durumda bu iki çözümü de ayrı ayrı inceleyebiliriz.

(3.56) çözümünden, (3.53) denkleminin çözümü, $\lambda=m$,

$$U(\beta)=c_1\cosh^m\beta F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\beta)+c_2\cosh^m\beta$$
$$\times(-\sinh\beta)\ F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\beta)$$

olur. Genel çözüm iki lineer bağımsız çözümün lineer birleşimiyle verildiğinden yukarıdaki çözümü

$$U_1(\beta)=c_1\cosh^m\beta F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\beta),$$

$$U_2(\beta)=c_2\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\ F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\beta) \tag{3.57}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\sigma_1=l$ reel değerler alsın. Bu durumda (3.57) çözümleri

$$U_1(\beta)=c_1\cosh^m\beta F(\frac{-l+m}{2},\frac{l+m+1}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\beta),$$

$$U_2(\beta)=c_2\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\ F(\frac{-l+m+1}{2},\frac{l+m+2}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\beta)$$

şeklinde verilir. Bu çözümleri Jacobi polinomuyla ifade edebiliriz. Önce $U_1(\beta)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifade edelim. Jacobi polinomlarının Hipergeometrik fonksiyonla ifadesi

$$F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-z'}{2})=\binom{n+\alpha}{n}^{-1}P_n^{(\alpha,\beta)}(z') \tag{3.58}$$

şeklinde verilir. $z=-\sinh^2\beta$, $z'=\cosh 2\beta$, $z'=1-2z$, $z=\frac{1-z'}{2}$.

Bu durumda $(0,1)$ singüler noktaları $(1,-1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$\frac{-l+m}{2}=-k$, $-l=-2k-m$ dönüşümüyle $U_1(\beta)$ çözümündeki Hipergeometrik fonksiyonu (3.58) gibi ifade edersek $n=k$, $\alpha=-1/2$, $\beta=m$ olmak üzere

$$F(-k,k+m+\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1-z'}{2})=\binom{k-1/2}{k}^{-1}P_k^{(-\frac{1}{2},m)}(z')$$

şeklinde olur. Bunu $U_1(\beta)$ çözümünde yazarsak $U_1(\beta)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$U_1(\beta)=c_1\binom{k-\frac{1}{2}}{k}^{-1}\cosh^m\beta\, P_{\frac{-l+m}{2}}^{(-\frac{1}{2},m)}(\cosh 2\beta) \tag{3.59}$$

olur.

Benzer şekilde $U_2(\beta)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesini verelim. Çözümdeki hipergeometrik fonksiyonun parametrelerindeki

$\frac{-l+m+1}{2}=-k$, $-l=-2k-m-1$ dönüşümle $U_2(\beta)$ çözümünde ki Hipergeometrik fonksiyon (3.58) gibi ifade edersek , $n=k$, $\alpha=1/2$, $\beta=m$ olmak üzere

$$F(-k,k+m+\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{1-z'}{2})=\binom{k+1/2}{k}^{-1}P_k^{(\frac{1}{2},m)}(z')$$

şeklinde olur. Bunu $U_2(\beta)$ çözümünde yazarsak $U_2(\beta)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$U_2(\beta)=c_2\binom{k+\frac{1}{2}}{k}^{-1}\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\,P_{\frac{-l-m-1}{2}}^{(\frac{1}{2},m)}(\cosh 2\beta) \tag{3.60}$$

olur. $U_1(\beta)$ ve $U_2(\beta)$ çözümlerindeki c_1 , c_2 belirsiz katsayları belirleyelim. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

$$\int_{-1}^{1}(1-z')^{\alpha}\,(1+z')^{\beta}\,P_k^{(\alpha,\beta)}(z')\,P_{k'}^{(\alpha,\beta)}(z')\,dz'=h_k$$

S^3 birim pseudo-küresinde invaryant hacim elemanı $\sqrt{g}\,dx=r^3\cosh^2\alpha\,\cosh\beta d\alpha d\beta d\varphi$ şeklinde verilir.

$$\int_{-1}^{1} U_1(\beta)\overline{U_1(\beta)}\cosh\beta\, d\beta = 1$$

Buradan

$$z' = \cosh 2\beta \ , z = -\sinh^2\beta \ , \ z = \frac{1-z'}{2} \ ,$$

$$|c_1|^2 \frac{\binom{k-1/2}{k}^{-2}}{2^{m+1/2}} \int_{-1}^{1} (1-z')^m \ (1+z')^{-1/2} \left[P_k^{(-1/2,m)}(z')\right]^2 dz' = 1$$

c_1 sabiti , $|c_1|^2 = \frac{2^{m+1/2}}{h_n}\binom{k-1/2}{k}^2$ olarak bulunur. Burada h_n katsayısı

$$(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)h_n = 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)$$ olup,

$n=k$, $\alpha=-1/2$, $\beta=m$ alınırsa,

$$h_k = \frac{2^{m+1/2}\,\Gamma(k+1/2)\Gamma(k+m+1)}{(2k+m+1/2)\ k!\ \Gamma(k+m+1/2)}$$

şeklinde bulunur.

Benzer şekilde $U_2(\beta)$ çözümündeki c_2 katsayısını belirlersek ,

$$\int_{-1}^{1} U_2(\beta)\overline{U_2(\beta)}\cosh\beta\, d\beta = 1$$ 'den

$$|c_2|^2 \frac{\binom{k+1/2}{k}^{-2}}{2^{m+3/2}} \int_{-1}^{1} (1-z')^m \ (1+z')^{1/2} \left[P_k^{(1/2,m)}(z')\right]^2 dz' = 1 \ ,$$

c_2 katsayısı , $|c_2|^2 = \frac{2^{m+3/2}}{h_n}\binom{k+1/2}{k}^2$ olur. Burada $n=k$, $\alpha=1/2$, $\beta=m$ olmak üzere h_n katsayısı da $h_k = \frac{2^{m+3/2}\,\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+m+1)}{(2k+m+3/2)\ k!\ \Gamma(k+m+3/2)}$

olarak bulunur.

Şimdi çözümlerin σ_1 sürekli değerlerinde nasıl olacağına bakalım. Bunun için Hipergeometrik fonksiyonların aşağıdaki gibi verilen analitik devam bağıntısını kullanalım.

$$F(a,b;c;z) = B_1(-z)^{-a} F(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z}) + B_2(-z)^{-b} F(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z})$$

$$|\arg(-z)| \langle \pi \qquad (3.62)$$

Burada katsayılar,

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \ , \ B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \qquad \text{dir.}$$

(3.57) çözümlerini , $c_1 = \tilde{c}_1 , c_2 = \tilde{c}_2$ alarak tekrar yazarsak

$$U_1(\beta) = \tilde{c}_1 \cosh^m\beta\, F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\beta) \ ,$$

$$U_2(\beta)=\tilde{c}_2\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\,F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\beta)$$

olur. İlk önce $U_1(\beta)$ çözümüne σ_1 sürekli değerlerinde bakalım.

$$\sigma_1=-\frac{1}{2}+i\rho\,,\ 0\langle\rho\langle\infty\,,\ a=\frac{-\sigma_1+m}{2}\,,\ b=\frac{\sigma_1+m+1}{2}\,,\ c=\frac{1}{2}$$

$$1-c+a=\frac{-\sigma_1+m+1}{2}\,,1-b+a=-\sigma_1+\frac{1}{2}\,,\ 1-c+b=\frac{\sigma_1+m+2}{2}\,,1-a+b=\sigma_1+\frac{3}{2}\ ,$$

$$b-a=\sigma_1+\frac{1}{2}\,,\ c-a=\frac{\sigma_1-m+1}{2}\,,c-b=-\frac{\sigma_1+m}{2}\,,\ a-b=-\sigma_1-\frac{1}{2}\ ,$$

ifadelerini (3.62) analitik devam bağıntısında yazarsak,

$$F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\frac{1}{2};z)=B_1(-z)^{\frac{\sigma_1-m}{2}}F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{-\sigma_1+m+1}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};\frac{1}{z})+$$
$$\times B_2(-z)^{-\frac{\sigma_1+m+1}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};\frac{1}{z})\qquad(3.63)$$

ve katsayılarda

$$B_1=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{2i\rho+2m+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2i\rho-2m+1}{4}\right)}\ ,\ B_2=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma\left(\frac{-2i\rho+2m+1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{-2i\rho-2m+1}{4}\right)}\qquad \text{olur.}$$

Asimptotu bulalım.

$z=-\sinh^2\beta$, $\beta\to\infty$ için $z\to\infty$ gider. Bunun yerine $\beta\to\infty$ için $z\to 0$ gittiği bir dönüşüm yapmam gerekir. Bu durumda Hipergeometrik fonksiyon $F(a,b;c;z)=1$ olmalı. Dönüşümü $z'=\frac{1}{z}=-\frac{1}{\sinh^2\beta}$ şeklinde alalım. Bu durumda $\beta\to\infty$ için $z\to 0$ gider. $U_1(\beta)$ çözümünde (3.63) hipergeometrik fonksiyonun analitik devam ifadesini yazarsak çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$U_1(\beta)=\tilde{c}_1\cosh^m\beta\left\{B_1(-z)^{\frac{\sigma_1-m}{2}}F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{-\sigma_1+m+1}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};\frac{1}{z})+\right.$$
$$\left.\times B_2(-z)^{-\frac{\sigma_1+m+1}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};\frac{1}{z})\right\}\qquad(3.64)$$

Bu çözümün $\beta\to\infty$ gitmesi durumunda limitine bakalım.

$$\lim_{\beta\to\infty}U_1(\beta)=\lim_{\beta\to\infty}\tilde{c}_1\cosh^m\beta\left\{B_1(-z)^{\frac{\sigma_1-m}{2}}F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{-\sigma_1+m+1}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};\frac{1}{z})+\right.$$
$$\left.\times B_2(-z)^{-\frac{\sigma_1+m+1}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};\frac{1}{z})\right\}$$

$\beta\to\infty$ gitmesi durumunda Hipergeometrik fonksiyonlar

$$F(\frac{-\sigma_1+m}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})=1\quad ,$$

$$F(\frac{\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})=1\qquad \text{olur.}$$

$\underset{\beta\to\infty}{Lim}\sinh\beta=\infty$, $\underset{\beta\to\infty}{Lim}\cosh\beta=\infty$, $\underset{\beta\to\infty}{Lim}e^{\beta}=\infty$ olur ki sonsuzda $\sinh\beta$, $\cosh\beta$ fonksiyonları yerine e^{β} fonksiyonunu alabiliriz. Sonsuzda, $\sigma_1=-\dfrac{1}{2}+i\rho$,

$(\sinh^2\beta)^{\frac{\sigma_1-m}{2}}\cong e^{-\left(\frac{1}{2}+m\right)\beta}e^{i\rho\beta}$, $(\sinh^2\beta)^{\frac{\sigma_1-m}{2}}\cong e^{-\left(\frac{1}{2}+m\right)\beta}e^{i\rho\beta}$, $(\sinh^2\beta)^{-\frac{\sigma_1+m+1}{2}}\cong e^{-\left(\frac{1}{2}+m\right)\beta}e^{-i\rho\beta}$,

$\cosh^m\beta\cong e^{m\beta}$, $\sinh^2\beta\cong e^{2\beta}$ olur. Buradan yukarıdaki limiti bulursak $U_1(\beta)$ çözümünden asimptot

$$\underset{\beta\to\infty}{Lim}U_1(\beta)=\widetilde{c}_1\,e^{-\frac{\beta}{2}}\left[B_1\,e^{i\rho\beta}+B_2\,e^{-i\rho\beta}\right] \tag{3.65}$$

şeklinde bulunur.

Benzer işlemleri $U_2(\beta)$ çözümü için yapalım. $U_2(\beta)$ çözümü için Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$F(a,b;c;z)=\widetilde{B}_1\,(-z)^{-a}\,F(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z})+\widetilde{B}_2\,(-z)^{-b}\,F(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z})$$

$$|\arg(-z)|\langle\pi \tag{3.66}$$

Burada katsayılar,

$$\widetilde{B}_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\ ,\ \widetilde{B}_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\ \text{dir.}$$

$$a=\frac{-\sigma_1+m+1}{2}\ ,\ b=\frac{\sigma_1+m+2}{2}\ ,\ c=\frac{3}{2}\ ,$$

$$1-c+a=\frac{-\sigma_1+m}{2}\ ,1-b+a=-\sigma_1+\frac{1}{2},\ 1-c+b=\frac{\sigma_1+m+1}{2}\ ,1-a+b=\sigma_1+\frac{3}{2}\ ,$$

$$b-a=\sigma_1+\frac{1}{2},\ c-a=\frac{\sigma_1-m+2}{2}\ ,c-b=\frac{-\sigma_1-m+1}{2}\ ,\ a-b=-\sigma_1-\frac{1}{2}\ ,$$

ifadelerini (3.66) analitik devam bağıntısında yazarsak,

$$F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{\sigma_1+m+2}{2};\frac{3}{2};z)=\widetilde{B}_1\,(-z)^{-\frac{-\sigma_1+m+1}{2}}\,F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{-\sigma_1+m}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};\frac{1}{z})+$$

$$\times\,\widetilde{B}_2\,(-z)^{-\frac{\sigma_1+m+2}{2}}\,F(\frac{\sigma_1+m+2}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};\frac{1}{z}) \tag{3.67}$$

ve katsayılarda

$$\widetilde{B}_1=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{2i\rho+m+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2i\rho-m+3}{4}\right)}\ ,\ \widetilde{B}_2=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma\left(\frac{-2i\rho+2m+3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{-2i\rho-2m+3}{4}\right)}\ \text{dır.}$$

$U_2(\beta)$ çözümünden olan asimptotu bulalım. $U_2(\beta)$ çözümünde (3.67) Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam ifadesini yazarsak çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$U_2(\beta)=\tilde{c}_2\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\left\{\tilde{B}_1(\sinh^2\beta)^{-\frac{-\sigma_1+m+1}{2}}F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{-\sigma_1+m}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})+\right.$$

$$\left.\times\tilde{B}_2(\sinh^2\beta)^{-\frac{\sigma_1+m+2}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+2}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})\right\} \qquad (3.68)$$

Bu çözümün $\beta\to\infty$ gitmesi durumunda limitine bakalım.

$$\lim_{\beta\to\infty}U_2(\beta)=\lim_{\beta\to\infty}\tilde{c}_2\cosh^m\beta\,(-\sinh\beta)\left\{\tilde{B}_1(\sinh^2\beta)^{-\frac{-\sigma_1+m+1}{2}}F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{-\sigma_1+m}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})+\right.$$

$$\left.\times\tilde{B}_2(\sinh^2\beta)^{-\frac{\sigma_1+m+2}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+2}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})\right\}$$

$\beta\to\infty$ gitmesi durumunda Hipergeometrik fonksiyonlar

$$F(\frac{-\sigma_1+m+1}{2},\frac{-\sigma_1+m}{2};-\sigma_1+\frac{1}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})=1\ ,$$

$$F(\frac{\sigma_1+m+2}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};-\frac{1}{\sinh^2\beta})=1 \quad \text{alınır.}$$

Sonsuzda , $\left(\sinh^2\beta\right)^{\frac{\sigma_1-m-1}{2}}\cong e^{-\left(\frac{3}{2}+m\right)\beta}e^{i\rho\beta}$, $\left(\sinh^2\beta\right)^{\frac{-\sigma_1-m-2}{2}}\cong e^{-\left(\frac{3}{2}+m\right)\beta}e^{-i\rho\beta}$ olur.

Buradan yukarıdaki limiti bulursak $U_2(\beta)$ çözümünden asimptot

$$\lim_{\beta\to\infty}U_2(\beta)=-\tilde{c}_2\,e^{-\frac{\beta}{2}}\left[\tilde{B}_1\,e^{i\rho\beta}+\tilde{B}_2\,e^{-i\rho\beta}\right] \qquad (3.69)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi σ_1 sürekli değerlerinde $U_1(\beta)$ ve $U_2(\beta)$ çözümlerindeki $\tilde{c}_1$ ve $\tilde{c}_2$ belirsiz katsayılarını belirleyelim. Önce $U_1(\beta)$ çözümündeki $\tilde{c}_1$ katsayısını bulalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U|^2\,dx=\delta(\rho-\rho')\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}U_1(\beta)\overline{U_1(\beta)}\cosh\beta\,d\beta=\delta(\rho-\rho')$$

integralinde (3.65) ifadesini yazarsak

$$|\tilde{c}_1|^2|B_1|^2\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i(\rho-\rho')\beta}+e^{-i(\rho-\rho')\beta})\,d\beta=\delta(\rho-\rho')$$

buluruz. Bunu düzenler ve δ-kronecker delta fonksiyonunun (3.14) özelliğini kullanırsak $\tilde{c}_1$ sabiti , $|\tilde{c}_1|^2=\dfrac{1}{4\pi|B_1|^2}$ olarak bulunur.

Ayni işlemleri $U_2(\beta)$ çözümündeki $\widetilde{c}_2$ katsayısını belirlemek için yapalım. $\int_{-\infty}^{\infty} U_2(\beta)\overline{U_2(\beta)}\cosh\beta \, d\beta = \delta(\rho-\rho')$ integralinde (3.69) ifadesini yazarsak

$$|\widetilde{c}_2|^2 |\widetilde{B}_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\rho-\rho')\beta} + e^{-i(\rho-\rho')\beta})\, d\beta = \delta(\rho-\rho')$$

buluruz. Yine δ-kronecker delta fonksiyonunun (3.14) özelliğinden $\widetilde{c}_2$ sabiti, $|\widetilde{c}_2|^2 = \dfrac{1}{4\pi|\widetilde{B}_1|^2}$ olarak bulunur.

İkinci olarak ;

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + 2\tanh\alpha\frac{dV}{d\alpha} + \frac{\sigma_1(\sigma_1+1)}{\cosh^2\alpha}V(\alpha) = \sigma(\sigma+2)V(\alpha) \qquad (3.70)$$

denkleminin çözümünü araştıralım. Denklemi bilinen türden denklemlere getirmek için

$$V(\alpha) = \cosh^s\alpha \; w(\alpha)$$

dönüşümü yapalım.

$$\frac{dV}{d\alpha} = s\cosh^{s-1}\alpha\sinh\alpha\; w + \cosh^s\alpha\frac{dw}{d\alpha} \quad ,$$

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \cosh^s\alpha\frac{d^2w}{d\alpha^2} + 2s\cosh^{s-1}\alpha\sinh\alpha\frac{dw}{d\alpha} + \left[s(s-1)\cosh^{s-2}\alpha\sinh^2\alpha + s\cosh^s\alpha\right]w$$

türev bağıntılarını (3.70) denkleminde yazarsak denklem

$$\frac{d^2w}{d\alpha^2} + 2(s+1)\tanh\alpha\frac{dw}{d\alpha} + \left[s^2+2s+\frac{\sigma_1(\sigma_1+1)-s(s+1)}{\cosh^2\alpha}\right]w = \sigma(\sigma+2)w \qquad (3.71)$$

haline gelir. Bu denklemde $z=-\sinh^2\alpha$ değişken dönüşümü yapalım.

$$\frac{dw}{d\alpha} = -2\sqrt{-z}\sqrt{1-z}\frac{dw}{dz} \quad , \quad \frac{d^2w}{d\alpha^2} = -4z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} - 2(1-2z)\frac{dw}{dz}$$

türev ifadeleri (3.71) denkleminde yazılırsa, $s=\sigma_1$ olmak üzere singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + \left[\frac{1}{2}-(\sigma_1+2)z\right]\frac{dw}{dz} - \frac{\sigma_1-\sigma}{2}\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}w(z) = 0 \qquad (3.72)$$

Hipergeometrik denklemi buluruz. Bu denklem (2.14) Hipergeometrik denklemin aynisidir. İki denklemi karşılaştırırsak katsayılar

$$c=\frac{1}{2},\; a=\frac{\sigma_1-\sigma}{2},\; b=\frac{\sigma_1+\sigma}{2}$$

olur. (3.72) denkleminin çözümü hipergeometrik fonksiyonlarla verilir. Denklemin $z=0$ civarındaki regüler çözümü

$$w(z) = c_3 w_1(z) + c_4 w_2(z) \;,$$

$$w_1 = F(a,b;c;z) = F\left(\frac{\sigma_1-\sigma}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\frac{1}{2};z\right),$$

$$w_2 = z^{1-c}\, F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z) = z^{1/2}\, F(\frac{\sigma_1 - \sigma + 1}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma + 3}{2}; \frac{3}{2}; z) \tag{3.73}$$

olur. Bu iki çözümde $z = 0$ da regülerdir. Bu durumda bu iki çözümü de ayrı ayrı inceleyebiliriz.Bu çözümlerden (3.70) denkleminin çözümü, $\sigma_1 = s$;

$$V(\alpha) = c_3 \cosh^{\sigma_1}\alpha\; F(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma + 2}{2}; \frac{1}{2}; -\sinh^2\alpha) + c_4 \cosh^{\sigma_1}\alpha$$
$$\times (-\sinh\alpha)\; F(\frac{\sigma_1 - \sigma + 1}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma + 3}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2\alpha) \tag{3.74}$$

olur. Genel çözüm iki lineer bağımsız çözümün lineer birleşimiyle verildiğinden yukarıdaki çözümü

$$V_1(\alpha) = c_3 \cosh^{\sigma_1}\alpha\; F(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma + 2}{2}; \frac{1}{2}; -\sinh^2\alpha)\,,$$
$$V_2(\alpha) = c_4 \cosh^{\sigma_1}\alpha\, (-\sinh\alpha)\; F(\frac{\sigma_1 - l + 1}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma + 3}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2\alpha) \tag{3.75}$$

şeklinde yazabiliriz.

$\sigma = l$ reel değerler alsın. Bu durumda (3.75) çözümleri

$$V_1(\alpha) = c_3 \cosh^{\sigma_1}\alpha\; F(\frac{\sigma_1 - l}{2}, \frac{\sigma_1 + l + 2}{2}; \frac{1}{2}; -\sinh^2\alpha)\,,$$
$$V_2(\alpha) = c_4 \cosh^{\sigma_1}\alpha\, (-\sinh\alpha)\; F(\frac{\sigma_1 - l + 1}{2}, \frac{\sigma_1 + l + 3}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2\alpha) \quad \text{olur.}$$

Bu çözümleri Jacobi polinomuyla ifade edebiliriz. Önce $V_1(\alpha)$ çözümünü Jacobi polinomuyla ifade edelim. Jacobi polinomlarının Hipergeometrik fonksiyonla ifadesi (3.58) bağıntısıyla verilir.

$$z = -\sinh^2\alpha \;,\; z' = \cosh 2\alpha \,,\; z' = 1 - 2z \;,\; z = \frac{1 - z'}{2}$$

Bu dönüşümle $(0,1)$ singüler noktaları $(1,-1)$ singüler noktalarına dönüşür.

$\frac{\sigma_1 - l}{2} = -k\,,\, -l = -2k - \sigma_1$ dönüşümüyle $V_1(\alpha)$ çözümündeki Hipergeometrik fonksiyonu (3.58) gibi ifade edersek $n = k$, $\alpha = -1/2$, $\beta = \sigma_1 + \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$F(-k, k + \sigma_1 + 1; \frac{1}{2}; \frac{1 - z'}{2}) = \binom{k - 1/2}{k}^{-1} P_k^{(-\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(z')$$

şeklinde olur. Bunu $V_1(\alpha)$ çözümünde yazarsak $V_1(\alpha)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$V_1(\beta) = c_3 \binom{k - \frac{1}{2}}{k}^{-1} \cosh^{\sigma_1}\alpha\; P_{\frac{l - \sigma_1}{2}}^{(-\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(\cosh 2\alpha) \tag{3.76}$$

olur.

Benzer şekilde $V_2(\alpha)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesini verelim. Çözümdeki hipergeometrik fonksiyonun parametrelerindeki

$\frac{\sigma_1 - l + 1}{2} = -k \, , -l = -2k - \sigma_1 - 1$ dönüşümle $V_2(\alpha)$ çözümündeki hipergeometrik fonksiyonu (3.58) gibi ifade edersek , $n = k$, $\alpha = 1/2$, $\beta = \sigma_1 + \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$F(-k, k + \sigma_1 + 2; \frac{3}{2}; \frac{1 - z'}{2}) = \binom{k + 1/2}{k}^{-1} P_k^{(\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(z')$$

şekinde olur. Bunu $V_2(\alpha)$ çözümünde yazarsak $V_2(\alpha)$ çözümünün Jacobi polinomuyla ifadesi

$$V_2(\alpha) = c_4 \binom{k + \frac{1}{2}}{k}^{1} \cosh^{\sigma_1} \alpha \ (-\sinh \alpha) \ P_{\frac{l - \sigma_1 - 1}{2}}^{(\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(\cosh 2\alpha) \tag{3.77}$$

olur. $V_1(\alpha)$ ve $V_2(\alpha)$ çözümlerindeki c_3 , c_4 belirsiz katsayları belirleyelim. Jacobi polinomları için ortogonallik koşulu (3.61) bağıntısıyla verilir. S^3 birim pseudo-küresinde invaryant hacim elemanı $\sqrt{g}\, dx = r^3 \cosh^2 \alpha \cosh \beta d\alpha d\beta d\varphi$ şeklinde verilir.

$$\int_{-1}^{1} V_1(\alpha) \overline{V_1(\alpha)} \cosh^2 \alpha \, d\alpha = 1, \quad z' = \cosh 2\alpha \, , z = -\sinh^2 \alpha \, , \, z = \frac{1 - z'}{2} \, ,$$

$$|c_3|^2 \frac{\binom{k - 1/2}{k}^{-2}}{2^{\sigma_1 + 1/2}} \int_{-1}^{1} (1 - z')^{-1/2} \, (1 + z')^{\sigma_1 + 1/2} \left[P_k^{(-\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(z') \right]^2 dz' = 1$$

c_3 sabiti, $|c_3|^2 = \frac{2^{\sigma_1 + 1/2}}{h_n} \binom{k - 1/2}{k}^2$ olarak bulunur. Burada h_n katsayısı

$(2n + \alpha + \beta + 1) n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) h_n = 2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)$ olup,

$n = k$, $\alpha = -1/2$, $\beta = \sigma_1 + \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$h_k = \frac{2^{\sigma_1 + 1} \Gamma(k + 1/2) \Gamma(k + \sigma_1 + 3/2)}{(2k + \sigma_1 + 1) \, k! \, \Gamma(k + \sigma_1 + 1)}$$ şeklinde bulunur.

Benzer şekilde $V_2(\alpha)$ çözümündeki c_4 katsayısını belirlersek ,

$\int_{-1}^{1} V_2(\alpha) \overline{V_2(\alpha)} \cosh^2 \alpha \, d\alpha = 1$ 'den

$$|c_4|^2 \frac{\binom{k + 1/2}{k}^{-2}}{2^{\frac{\sigma_1 + 3}{2}}} \int_{-1}^{1} (1 - z')^{1/2} \, (1 + z')^{\sigma_1 + 1/2} \left[P_k^{(\frac{1}{2}, \sigma_1 + \frac{1}{2})}(z') \right]^2 dz' = 1$$

c_4 katsayısı , $|c_4|^2 = \frac{2^{\frac{\sigma_1+3}{2}}}{h_n}\binom{k+1/2}{k}^2$ olur. Burada $n=k$, $\alpha=1/2$, $\beta=\sigma_1+\frac{1}{2}$

olmak üzere h_n katsayısı , $h_k = \frac{2^{\sigma_1+2}\,\Gamma(k+3/2)\Gamma(k+\sigma_1+3/2)}{(2k+\sigma_1+2)\; k!\;\Gamma(k+\sigma_1+2)}$ olarak bulunur.

Şimdi çözümlerin σ sürekli değerlerinde nasıl olacağına bakalım. Bunun için Hipergeometrik fonksiyonların aşağıdaki gibi verilen analitik devam bağıntısını kullanalım.

$$F(a,b;c;z) = B_1(-z)^{-a}\,F(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z}) + B_2(-z)^{-b}\,F(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z})$$

$$|\arg(-z)| \langle \pi \qquad (3.78)$$

Burada katsayılar,

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\;,\; B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \qquad \text{dır.}$$

(3.75) çözümlerini, $c_3=\tilde{c}_3, c_4=\tilde{c}_4$ alarak tekrar yazarsak

$$V_1(\alpha) = \tilde{c}_3\cosh^{\sigma_1}\alpha\; F(\frac{\sigma_1+\sigma}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\alpha),$$

$$V_2(\alpha) = \tilde{c}_4\cosh^{\sigma_1}\alpha\;(-\sinh\alpha)\; F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\alpha)$$

olur. İlk önce $V_1(\alpha)$ çözümüne σ sürekli değerlerinde bakalım.

$$\sigma=-1+i\rho\;,\; 0\langle\rho\langle\infty \quad, a=\frac{\sigma_1-\sigma}{2}\;,\; b=\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}\;,\; c=\frac{1}{2}$$

$$1-c+a=\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}\;,1-b+a=-\sigma,\; 1-c+b=\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}\;,1-a+b=\sigma+2,$$

$$b-a=\sigma+1,\; c-a=\frac{-\sigma_1+\sigma+1}{2}\;,c-b=\frac{-\sigma_1-\sigma-1}{2}\;,\; a-b=-\sigma-1,$$

ifadelerini (3.78) analitik devam bağıntısında yazarsak,

$$F(\frac{\sigma_1-\sigma}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\frac{1}{2};z) = B_1(-z)^{\frac{-\sigma_1+\sigma}{2}}\,F(\frac{\sigma_1-\sigma}{2},\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2};-\sigma;\frac{1}{z}) +$$

$$\times B_2(-z)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}}\,F(\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2};\sigma+2;\frac{1}{z}) \qquad (3.79)$$

ve katsayılarda

$$B_1 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{i\rho+\sigma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\rho-\sigma_1}{2}\right)}\;,\; B_2 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma\left(\frac{-i\rho+\sigma_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-i\rho-\sigma_1}{2}\right)} \qquad \text{olur.}$$

Asimptotu bulalım.

$z=-\sinh^2\alpha$, $\alpha\to\infty$ için $z\to\infty$ gider. Bunun yerine $\alpha\to\infty$ için $z\to 0$ gittiği bir dönüşüm yapmam gerekir. Bu durumda Hipergeometrik fonksiyon $F(a,b;c;z)=1$ olmalı. Dönüşümü $z'=\frac{1}{z}=-\frac{1}{\sinh^2\alpha}$ şeklinde alalım.

Bu durumda $\alpha \to \infty$ için $z \to 0$ gider. $V_1(\alpha)$ çözümünde (3.79) Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam ifadesini yazarsak çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$V_1(\alpha) = \tilde{c}_3 \cosh^{\sigma_1}\alpha \left\{ B_1 (\sinh^2\alpha)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} F(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}; -\sigma; -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) + \right.$$
$$\left. \times B_2 (\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}} F(\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}, \frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}; \sigma+2; -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) \right\} \quad (3.80)$$

Bu çözümün $\alpha \to \infty$ gitmesi durumunda limitine bakalım.

$$\lim_{\alpha\to\infty} V_1(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} \tilde{c}_3 \cosh^{\sigma_1}\alpha \left\{ B_1 (\sinh^2\alpha)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} F(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}; -\sigma; -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) + \right.$$
$$\left. \times B_2 (\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}} F(\frac{\sigma_1+\sigma+1}{2}, \frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}; \sigma+2; -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) \right\}$$

$\alpha \to \infty$ gitmesi durumunda Hipergeometrik fonksiyonlar

$$F(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}; -\sigma, -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) = 1,$$
$$F(\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}, \frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}; \sigma+2; -\frac{1}{\sinh^2\alpha}) = 1 \qquad \text{olur.}$$

Sonsuzda, $\left(\sinh^2\alpha\right)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{2}} \cong e^{(\sigma-\sigma_1)\alpha}$, $\left(\sinh^2\alpha\right)^{-\frac{\sigma+\sigma_1+2}{2}} \cong e^{-(\sigma+\sigma_1+2)\alpha}$, $\cosh^{\sigma_1}\alpha \cong e^{\sigma_1\alpha}$ dır.

Buradan yukarıdaki limiti bulursak $V_1(\alpha)$ çözümünden asimptot

$$\lim_{\alpha\to\infty} V_1(\alpha) = \tilde{c}_3 e^{-\alpha}\left[B_1 e^{i\rho\alpha} + B_2 e^{-i\rho\alpha}\right] \quad (3.81)$$

şeklinde bulunur.

Benzer işlemleri $V_2(\alpha)$ çözümü için yapalım. $V_2(\alpha)$ çözümü için Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$F(a,b;c;z) = \tilde{B}_1 (-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}) + \tilde{B}_2 (-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z})$$
$$|\arg(-z)| \langle \pi \quad (3.82)$$

Burada katsayılar,

$$\tilde{B}_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \quad \tilde{B}_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} \quad \text{dir.}$$

$$a = \frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}, \quad b = \frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}, \quad c = \frac{3}{2}, \quad \sigma = -1+i\rho$$

$$1-c+a = \frac{\sigma_1-\sigma}{2}, \quad 1-b+a = -\sigma, \quad 1-c+b = \frac{\sigma_1+\sigma+2}{2}, \quad 1-a+b = \sigma+2,$$

$$b-a = \sigma+1, \quad c-a = \frac{\sigma_1-\sigma+2}{2}, \quad c-b = \frac{-\sigma_1-\sigma}{2}, \quad a-b = -\sigma-1,$$

ifadelerini (3.82) analitik devam bağıntısında yazarsak,

$$F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2};\frac{3}{2};z)=\widetilde{B}_1(-z)^{-\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}}F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1-\sigma}{2};-\sigma;\frac{1}{z})+$$
$$\times\widetilde{B}_2(-z)^{-\frac{\sigma_1+m+2}{2}}F(\frac{\sigma_1+m+2}{2},\frac{\sigma_1+m+1}{2};\sigma_1+\frac{3}{2};\frac{1}{z}) \qquad (3.83)$$

ve katsayılarda

$$\widetilde{B}_1=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma\left(\frac{i\rho+\sigma_1+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\rho-\sigma_1+1}{2}\right)}\;,\;\widetilde{B}_2=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-i\rho)}{\Gamma\left(\frac{-i\rho+\sigma_1+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-i\rho-\sigma_1+1}{2}\right)}\quad \text{olur.}$$

$V_2(\alpha)$ çözümünde (3.83) Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam ifadesini yazarsak çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$V_2(\alpha)=\widetilde{c}_4\cosh^{\sigma_1}\alpha\,(-\sinh\alpha)\left\{\widetilde{B}_1(\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}}F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1-\sigma}{2};-\sigma;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})+\right.$$
$$\left.\times\widetilde{B}_2(\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}}F(\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\sigma+2;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})\right\} \qquad (3.84)$$

Bu çözümün $\alpha\to\infty$ gitmesi durumunda limitine bakalım.

$$\lim_{\alpha\to\infty}V_2(\alpha)=\lim_{\alpha\to\infty}\widetilde{c}_4\cosh^{\sigma_1}\alpha\,(-\sinh\alpha)\left\{\widetilde{B}_1(\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}}F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1-\sigma}{2};-\sigma;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})+\right.$$
$$\left.\times\widetilde{B}_2(\sinh^2\alpha)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}}F(\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\sigma+2;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})\right\}$$

$\alpha\to\infty$ gitmesi durumunda Hipergeometrik fonksiyonlar

$$F(\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2},\frac{\sigma_1-\sigma}{2};-\sigma;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})=1\;,$$
$$F(\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2},\frac{\sigma_1+\sigma+2}{2};\sigma+2;-\frac{1}{\sinh^2\alpha})=1$$

alırız. Sonsuzda, $\sigma=-1+i\rho$,

$$\left(\sinh^2\alpha\right)^{-\frac{\sigma_1-\sigma+1}{2}}\cong e^{-(\sigma_1-\sigma+1)\alpha}\;,\;\left(\sinh^2\alpha\right)^{-\frac{\sigma_1+\sigma+3}{2}}\cong e^{-(\sigma_1+\sigma+3)\alpha}\;,\;\cosh^{\sigma_1}\alpha\cong e^{\sigma_1\alpha}\;,\sinh\alpha\cong e^{\alpha}$$

olur. Buradan yukarıdaki limiti bulursak $V_2(\alpha)$ çözümünden asimptot

$$\lim_{\alpha\to\infty}V_2(\alpha)=\widetilde{c}_4e^{-\alpha}\left[\widetilde{B}_1e^{i\rho\alpha}+\widetilde{B}_2e^{-i\rho\alpha}\right] \qquad (3.85)$$

şeklinde bulunur.

Şimdi σ sürekli değerlerinde $V_1(\alpha)$ ve $V_2(\alpha)$ çözümlerindeki $\widetilde{c}_3$ ve $\widetilde{c}_4$ normalleştirme katsayılarını belirleyelim. Önce $V_1(\alpha)$ çözümündeki $\widetilde{c}_3$ katsayısını bulalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|V|^2\,dx=\delta(\rho-\rho')\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}V_1(\alpha)\overline{V_1(\alpha)}\cosh^2\alpha\,d\alpha=\delta(\rho-\rho')$$

integralinde (3.81) ifadesini yazarsak

$$|\tilde{c}_3|^2 |B_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\rho-\rho')\alpha} + e^{-i(\rho-\rho')\alpha}) \, d\alpha = \delta(\rho-\rho')$$

buluruz. Bunu düzenler ve δ-kronecker delta fonksiyonunun (3.14) özelliğini kullanırsak $\tilde{c}_3$ sabiti , $|\tilde{c}_3|^2 = \dfrac{1}{4\pi |B_1|^2}$ olarak bulunur.

Burada, $B(\sigma_1,\rho) = \dfrac{\Gamma(1/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{i\rho+\sigma_1+1}{2})\Gamma(\frac{i\rho-\sigma_1}{2})}$ olduğudan S-matris

$$S^{(1)} = \frac{B}{\overline{B}} = \frac{\Gamma(i\sqrt{E})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}+\sigma_1+1}{2})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}-\sigma_1}{2})}{\Gamma(-i\sqrt{E})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}+\sigma_1+1}{2})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}-\sigma_1}{2})}$$ şeklinde bulunur.

Ayni işlemleri $V_2(\alpha)$ çözümündeki $\tilde{c}_4$ katsayısını belirlemek için yapalım. $\int_{-\infty}^{\infty} V_2(\alpha)\overline{V_2(\alpha)} \cosh^2\alpha \, d\alpha = \delta(\rho-\rho')$ integralinde (3.85) ifadesini yazarsak

$$|\tilde{c}_4|^2 |\tilde{B}_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(\rho-\rho')\alpha} + e^{-i(\rho-\rho')\alpha}) \, d\alpha = \delta(\rho-\rho')$$

buluruz. Yine δ-kronecker delta fonksiyonunun (3.14) özelliğinden $\tilde{c}_4$ sabiti , $|\tilde{c}_4|^2 = \dfrac{1}{4\pi |\tilde{B}_1|^2}$ olarak bulunur .

Burada , $\tilde{B}(\sigma_1,\rho) = \dfrac{\Gamma(3/2)\Gamma(i\rho)}{\Gamma(\frac{i\rho+\sigma_1+2}{2})\Gamma(\frac{i\rho-\sigma_1+1}{2})}$ olduğudan S-matris

$$S^{(2)} = \frac{\tilde{B}}{\overline{\tilde{B}}} = \frac{\Gamma(i\sqrt{E})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}+\sigma_1+2}{2})\Gamma(\frac{-i\sqrt{E}-\sigma_1+1}{2})}{\Gamma(-i\sqrt{E})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}+\sigma_1+2}{2})\Gamma(\frac{i\sqrt{E}-\sigma_1+1}{2})}$$ şeklinde bulunur.

(3.53) denklemini Schrödinger denklemine getirelim. (2.24) , (2.25) bağıntılarından ve (3.53) denkleminden,

$$\frac{d^2\Psi}{d^2\beta} + \frac{1}{2}\left[-\frac{J''}{J} + \frac{1}{2}\left(\frac{J'}{J}\right)^2 \right]\Psi = \sigma_1(\sigma_1+1)\Psi \tag{3.86}$$

bir boyutlu Schrödinger denklemini buluruz. S^3 küresinde hacim elemanı $\sqrt{g}\, dx = r^3 \cosh^2\alpha \cosh\beta \, d\alpha d\beta d\varphi$ şeklinde olup $J(\beta) = \cosh\beta$ dir. (3.86) denkleminden Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d\beta^2} + \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2\beta} - (\sigma_1 + 1/2)^2 \right]\Psi = 0 \tag{3.87}$$

şeklinde bulunur. Burada potansiyel

$$v(\beta) = -\frac{m^2 - 1/4}{\cosh^2 \beta} \tag{3.88}$$

ve enerji $E = -(\sigma_1 + 1/2)^2$ dir. (3.89)

Benzer şeklide (3.70) denklemini Schrödinger denklemine getirelim. $J(\alpha) = \cosh^2 \alpha$ olmak üzere Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2\Psi}{d\alpha^2} + \left[\frac{\sigma_1(\sigma_1 + 1)}{\cosh^2 \alpha} - (\sigma + 1)^2\right]\Psi = 0 \tag{3.90}$$

olarak bulunur. Burada potansiyel

$$v(\beta) = -\frac{\sigma_1(\sigma_1 + 1)}{\cosh^2 \alpha} \tag{3.91}$$

ve enerji $E = -(\sigma + 1)^2$ dir. (3.92)

SONUÇ

Simetrik yüzeyde verilen Laplace-Beltrami operatörünün değişkenlerine ayrılabildiği bir çok koordinat sistemi vardır. Ancak bunların Jeodesik ile bağlı olması başka sözle simetri grubunun bir parametreli altgrubu ile verilmesi durumunda bir boyutlu Schrödinger denklemine getirilebilir. Yüzeyde alınan farklı koordinat sistemlerine karşılık farklı kuantum sistemler alınır. *SU(2)* grubunun simetrik yüzeyinde Biküresel , Küresel , *SU(1,1)* grubunun simetrik yüzeyinde ise Biküresel, Parabolik(Horiküresel) ve Hiperbolik koordinat sistemlerine bağlı aşağıdaki potansiyellere sahip

$$V(x) = \frac{1/4 - m^2}{\cos^2 x} + \frac{1/4 - n^2}{\sin^2 x}, \quad V(x) = \frac{l(l+1)}{\sin^2 x},$$

$$V(x) = -\left(\frac{1/4 - n^2}{\sinh^2 x} + \frac{-1/4 + m^2}{\cosh^2 x}\right), \quad V(x) = -\frac{\nu^2 - \mu^2}{4e^x}, \quad V(x) = -\frac{\sigma_1(\sigma_1 + 1)}{\cosh^2 x},$$

kuantum sistemler incelenmiştir.

Edebiyattan bellidir ki $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ tek oyuklu hiperboloidi detaylı olarak çalışılmamıştır ve bu sepebten tezin bu kısmı orijinal sayılmalıdır.

TARTIŞMA

Bu çalışmada simetrik yüzeyde verilen bir paçacık problemine bakılmıştır. İleriki çalışmalarda n parçacık problemine bakılması düşünülmektedir.

EKLER

A. HOMOJEN ve SİMETRİK UZAYLAR

1. Homojen Uzay.

Γ bir topolojik uzay, G de Lie grubu olsun. Eğer her bir $\alpha,\beta \in \Gamma$ nokta çifti için bir $g \in G$ var ve $\beta = g\alpha$ ise G grubu Γ uzayında geçişli (transitiv) dir denir. Eğer G grubu Γ uzayında geçişli ise Γ uzayına G grubunun homojen uzayı denir.

G Lie grubunun bir altgrubu H, homojen uzayın bir $\alpha \in \Gamma$ noktasını invaryant bırakırsa bu altgruba α noktasının stabilite (stationary, isotropy, little) grubu denir.

Homojen uzay çoğu zaman G/H bölüm uzayı olarak tanımlanır : H, G grubunun bir altgrubu olmak üzere G/H grubu $x \in G$, xH sol denklik sınıflarının kümesi olarak tanımlanır. Eğer $H = \{e\}$ ise G grubunun kendisi de homojen uzay oluşturur. Homojen uzaylara ait örnekler verelim.

1. $G=SO(n+1)$ grubu , R^{n+1} Euclidean uzayda

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \tag{A.1}$$

kuadratik formunu invaryant bırakan R^{n+1} uzayının özel ortogonal dönüşümler grubu gibi tanımlandığından açıktır ki (A.1) denklemiyle verilen S^n , n boyutlu küre yüzeyi SO(n+1) grubunun homojen uzayıdır.

$\overset{o}{x} = (1,0,\ldots,0) \in S^n$ noktasının H stabilite altgrubunun elemanları

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad , \quad A \in SO(n) \ , h \in H$$

matrisleri ile verildiğinden, S^n küre yüzeyi $SO(n+1)/SO(n)$ denklik sınıflarına izomorftur. Yani S^n küresinin keyfi bir x noktasının G grubunun elemanları ile bağlantısı şu formülle verilebilir :

$$x = \overset{o}{x} h g_x = \overset{o}{x} g_x \quad , \quad \overset{o}{x} = \overset{o}{x} h \quad , \quad g_x \in G \quad , \quad h \in H .$$

2. $R_{1,n}^{1+n}$ pseudo-Euclidean uzayın özel ortogonal dönüşümler grubu $G=SO(1,n)$, $\overset{o}{x} = (1,0,\ldots,0) \in R_{1,n}^{1+n}$ noktasını invaryant bırakan altgrup $H=SO(n)$ olmak üzere $X=G/H$ homojen uzayı

$$x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1 \quad , \quad x_o \rangle 0 \qquad \text{(A.2)}$$

denklemiyle verilen iki oyuklu hiperboloidle temsil edilir.

$\overset{o}{x} = (0,1,\ldots,0) \in R_{1,n}^{1+n}$ noktasını invaryant bırakan altgrup $H=SO(1,n-1)$ olmak üzere $X=G/H$ homojen uzayı

$$x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = -1 \qquad \text{(A.3)}$$

denklemiyle verilen bir oyuklu hiperboloide izomorftur.

2. Simetrik Uzay.

G bir Lie grubu, σ , G grubunun bir involutif otomorfizması olsun, $\sigma^2 = 1$, $\sigma \neq 1$. H, σ dönüşümüne göre G grubunun değişmeyen bir altgrubu olsun , $\sigma(H) = H$. Bu durumda G/H uzayına σ dönüşümüyle tanımlanan homojen simetrik uzay denir.

Simetrik uzayın diğer bir tanımı, uzayın eğrilik tensörünün kovaryant türevinin $\nabla_s(R_{abcd}) = 0$ sıfır olmasıyla verilir. G grubunun stabilite altgrubu; kompakt ise simetrik uzay Riemannian metriğine sahip olur ve bu uzaylar Riemannian homojen simetrik uzay, kompakt değilse uzay pseudo-Riemannian homojen simetrik uzay olarak adlandırılır. Simetrik uzaylara ait örnekler verelim.

1. $G=SO(n+1)$, σ : involutif otomorfizma dönüşümü,

$$\sigma(g) = s g s^{-1} \quad , \quad g \in G, \quad s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

burada I_n , R^n de birim matris olmak üzere

$$\sigma(h) = s h s^{-1} = h \quad , \quad h \in H \equiv SO(n)$$

olduğundan $SO(n+1)/SO(n)$ homojen uzayı simetriktir.

2. $G=SO(p,q)$; $g \in SO(p,q)$, $gIg^t = I$ denklemini sağlayan matrisler grubu olduğundan , involutif otomorfizma $\sigma(g) = IgI$ şeklinde verilsin. Bu dönüşümü invaryant bırakan altgrup G grubunun maksimum kompakt altgrubu $H \equiv SO(p) \times SO(q)$ olduğundan $X = G/H \equiv SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ homojen simetrik uzay olur.

3. Kuantum İntegrallenebilir Sistem.

N parçacığı karakterize eden dalga fonksiyonu $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, normalleştirme koşulu da $\int \ldots \int |\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)|^2 dx_1 \ldots dx_N = 1$ şeklinde verilir. Dalga fonksiyonu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N; t) = H\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N; t)$$

diferensiyel denkleminin çözümüyle verilir. Burada H, N parçacıktan oluşan sistemin toplam enerjisini temsil eder. $V(x)$ potansiyeli ile birbirini etkileyen N parçacıklı bir kuantum sistem

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x_1, x_2, \ldots, x_N) = -\hbar^2 \left(\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{1}{2m_N}\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\right) + V(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

şeklinde Hamiltonyen ile tanımlanır. Burada $V(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ potansiyeli özel tipte bir fonksiyondur. Örnek olarak iki farklı tip sistem verilebilir ki bunlar tam integrallenebilir. Birincisi Oskilatör tip N parçacık problemi ki potansiyel , $V(x_1, x_2, \ldots, x_N) = k/2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + v(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ şeklinde , diğeri ise Coulomb tip N parçacık problemi olup potansiyel ,

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_N) = -\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{-1/2} + v(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

şeklinde verilir. Burada k ve α sabitlerdir.

Parçacıkların bir dış kuvvetin etkisi altında olmaması durumunda potansiyel enerji parçacıkların birbirlerine göre durumlarına bağlıdır ve potansiyel , $V(x_1 - x_2, \ldots, x_{N-1} - x_N)$ biçiminde yazılır. İki parçacıktan oluşan bir sistem için bunu yazarsak, $V(x_1 - x_2)$, Hamiltonyen

$$H = -\hbar^2 \left(\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + V(x_1 - x_2)$$

olur. Bunun için özdeğer denklemi yazılarak sistem çözülür. Parçacıklar bir dış kuvvetin etkisi altında olsun fakat birbirleriyle etkileşmesin, bu durumda potansiyel $V_1(x_1) + \ldots + V_N(x_N)$ şeklinde verilir. İki parçacıktan ibaret olan sistem için bunu yazarsak, $V_1(x_1) + V_2(x_2)$ ve Hamiltonyen

$$H = -\hbar^2 \left(\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + V_1(x_1) + V_2(x_2)$$

şeklinde verilir. Etkileşmeyen parçacıklar için enerji özdeğer denklemi parçacık sayısı kadar tek parçacık denklemine ayrılabilir. Parçacıklar özdeş ise verilen bu durumlar geçerli olmaz. Tek parçacık için potansiyel *V(x)* şeklinde verilir ki bu bir boyutlu potansiyeldir. Parçacıktan kastımız, bunların nokta biçiminde oldukları veya enazından gözönüne alınan fiziksel sistemin tipik boyutlarından daha küçük boyutlara sahip olduklarını ima ediyoruz.

Simetrik uzayda bir serbest parçacığın kuantum problemi ilginçtir ve bir boyutlu integrallenebilir kuantum sistemle bağlantılıdır. Bu tür problemler bir boyutlu uzayda N parçacık problemidir ve potansiyel $V = V(x_i - x_j)$ formunda verilir.Potansiyelin üç basit tipini verelim.$V(x) = \sin^2 x$, $V(x) = \sinh^{-2} x$, $V(x) = x^{-2}$. Bu potansiyeller sırasıyla kompakt , kompakt olmayan ve eğriliği sıfır olan simetrik uzaylarla bağlantılıdır. Bu sistemlerin tam kuamtum sistemlerinin verilmesi durumunda gösterilebilir ki Hamiltonyen ile simetrik uzaydaki Laplace basit bağlantılıdır.

Tam çözülebilen kuantum sistemleri incelenebilmesi için özellikle Hilbert uzayı , Lie grubu ve cebiri , simetrik uzay , diferensiyel geometri , özel fonksiyonlar v.b. matematiksel yapıların bilinmesi gerekir.

4. Laplace-Beltrami Operatörü.

Riemannian uzayda (g_{ij}) metrik matrisi ve Γ_{ij}^k bağlantısı tanımlanmış olsun. Eğer (g_{ij}) metrik matrisinin kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0$$

sıfır ise bu bağlantıya metrik matrisle uzlaşan bağlantı denir. Metrik matrisle uzlaşan bağlantının ifadesi aşağıdaki formülle verilir.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \tag{A.4}$$

T^i , $(1,0)$ tipli tensörün diverjansını verelim. T^i tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{mk}^i T^m$$

formülü ile verildiğinden T^i tensörünün diverjansı için aşağıdaki formülü alırız.

$$div\, T^i = \nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma_{mi}^i T^m, \quad g = \det(g_{ij}), \tag{A.5}$$

$$\Gamma^{i}_{mi}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^{m}}-\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^{l}}\right)=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{x^{m}}$$

formülünden yararlanarak (A.5) bağıntısından

$$div\,T^{i}=\nabla_{i}T^{i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\sqrt{g}\,T^{i})$$

alırız. Burada $T^{i}=g^{ij}\dfrac{\partial}{\partial x^{j}}$ ifadesini yerine yazarsak

$$\Delta_{L,B}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^{j}}) \qquad \text{(A.6)}$$

buluruz ki buna Riemannian uzayda verilmiş Laplace-Beltrami operatörü denir. $x=(x_1,\dots,x_n)$ kartezyen koordinatlar , $g_{ij}=\delta_{ij}$ metrik matris olmak üzere E_n n boyutlu Euclidean uzayda Laplace operatörü

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad \text{(A.7)}$$

olarak verilir. $E_{p,q}$ pseudo-Euclidean uzayda metrik matris

$$(g_{ij})=diag(\underbrace{1,\dots,1}_{p\ tane};\underbrace{-1,\dots,-1}_{q\ tane})$$

şeklinde verilir. Bu durumda Laplace operatörü

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-\dots-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \qquad \text{(A.8)}$$

olur.

S^{n-1} küresinde verilmiş $\theta_1,\dots,\theta_{n-1}$ küresel koordinat sistemi için Laplace-Beltrami operatörünü verelim. $x=(x_1,\dots,x_n)\in S^{n-1}$ de küresel koordinatlar

$$\begin{aligned}
x_1&=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\dots\sin\theta_2\sin\theta_1\\
x_2&=r\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\dots\sin\theta_2\cos\theta_1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1}&=r\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\\
x_n&=r\cos\theta_{n-1}
\end{aligned} \qquad \text{(A.9)}$$

şeklinde verilir. Burada

$x_1^2+\dots+x_n^2=r^2$, $r\ge 0$, $0\le\theta_1\le 2\pi$, $0\le\theta_k\le\pi$, $2\le k\le n-1$ dir.

Metrik matris , $(g_{ij})=\left[\dot{x}_{\tau_i},\dot{x}_{\tau_j}\right]$, $\tau_1=r$, $\tau_2=\theta_1$, ... , $\tau_n=\theta_{n-1}$ bağıntısından

$$(g_{ij})=diag(1,r^2,r^2\sin^2\theta_{n-1},\dots,r^2\sin^2\theta_2\dots\sin^2\theta_{n-1})$$

şeklinde bulunur. Buradan Laplace-Beltrami operatörü

$$\Delta^{(n)}_{L,B}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta^{(n-1)}_{\omega} \qquad \text{(A.10)}$$

olup birinci kısım operatörün radyal kısmını $\Delta^{(n-1)}_{\omega}$ da açısal kısmını oluşturur. Burada

$$\Delta_o^{(n-1)}=\frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}+\frac{1}{\sin^2\theta_{n-1}}\Delta_o^{(n-2)}$$

$$=\frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\theta_{n-1}\ldots\sin^2\theta_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} \qquad \text{dir.}$$

$F(r,\theta_1,\ldots,\theta_n)=r^\sigma\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_n)$, σ. dereceden homojen bir fonksiyon olmak üzere

$$\Delta_{L,B}F=0$$

Laplace denklemini ele alalım.

$$\Delta_{L,B}^{(n)}F=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_o^{(n-1)}F=0$$

Buradan

$$\Delta_o^{(n-1)}\Phi=\sigma(\sigma+n-2)\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_n) \tag{A.11}$$

denklemini buluruz.

B. ÖZEL FONKSİYONLAR

Özel fonksiyonlar , teorik ve pratik araştırmalarda, özellikle matematik fiziğin denklemlerinin belirli koordinat sistemlerinde değişkenlerine ayrılması metoduyla çözülmesinden ortaya çıkar ve özel isimlerle belirtilir.

1. Gamma Fonksiyonu.

Basit ve çok önemli özel fonksiyonlardan birisi olan Gamma fonksiyonu diğer özel fonksiyonların çalışılabilmesi için önceden bilinmesi gerekir. $\Gamma(z)$ notasyonu ile gösterilen ve

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \quad , \qquad \operatorname{Re} z\rangle 0 \tag{B.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. $\Gamma(z)$ notasyonu ilk defa 1814 yılında Legendre tarafından verilmiştir. (B.1) ifadesini iki integralin toplamı olarak

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt=P(z)+Q(z)$$

şeklinde yazalım. P(z) fonksiyonu $\operatorname{Re} z\rangle 0$ yarım düzlemde analitik, Q(z) ise bir tam fonksiyondur. Buradan $\Gamma(z)=P(z)+Q(z)$ fonksiyonu $\operatorname{Re} z\rangle 0$ yarım düzleminde analitik olur. Yukarıdaki ilk integralde e^{-t} teriminin seri açılımını yazar ve terim terim integralini alırsak

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

buluruz. Buradan $z=-n$, $n=0,1,2,\ldots$ basit kutup noktalarında $\Gamma(z)$ fonksiyonunun rezidüsü

$$\operatorname*{Res}_{z=-n}\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{(B.2)}$$

olur. Böylece $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z=0,-1,-2,\ldots$ noktalarında basit kutuplu, $z\neq 0,-1,-2,\ldots$ noktalarında ise z'nin analitik bir fonksiyonu olur.

Gamma fonksiyonunun önemli bazı özelliklerini verelim.

- $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z>0$
- $\Gamma(n+1)=n!$, n pozitif tamsayı
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$ (B.3)
- $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$, $\operatorname{Re} z>0$
- $\Gamma(n)=\infty$, $n=0,-1,-2,\ldots$, $\Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z)=\pi\sec\pi z$

İntegrallerin belirli bir sınıfı Gamma fonksiyonu ile ifade edilir.

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad , \quad \operatorname{Re}x,\ \operatorname{Re}y>0 \qquad \text{(B.4)}$$

integraliyle tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir ve *x, y* kompleks değişkenleriyle analitik bir fonksiyondur. Beta fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyonel denklemleri verebiliriz.

- $B(x,y)=B(y,x)$
- $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (B.5)
- $B(x,y)\,B(x+y,z)\,b(x+y+z,u)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(x+y+z+u)}$

2. Hipergeometrik Fonksiyonlar.

İkinci mertebeden lineer homojen diferensiyel denklem bir çok singüler noktalara sahip olabilir. Özel olarak singüler noktaları $(0,1,\infty)$ olan denklemi

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{du}{dz}-abu=0 \qquad \text{(B.6)}$$

formunda verebiliriz. Burada, z kompleks değişken , a,b,c z 'den bağımsız kompleks ve reel değerler alabilen sabitlerdir ve bunlar denklemin parametreleri olarak tanımlanır. (B.6) denklemi Hipergeometrik denklem, bu denklemin çözümleri de Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır.

Lineer diferensiyel denklemlerin genel teorisinden (B.6) denklemi $z=0$ noktası civarında

$$u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad , \quad c_o \neq 0$$

formunda belirli bir çözüme sahip olur. Bu kuvvet serisi $|z|\langle 1$ için yakınsaktır. (B.6) denkleminin $z=0$ civarındaki çözümü,

$c = n \neq 0,-1,-2,\ldots$ ise,

$$u = {}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{n!(c)_n} z^n , \qquad \text{(B.7)}$$

$c=-n \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$ ise,

$$u = z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z) = z^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+n+1)_m\,(b+n+1)_m}{m!(n+2)_m} z^m$$

olur, $(a)_o = 1$, $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$, $n = 1,2,\ldots$,

$(b)_o = 1$, $(b)_n = b(b+1)\ldots(b+n-1)$, $n = 1,2,\ldots$,

$(c)_o = 1$, $(c)_n = c(c+1)\ldots(c+n-1)$, $n = 1,2,\ldots$.

$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{n!(c)_n} z^n = 1 + \frac{ab}{1.c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)} z^2 + \ldots$$

fonksiyonu z değişkenli a,b,c parametreli Hipergeometrik seri olarak da tanımlanır ve $|z|\langle 1$ için yakınsaktır. Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q;z) = {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p; & \\ & z \\ b_1,\ldots,b_q; & \end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{n!(b_1)_n \ldots (b_q)_n} z^n$$

şeklinde verilir. Burada

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)} , \quad (a)_o = 1 , \ (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) , \ n = 1,2,\ldots$$

dir ve bu Pochhammer sembolü olarak bilinir.

Hipergeometrik fonksiyonların önemli bazı özelliklerini verelim. Hipergeometrik seride a ve b parametrelerinin yeri değişirse serinin karakteri değişmez. Buradan

- $F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$ simetri özelliğini alırız.

Hipergeometrik fonksiyonun türevi

- $\dfrac{d^n}{dz^n} F(a,b;c;z) = \dfrac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z)$, $n = 1,2,\ldots$ dir.

- $\lim_{c \to -n} \left[\frac{1}{\Gamma(c)} F(a,b;c;z) \right] = \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z)$

- $F(a,b+1;c;z) - F(a,b;c;z) = \frac{a\,z}{c} F(a+1,b+1;c+1;z)$

- $F(2a,2b;a+b+1/2;z) = F(a,b;a+b+1/2;\frac{4z}{z-1})$

Hipergeometrik fonksiyonun integral temsili

$$F(a,b;c;z) = {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}\, dt \quad , \ \mathrm{Re}\, c \rangle \mathrm{Re}\, b \rangle 0 \ , \ |\arg(1-z)| \langle \pi$$

şeklinde verilir.

${}_2F_1(a,b;c;z)$ fonksiyonu çoğu zaman $F(a,b;c;z)$ şeklinde yazılır ve Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır. ${}_1F_1(a;c;x)$ fonksiyonu ise Confluent Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır ve bu

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (c-x)\frac{dy}{dx} - ay = 0 \tag{B.8}$$

diferensiyel denkleminin çözümü olur ki aşağıda verilen her bir çözüm (B.8) Confluent Hipergeometrik denklemin bir çözümüdür.

- $y_1 = {}_1F_1(a;c;x) = \Phi(a,c;x)$
- $y_2 = x^{1-c}\, {}_1F_1(a-c+1;2-c;x)$
- $y_3 = e^x\, {}_1F_1(c-a;c;-x)$
- $y_4 = x^{1-c} e^x\, {}_1F_1(1-a;2-c;-x)$

Türev bağıntısı $\frac{d^n}{dx^n}\, {}_1F_1(a;c;x) = \frac{(a)_n}{(c)_n}\, {}_1F_1(a+n;c+n;x)$ şeklinde verilir.

Confluent Hipergeometrik fonksiyonun integral temsili,

$${}_1F_1(a;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xu}\, u^{a-1} (1-u)^{c-a-1}\, du \quad , \ \mathrm{Re}\, c \rangle \mathrm{Re}\, a \rangle 0 \qquad \text{olur.}$$

Bazı özel fonksiyonların Hipergeometrik fonksiyonla ifadesini verelim.

- $(1+z)^a = F(-a,b;b;-z)$, $(1-z)^{-2a-1}(1+z) = F(2a,a+1;a;z)$
- $1 + \binom{a}{1} z + \ldots + \binom{a}{m} z^m = \binom{a}{m} z^m F(-m,1;a-m+1;-1/z)$
- $e^{-az} = (2\cosh z)^{-a} \tanh z\; F(1+\frac{a}{2},\frac{a+1}{2};1+a;\frac{1}{\cosh^2 z})$
- $\cos az = F(a/2,-a/2;1/2;\sin^2 z)$, $\sin az = a \sin z\, F(\frac{1+a}{2},\frac{1-a}{2};\frac{3}{2};\sin^2 z)$
- $\sin^{-1} z = z\, F(1/2,1/2;3/2;z^2)$, $Log(z+1) = z\, F(1,1;2;-z)$

z'nin aldığı bazı özel değerler için Hipergeometrik fonksiyonun ifadesini verelim. $z=1$ için,

$$- F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad c\neq 0,-1,-2,\dots \quad , \quad \mathrm{Re}\,c\rangle \mathrm{Re}(a+b)$$

$z=-1$ için,

$$- F(a,b;1+a-b;-1)=2^{-a}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1-b+\frac{a}{2})\Gamma(\frac{1+a}{2})} \quad , \quad 1+a-b\neq 0,-1,-2,\dots$$

$z=1/2$ için,

$$- F(2a,2b;a+b+\frac{1}{2};\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(a+b+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)} \quad , \quad a+b+1/2\neq 0,-1,-2,\dots$$

$z=-1/3$ için ,

$$- F(-a,-a+\frac{1}{2};2a+\frac{3}{2};-\frac{1}{3})=\left(\frac{8}{9}\right)^{2a}\frac{\Gamma(4/3)\Gamma(2a+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(2a+4/3)} \quad , \quad 2a+3/2\neq 0,-1,-2,\dots$$

$z=e^{i\pi/3}$ için ,

$$- F(a+\frac{1}{3},3a;2a+\frac{2}{3};e^{i\pi/3})=2\pi e^{i\pi/2}\,3^{-(3a+1)/2}\,\frac{\Gamma(2a+2/3)}{\Gamma(a+1/3)\Gamma(a+2/3)\Gamma(2/3)}$$

Hipergeometrik denklemin parametreye bağlı olarak çeşitli çözümleri verilebilir. Aşağıdaki çözümlerden her biri Hipergeometrik denklemin bir çözümüdür.

$$\begin{aligned}
u_1 &= F(a,b;c;z)\\
&=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)\\
&=(1-z)^{-a}F(a,c-b;c;\frac{z}{z-1})\\
&=(1-z)^{-b}F(c-a,b;c;\frac{z}{z-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= F(a,b;a+b+1-c;1-z)\\
&=z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;a+b+1-c;1-z)\\
&=z^{-a}F(a,a+1-c;a+b+1-c;\frac{z-1}{z})\\
&=z^{-b}F(b+1-c,b;a+b+1-c;\frac{z-1}{z})
\end{aligned} \qquad (B.9)$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= (-z)^{-a}F(a,a+1-c;a+1-b;\frac{1}{z})\\
&=(-z)^{b-c}(1-z)^{c-a-b}F(1-b,c-b;a+1-b;\frac{1}{z})\\
&=(1-z)^{-a}F(a,c-b;a+1-b;\frac{1}{1-z})\\
&=(-z)^{1-c}(1-z)^{c-a-1}F(a+1-c,1-b;a+1-b;\frac{1}{1-z})
\end{aligned}$$

$$u_4 = (-z)^{-b} F(b+1-c, b; b+1-a; \frac{1}{z})$$
$$= (-z)^{a-c}(1-z)^{c-a-b} F(1-a, c-b; b+1-a; \frac{1}{z})$$
$$= (1-z)^{-b} F(b, c-a; b+1-a; \frac{1}{1-z})$$
$$= (-z)^{1-c}(1-z)^{c-b-1} F(b+1-c, 1-a; b+1-a; \frac{1}{1-z})$$
$$u_5 = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c; 2-c; z)$$
$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; 2-c; z)$$
$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-1} F(a+1-c, 1-b; 2-c; \frac{z}{z-1})$$
$$= z^{1-c}(1-z)^{c-b-1} F(b+1-c, 1-a; 2-c; \frac{z}{z-1})$$
$$u_6 = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z)$$
$$= z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} F(1-a, 1-b; c+1-a-b; 1-z)$$
$$= z^{a-c}(1-z)^{c-a-b} F(c-a, 1-a; c+1-a-b; \frac{z-1}{z})$$
$$= z^{b-c}(1-z)^{c-a-b} F(c-b, 1-b; c+1-a-b; \frac{z-1}{z})$$

$F(a,b;c;z)$ Hipergeometrik fonksiyonun analitik devam bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

1-c, *b-a* , *c-b-a* tamsayı olmasın .

- $F(a,b;c;z) = A_1 F(a,b;a+b-c+1;1-z) + A_2 (1-z)^{c-a-b} \times F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z) \quad , \quad |\arg(1-z)| < \pi$
- $F(a,b;c;z) = A_1 z^{-a} F(a,a+1-c;a+b+1-c;\frac{z-1}{z}) + A_2 z^{a-c}(1-z)^{c-a-b} \times F(c-a,1-a;c+1-a-b;\frac{z-1}{z}) \quad , \quad |\arg(z)| < \pi$ (B.10)
- $F(a,b;c;z) = B_1 (-z)^{-a} F(a,1-c+a;1-b+a;1/z) + B_2 (-z)^{-b} \times F(b,1-c+b;1-a+b;1/z) \quad , \quad |\arg(-z)| < \pi$
- $F(a,b;c;z) = B_1 (1-z)^{-a} F(a,c-b;a-b+1;\frac{1}{1-z}) + B_2 (1-z)^{-b} \times F(b,c-a;b-a+1;\frac{1}{1-z}) \quad , \quad |\arg(1-z)| < \pi$

Burada A_1, A_2, B_1, B_2 katsayıları

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \qquad \text{(B.11)}$$

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \quad , \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$ şeklinde verilir.

Diğer özel fonksiyonlarla Hipergeometrik fonksiyonlar arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi verilir.

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \binom{n+\alpha}{n} F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2})$

- $C_n^\lambda(z) = \frac{1}{n!}(2\lambda)_n F(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2})$

- $P_n(z) = F(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2})$ (B.12)

- $P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2})$

- $J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(z/2)^\nu \, {}_0F_1(\nu+1; -z^2/4)$

Yukarıda verdiğimiz Hipergeometrik fonksiyonlar tek değişkenlidir. Çok değişkenli Hipergeometrik *fonksiyonlar da* vermek mümkündür.

3. Legendre Fonksiyonları.

Dalga yayılması, potansiyel ve difizyon problemlerinin çözümünde ortaya çıkan , ν dereceden ve μ mertebeden

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left[\nu(\nu+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}\right]w = 0 \qquad \text{(B.13)}$$

Legendre diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olan fonksiyonlara Legendre fonksiyonları denir. Burada z kompleks veya reel değişken, ν, μ de reel veya kompleks sabitlerdir.

(B.13) denklemi uygun değişken dönüşümü yapılarak Hipergeometrik denkleme indirgenebilir. Sırasıyla $w = (z^2-1)^{\mu/2} u$ ve $x = \frac{1-z}{2}$ dönüşümleri yapılırsa (B.13) denklemi

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (\mu+1)(1-2x)\frac{du}{dx} + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)u = 0 \qquad \text{(B.14)}$$

Hipergeometrik denklemine getirilir. Buradan (B.13) denkleminin çözümü

$$w = P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}) \quad , |1-z|\langle 2 \qquad \text{(B.15)}$$

olur. Eğer $x = z^2$ dönüşümü yaparsak (B.13) denklemi

$$4x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[2-(4\mu+6)x\right]\frac{du}{dx} - (\mu-\nu)(\nu+\mu+1)u = 0 \qquad \text{(B.16)}$$

Hipergeometrik denkleme dönüşür ve buradan (B.13) denkleminin çözümü

$$w = Q_\nu^\mu(z) = e^{i\mu\pi}\, 2^{-\nu-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\, z^{-\nu-\mu-1}\left(z^2-1\right)^{\mu/2} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right), \quad |z|\rangle 1$$

(B.17)

olur. $\nu,\mu \in N$ ise $P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ lineer bağımsız çözümler olduğundan (B.13) denkleminin çözümü $w = c_1 P_\nu^\mu(z) + c_2 Q_\nu^\mu(z)$ olur, burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

$P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonları birinci ve ikinci türden, ν dereceden Legendre fonksiyonları olarak tanımlanır. Bu fonksiyonlar $(-\infty,1)$ boyunca kesilen Z düzleminde regüler ve tek değerlidir. Legendre diferensiyel denklemi, $\mu \to -\mu$, $z \to -z$, $\nu \to -\nu-1$ değişimi yapılırsa invaryant kalır. Böylece $P_\nu^{\pm\mu}(\pm z)$, $Q_\nu^{\pm\mu}(\pm z)$, $P_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z)$, $Q_{-\nu-1}^{\pm\mu}(\pm z)$ çözümleri de (B.13) denkleminin çözümleri olur. Legendre fonksiyonları arasındaki bazı bağıntıları verelim.

- $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$
- $e^{i\mu\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)\, Q_\nu^{-\mu}(z) = e^{-i\mu\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)\, Q_\nu^\mu(z)$
- $P_\nu^m(z) = \dfrac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} P_\nu^{-m}(z)$, $\mu = m = 1,2,\ldots$
- $Q_\nu^\mu(-z) = -e^{\pm i\nu\pi} Q_\nu^\mu(z)$
- $P_\nu^o(z) = P_\nu(z)$, $\mu = 0$, $P_\nu^m(z) = 0$, $m\rangle\nu$, $m \in N$

Legendre fonksiyonları, $(-\infty,-1)$ boyunca kesilen düzlemde $P_\nu^\mu(z)$,$(-\infty,1)$ boyunca kesilen düzlemde $Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonu z kompleks değişkenin analitik bir fonksiyonudur. Bu kesilen bölgelerde verilen Legendre fonksiyonları Hipergeometrik seri cinsinden ifade edilebilir. Legendre fonksiyonlarının bir çok uygulamasında $z = x + 0i = x$, $-1\langle x \langle 1$ alınır.

- $P_\nu^\mu(x) = \dfrac{e^{\pm i\mu\pi/2}}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \dfrac{1-x}{2})$
- $P_\nu^\mu(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \dfrac{1-x}{2})$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{2\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\mu/2} F(-\nu,\nu+1;1+\mu;\frac{1-x}{2}) + \frac{\Gamma(\mu)}{2}\cos(\mu\pi)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2})$$

$P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ Legendre fonksiyonlarını trigonometrik değişken türünden yazabiliriz. $z = \cos\theta$,

- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{\sin\theta}{2}\right)^{-\mu} F(\dfrac{1+\nu-\mu}{2}, \dfrac{-\nu-\mu}{2}; 1-\mu; \sin^2\theta)$, $0\langle\theta\langle\pi/2$
- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\dfrac{\sin\theta}{2}\right)^{-\mu} F(1+\nu-\mu, -\nu-\mu; 1-\mu; \sin^2\dfrac{\theta}{2})$
- $P_\nu^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\cot\dfrac{\theta}{2}\right)^{\mu} F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \sin^2\dfrac{\theta}{2})$

ν, μ sabitlerinin bazı özel değerleri için Legendre fonksiyonlarının ifadesini verelim.

$\mu = m = 1,2,\ldots$ için,

$$- P_\nu^m(z) = \frac{2^{-m}\,\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1)}\left(z^2-1\right)^{m/2} F(1+m+\nu, m-\nu+1; 1+m; \frac{1-z}{2}) \quad \text{(B.18)}$$

$\nu = n = 0,1,2,\ldots$ olsun. Bu durumda μ negatif bir tamsayı ise (B.15) ifadesindeki Hipergeometrik seri z bağlı n dereceden bir polinom olur. $\mu = m = 1,2,\ldots$ ve $n \geq m$ ise (B.18) bağıntısı geçerli olur ve $n-m$. dereceden polinom olur. $\nu = 0$ ise $P_\nu^o(z) = P_\nu(z)$ olarak yazılır. Genellikle $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ Legendre fonksiyonları $P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$ fonksiyonları da associated Legendre fonksiyonları olarak tanımlanır.

$\mu = 0$ ise,

$$P_\nu(z) = F(1+\nu, -\nu-\mu; 1; \frac{1-z}{2})$$

olur ki bu ifade, z göre m $(m=1,2,\ldots)$ defa türevi alınırsa

$$- P_\nu^\mu(z) = (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$$

$$- Q_\nu^\mu(z) = (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}$$ bağıntılarını buluruz.

$$- P_\nu(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^\nu F(-\nu, -\nu; 1; \frac{z-1}{z+1})$$

$$= \left(\frac{z-1}{2}\right)^\nu F(-\nu, -\nu; 1; \frac{z+1}{z-1})$$

$$= F(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}) \quad = (-1)^\nu F(-\nu, -\nu; 1; \frac{1+z}{2})$$

$$= \left(\frac{z-1}{2}\right)^\nu F(-\nu, -\nu; -2l; \frac{2}{1-z})$$

$\mu = 0$, $\nu = n = 0,1,2,\ldots$ ise,

$$- P_{2n}(z) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} F(-n, n+1/2; 1/2; z^2)$$

$$- P_{2n+1}(z) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} z\, F(-n, n+3/2; 3/2; z^2)$$

$$- P_n(z) = (2^n n!)^{-1} \frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

bağıntıları verilebilir. Son bağıntı Rodrigues formülü olarak bilinir. Böylece $P_n(z)$, n dereceden bir polinom olur ve $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$ eşitliği sağlanır. Bu polinomlar Legendre polinomu olarak tanımlanır ve Legendre fonksiyonlarının özel bir halidir. Polinomlar $[-1,1]$ aralığında ortogonaldir ve bu aralıktaki tüm kökleri reeldir.

Legendre fonksiyonlarının integral temsilini verelim.

- $P_\nu^\mu(z)=\dfrac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\displaystyle\int_0^\infty (z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}(\sinh t)^{2\nu+1}\,dt \quad , \ \mathrm{Re}(-\mu)\rangle\mathrm{Re}\,\nu\rangle-1$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{\mu\pi}\,2^{-\nu-1}\,\Gamma(\mu+\nu+1)(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi (z+\cos t)^{\mu-\nu-1}(\sin t)^{2\nu+1}\,dt \quad ,\mathrm{Re}(\nu+\mu+1)\rangle 0,\mathrm{Re}\,\nu\rangle-1$$

Legendre polinomlarının ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & , \ n\neq m\\ \dfrac{2}{2n+1} & , \ n=m \ , \ n=0,1,2,\ldots\end{cases}$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1}P_n^m(x)\,P_n^k(x)\,dx=\begin{cases}0 & , \ k\neq m\\ \dfrac{(n+m)!}{m(n-m)!} & , \ k=m\end{cases}$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_n^m(x)\,P_l^k(x)\,dx=(-1)^m\frac{1-(-1)^{l+n}(n+m)!}{(l-n)(l+n+1)\,(n-m)!}$

Legendre polinomlarını genelleştirirsek Jacobi polinomlarını buluruz.

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+(\beta-a-(\alpha+\beta+2)x)\frac{du}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)u=0 \qquad \text{(B.19)}$$

diferensiyel denkleminin çözümleri $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları olarak tanımlanır. Bu diferensiyel denklem Hipergeometrik diferensiyel denkleme indirgenebilir. Bu durumda bu denklemin çözümleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)&=\binom{n+\alpha}{n}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2})\\&=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\beta+1;\frac{1+x}{2})\\&=\binom{n+\alpha}{n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^nF(-n,-n-\beta;\alpha+1;\frac{x-1}{x+1})\\&=\binom{n+\beta}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^nF(-n,-n-\alpha;\beta+1;\frac{x+1}{x-1})\end{aligned}$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{2^{n+\alpha+\beta}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\,x^{n+\alpha+1}\,(x+1)^\beta}F(n+1,n+\alpha+1;2n+\alpha+\beta+2;\frac{2}{1-x})$$

Jacobi polinomlarının bazı özelliklerini verelim.

- $P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)$
- $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\dbinom{n+\alpha}{n}=\dfrac{(\alpha+1)_n}{n!}=\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \quad , \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\dfrac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}$
- $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m$

- $\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n[(\alpha-\beta)-(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)}$

-$2^n n!\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} D^n\left[(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\right]$,Rodrigues formülü.

Jacobi polinomlarının ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

- $\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \delta_{nm}$

Jacobi polinomlarının integral temsilini verelim.

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{t^2-1}{2(t-x)}\right)^n \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\alpha} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{\beta} dt \quad , \; x \neq \pm 1$

- $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n-1} (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \int_{-1}^{1} (x-t)^{-n-1} (1-t)^{n+\alpha} (1+t)^{n+\beta}\, dt$

4. Bessel Fonksiyonları.

Bessel fonksiyonları

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0 \tag{B.20}$$

Bessel diferensiyel denkleminin çözümleridir. Bu diferensiyel denklem $z=0$ civarında seri çözüm kabul eder. Diferensiyel denklemin çözümleri

$$J_{\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{m+\nu} \quad , \quad J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-\nu} \tag{B.21}$$

olur. $J_{\nu}(z)$ çözümü birinci türden ve ν. mertebeden Bessel fonksiyonu olarak tanımlanır ve

$$\begin{aligned} J_{\nu}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} {}_0F_1(\nu+1; -z^2/4) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} e^{-iz} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1; 2iz) \end{aligned}$$

şeklinde verilir. $J_{\nu}(z)$, $J_{-\nu}(z)$ çözümlerinin lineer birleşimini verelim.

- $Y_{\nu}(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_{\nu}(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)\right]$

- $H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z) = \frac{1}{i \sin \nu\pi}\left[J_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)\, e^{-i\nu\pi}\right]$

- $H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z) = \frac{1}{i \sin \nu\pi}\left[J_{\nu}(z) e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(z)\right]$

Burada $Y_\nu(z)$ fonksiyonu ikinci türden Bessel fonksiyonu , $H_\nu^{(1)}(z)$,$H_\nu^{(2)}(z)$ üçüncü türden Bessel fonksiyonları veya birinci ve ikinci Hankel fonksiyonları olarak tanımlanır.

- $J_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\right]$, $Y_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)\right]$

Bessel fonksiyonları $(0,-\infty)$ negatif reel eksen boyunca kesilen düzlemde tek değerlidir ve $z=0$ dallanma noktasıdır.

(B.20) denkleminde z yerine iz alırsak (B.20) denklemi

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}-(z^2+\nu^2)w=0 \tag{B.22}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü $w=a\,J_\nu(iz)+b\,Y_\nu(iz)$ olur. ν bir tamsayı değilse $J_\nu(iz)$, $J_{-\nu}(iz)$ (B.22) denkleminin iki lineer bağımsız çözümleridir. Fakat bu çözümler yerine çoğu zaman $I_\nu(z)$, $I_{-\nu}(z)$ çözümleri alınır.

$$I_\nu(z)=e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(ze^{-i\pi/2})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} \tag{B.23}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\ {}_0F_1(\nu+1;z^2/4)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\ e^{-z}\ {}_1F_1(\nu+1/2,2\nu+1;2z)$$

Bu fonksiyonlar birinci türden modified Bessel fonksiyonları olarak belirtilir, ν reel , z pozitiftir.

$$K_\nu(z)=\frac{1}{2\pi\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\right],\quad \nu\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots\ ,\ |\arg z|\langle\pi\ ,K_{-\nu}(z)=K_\nu(z) \tag{B.24}$$

fonksiyonu da (B.22) denkleminin bir çözümüdür ve bu üçüncü türden modified Bessel fonksiyonu olarak belirtilir. Bessel fonksiyonlarının bazı özelliklerini verelim .

- $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$, $n\rangle 0$, $Y_{-n}(z)=(-1)^nY_n(z)$
- $I_{-n}(z)=I_n(z)$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
- $K_{-n}(z)=K_n(z)$, $J_\nu(ze^{im\pi})=e^{im\nu\pi}J_\nu(z)$, $I_\nu(ze^{im\pi})=e^{im\nu\pi}I_\nu(z)$
- $K_\nu(ze^{im\pi})=e^{-im\nu\pi}K_\nu(z)-i\pi\frac{\sin m\pi\nu}{\sin\pi\nu}I_\nu(z)$
- $Y_\nu(ze^{im\pi})=e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)+2i\frac{\sin m\pi\nu}{\sin\pi\nu}\cos\pi\nu J_\nu(z)$
- $J_\nu(z)J_\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu}\ {}_2F_3(\frac{1+\nu+\mu}{2},1+\frac{\nu+\mu}{2};1+\nu,1+\mu,1+\mu+\nu;-z^2)$
- $J_{1/2}(z)=Y_{-1/2}(z)=(\pi z/2)^{-1/2}\sin z$, $I_{1/2}(z)=(\pi z/2)^{-1/2}\sinh z$

- $\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = z^{\nu} J_{\nu-1}(z)$, $\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} J_{\nu}(z)\right] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$

- $\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m}\left[z^{\nu} J_{\nu}(z)\right] = z^{\nu-m} J_{\nu-1}(z)$, $\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^{m}\left[z^{-\nu} J_{\nu}(z)\right] = (-1)^{m} z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z)$, $m = 1,2,\ldots$

- $\frac{d}{dz}\left[z^{n} I_{n}(z)\right] = z^{n} I_{n-1}(z)$, $\frac{d}{dz}\left[z^{n} K_{n}(z)\right] = z^{n} K_{n-1}(z)$

Bessel fonksiyonlarının integral temsilleri aşağıdaki gibi verlir.

- $J_{n}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta$, $n = 0,1,2,\ldots$

- $J_{\nu}(z) = \frac{2(z/2)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}\int_{0}^{\pi/2} \cos(z\sin\theta)\,(\cos\theta)^{2\nu}\,d\theta$, $\mathrm{Re}\,\nu \rangle -1/2$, Poisson tip integral.

- $K_{\nu}(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\int_{1}^{\infty} e^{-zt}\,(t^{2}-1)^{\nu-1/2}\,dt$, $\mathrm{Re}\,\nu \rangle -1/2,\ \mathrm{Re}\,z \rangle 0$

- $I_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}\int_{-1}^{1} e^{-zt}\,(1-t^{2})^{\nu-1/2}\,dt$, $\mathrm{Re}\,\nu \rangle -1/2$

Bessel fonksiyonları içeren bazı integraller verelim.

- $\int z^{\nu+1} J_{\nu}(z)\,dz = z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)$, $\int z^{-\nu+1} J_{\nu}(z)\,dz = -z^{-\nu+1} J_{\nu-1}(z)$

- $\int z^{\nu+1} K_{\nu}(z)\,dz = -z^{\nu+1} K_{\nu+1}(z)$, $\int z^{-\nu+1} K_{\nu}(z)\,dz = -z^{-\nu+1} K_{\nu-1}(z)$

- $\int z^{\nu+1} I_{\nu}(z)\,dz = z^{\nu+1} I_{\nu+1}(z)$

z'nin küçük ve büyük değerlerinde Bessel fonksiyonlarının aldığı değerleri verelim.

$z \to \infty$ ise,

- $J_{\nu}(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos(z - (\nu + 1/2)\frac{\pi}{2})$, $Y_{\nu}(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin(z - (\nu + 1/2)\frac{\pi}{2})$

- $I_{\nu}(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{z}$, $K_{\nu}(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}$

$z \to 0$ ise,

- $J_{\nu}(z) \cong \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}$, $Y_{\nu}(z) \cong \begin{cases} -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} & , \ \nu \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} ln(z) & , \ \nu = 0 \end{cases}$

- $I_{\nu}(z) \cong \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}$, $K_{\nu}(z) \cong \frac{(\nu-1)!}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$.

Bessel fonksiyonları için ortagonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

- $\int_{0}^{\infty} z^{-1} J_{\nu+2n+1}(z) J_{\nu+2m+1}(z)\,dz = \begin{cases} 0 & , \ m \neq n \\ (4n+2\nu+2)^{-1} & , \ m = n\ ,\ \nu \rangle -1 \end{cases}$.

5. Gegenbauer Fonksiyonları.

Gegenbauer polinomları $C_n^\nu(z)$,

$$\left(1-2hz+h^2\right)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(z) h^n \quad , \quad |h|<\left|z \pm \sqrt{z^2-1}\right| \ , \ \nu \neq 0 \qquad \text{(B.25)}$$

üreteç fonksiyonuyla tanımlanır. Bu polinomlar ayni zamanda ultraküresel polinomlar olarakta bilinir ve $P_n^{(\nu)}(z)$ ile de gösterilir. Burada

$$C_n^\nu(z) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l \Gamma(\nu+l)\Gamma(n+2\nu+l)}{l!\Gamma(\nu)\Gamma(2l+2\nu)(n-l)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^l \qquad \text{veya}$$

$$C_n^\nu(z) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)} F(n+2\nu,-n;\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}) \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \qquad \text{dir.}$$

Gegenbauer polinomlarıyla ilgili bazı bağıntılar verelim.

- $C_{2n}^\nu(z) = \dfrac{(-1)^n\Gamma(n+\nu)}{n!\Gamma(2\nu)} F(-n,n+\nu,\frac{1}{2};z^2)$
- $C_{2n+1}^\nu(z) = \dfrac{(-1)^n 2\Gamma(n+\nu+1)}{n!\Gamma(\nu)} z F(-n,n+\nu+1;\frac{3}{2};z^2)$
- $C_n^\nu(1) = (-1)^n C_n^\nu(-1) \dfrac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\Gamma(2\nu)} \quad ; \quad \dfrac{d^n}{dz^n} C_n^\nu(z) = (2)^n \dfrac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(\nu)}$
- $C_n^1(\cos\theta) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \quad , \quad \lim\limits_{\nu\to 0} \Gamma(\nu) C_n^\nu(\cos\theta) = \dfrac{2}{n}\cos(n\theta) \quad , \quad n=1,2,\ldots$

Gegenbauer polinomları için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} C_n^\nu(z)\, C_r^\nu(z)\, (1-z^2)^{\nu-1/2}\, dz = \begin{cases} 0 & , \ n \neq r \\ \dfrac{2^{1-2\nu}\pi\Gamma(n+2\nu)}{n!(\nu+n)\Gamma^2(\nu)} & , \ n=r \end{cases}$

n keyfi değerleri için

$$(z^2-1)\frac{d^2w}{dz^2} + (2\nu+1)\frac{dw}{dz} - n(n+2\nu)w = 0 \qquad \text{(B.26)}$$

denkleminin çözümleri Gegenbauer fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu diferensiyel denklem Hipergeometrik denkleme getirilebilir ve $C_n^\nu(z)$, $z=1$ de regüler olur. Buradan Gegenbauer fonksiyonunun Hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
- C_n^\nu(z) &= \frac{(2\nu)_n}{n!} F(-n,n+2\nu,\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}) \\
&= (-1)^n (2\nu)_n F(-n,n+2\nu,\nu+\frac{1}{2};\frac{1+z}{2}) \\
&= (2)^n (\nu)_n (z-1)^n F(-n,-n-\nu+1/2;-2n-2\nu,\frac{2}{1-z}) \\
&= (2\nu)_n \left(\frac{1+z}{2}\right)^n F(-n,-n-\nu+\frac{1}{2};\nu+\frac{1}{2};\frac{z-1}{z+1})
\end{aligned}$$

$$- C^{\nu}_{2m}(z) = (-1)^m \frac{(\nu)_m}{m!} F(-m, m+\nu, \frac{1}{2}; z^2) \quad , \ n = 2m$$

$$= \frac{(\nu)_{2m}}{(2m)!} F(-m, m+\nu, \nu+\frac{1}{2}; 1-z^2) = \frac{(\nu)_m}{(1/2)_m} P_m^{(\nu-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(2z^2-1)$$

$$- C^{\nu}_{2m+1}(z) = (-1)^m \frac{(\nu)_{m+1}}{m!} 2z F(-m, m+\nu+1; 3/2; z^2)$$

$$= \frac{(2\nu)_{2m+1}}{(2m+1)!} z F(-m, m+\nu+1; \nu+1/2; 1-z^2)$$

$$= \frac{(\nu)_{m+1}}{(1/2)_{m+1}} z P_m^{(\nu-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(2z^2-1)$$

Bazı özel değerler için Gegenbauer fonksiyonunun ifadesini verelim.

$$- C^{\nu}_n(1) = \frac{(2\nu)_n}{n!} \ , \ C^0_0(1) = 1 \ , \ C^0_n(1) = \frac{2}{n} \ , \ n = 1,2,\ldots \ , \ C^{\nu}_0(1) = 1 \ , \ C^{\nu}_1(z) = 2\nu z$$

$$- C^{\nu}_n(-z) = (-1)^n C^{\nu}_n(z) \ , \quad C^{\nu}_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(\nu)_m (\nu)_{n-m}}{m!(n-2m)!} (2z)^{n-2m}$$

$$- C^{\nu}_n(0) = \begin{cases} 0 & , \ n \ tek \ ise \\ \dfrac{(-1)^m (\nu)_m}{m!} & , \ n = 2m \ çift \ ise \end{cases} \quad , \quad C^{\nu}_n(z) = \sum_{m=0}^{n/2} \frac{(-1)^m (\nu)_{n-m}}{m!(n-2m)!} (2z)^{n-2m}$$

$$- \frac{d}{dz} C^{\nu}_n(z) = 2\nu C^{\nu+1}_{n-1}(z) \ .$$

Jacobi ve Gegenbauer fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir ve Gegenbauer fonksiyonu Jacobi fonksiyonunun özel bir halidir.

$$- C^{1/2}_n(z) = P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$$

$$- C^{\nu}_n(z) = \frac{(2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} = P_n^{(\nu-\frac{1}{2}, \nu-\frac{1}{2})}(z)$$

Gegenbauer fonksiyonlarının integral temsili aşağıdaki gibi verilir.

$$- C^{\nu}_n(z) = \frac{2^{1-2\nu}\Gamma(2\nu+n)}{n!\Gamma^2(\nu)} \int_0^{\pi} \left[z + (z^2-1)^{1/2}\cos\theta\right]^n (\sin\theta)^{2\nu-1} d\theta \quad , \quad \nu \rangle 0$$

C. SCHRÖDINGER DENKLEMİ

1. Schrödinger Denklemi.

m kütleli bir cisim x-ekseni boyunca bir $F(x,t)$ kuvvetinin etkisiyle hareket etsin. Bu bir boyutta belirli bir kuvvet altında parçacığın hareketidir. v hız, $p = mv$ momentum , $T = 1/2\, mv^2$ kinetik enerji, $x(t)$ parçacığın pozisyonunu göstermek üzere , klasik mekanikte bunu nasıl belirleriz.

Newton'un ikinci yasası $(F=ma)$ uygulanır ve uygun başlangıç koşullarıyla parçacığın $x(t)$ pozisyonu belirlenebilir.

Kuantum mekaniği bu probleme farklı yaklaşır. Bu halde parçacığın $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu aranır ki bu Schrödinger denkleminin çözümüyle verilir. Bir boyutlu X uzayında momentum p, kütlesi m olan bir parçacık serbest, yani bir potansiyel içinde $(V=0)$ değilse toplam enerjisi $E = p^2/2m$ olup sadece kinetik enerjiden ibarettir. Bu parçacığı temsil eden dalga paketinin sayısı k, açısal frekansı ω olmak üzere, $\hbar = h/2\pi, \omega = 2\pi\nu, k = 2\pi/\lambda$, enerji ve momentum

$$E = \hbar\omega, p = \hbar k \qquad \text{(C.1)}$$

şeklinde verilir. Burada h Planck sabiti , ν frekansı, λ dalga boyunu gösterir. Bu bağıntılar de-Broglie denklemleri olarak bilinir.

Fotonlar bazı olaylarda dalga bazı olaylarda da parçacık gibi davranır ancak bir olay sırasında iki karakteri ayni anda gösteremez. Bu günümüzde dalga-parçacık ikilemi olarak bilinir. Fotonun bu dalga ve parçacık karakteri (C.1) denklemiyle ifade edilir. (C.1) bağıntıları ve klasik dalganın özellikleri Schrödinger dalga denklemi olarak bilinen madde dalgalarına uygun dalga denkleminin oluşturulmasında kullanılır. Serbest parçacıklara eşlik eden madde dalgaları için dalga denklemi

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{(C.2)}$$

şeklinde verilebilir ki bu Schrödinger serbest parçacık denklemi olarak tanımlanır. Enerji ve momentum operatörleri

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ ,\quad p^2/2m = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ ,\quad p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda elde ettiğimiz denklem serbest parçacık için doğru sonuçlar verir. Daha genel olarak sabit bir V potansiyeli altında hareket eden bir parçacığı ele alalım. Bu parçacığın toplam enerjisi $E = p^2/2m + V$ ve de-Broglie bağıntısı $\hbar\omega = \hbar^2k^2/2m + V$ olur. Buradan yukarıda verilen (C.2) denklemine benzer şekilde daha genel

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi$$

denklemini buluruz. Bu zamana bağlı bir boyutlu Schrödinger denklemidir. Denklemi üç boyutlu sistemler için yazarsak

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + V(x,t)\Psi$$

olur. Denklemde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace operatörü, toplam enerjinin diferensiyel şekli olan $H = -\hbar^2/2m\Delta + V$ Hamilton operatörü tanımlanırsa Schrödinger denklemi $i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$ şeklinde de yazılabilir.

Dalga denkleminin çözümü olan $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu incelenen bir sistem hakkındaki tüm bilgiyi içermektedir. Yani, fiziksel sistemin belirli bir t anındaki durumu $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu ile belirlenir. Sistemin $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonunun zaman içindeki gelişimi Schrödinger denklemiyle verilir. Yukarıda verdiğimiz denklem zamana bağlı Schrödinger denklemi olup zamandan bağımsız Schrödinger denklemini verelim.

Schrödinger denkleminde ki $V(x,t)$ potansiyeli zamandan bağımsız olsun. Bu durumda Schrödinger denklemi "değişkenlerine ayırma" yöntemiyle çözülebilir ve $\Psi(x,t) = U(x)\,T(t)$ şeklinde bir çözüm aranır. Buradan

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{U}\frac{\hbar^2}{2m}\Delta U + V(x) \tag{C.3}$$

denklemini elde ederiz. Denklemin sol tarafı sadece t değişkenine, sağ tarafı da x değişkenine bağlıdır. Denklemin bütün x ve t değerleri için geçerli olması ancak iki tarafın bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. Bu sabite ayırma sabiti denir ve bu sabiti E ile gösterelim. Bu durumda (C.3) denklemi

$$i\hbar\frac{\partial T}{\partial t} = ET\ , \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta U + V(x)U = EU(x) \tag{C.4}$$

olur. Burada E sabiti fiziksel sistemin toplam enerjisi olarak alınabilir. (C.3) denkleminin çözümü $\Psi(x,t) = e^{iEt/\hbar}\,U(x)$ şeklinde verilir. V potansiyelinin bir çok biçimi için Schrödinger denkleminin çözümleri bulunur. Normalize çözümler için E ayırma sabitinin reel olması gerekir. E sabiti kompleks değerler alamaz. Çünkü E sabitini $E = E_r + iE_i$ şeklinde yazarsak çözümdeki $e^{iEt/\hbar} = e^{iE_r t/\hbar}\,e^{-E_i t/\hbar}$ olur ki bu $t \to \infty$ için sonsuza gider, bu da dalga fonksiyonu olarak kabul edilemez.. Schrödinger denkleminin çözümleri fiziksel olarak kabul edilebilen dalga fonksiyonları olacaksa, bunların sağlamak zorunda olduğu bazı koşullar vardır.

- Olasılık yorumuna göre parçacığın konumu bir yerden diğerine süreksiz değişmez, ayni anda iki olasılığı olamaz ve bir yerde sonlu olasılıkla bulunabilir. Yani, $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu konum ve zamanın sürekli ve tek değerli bir fonksiyonu olmalıdır. Bu parçacığın herhangi bir nokta etrafında bulunma olasılığının belirlenmesini garanti eder. Eğer $|\Psi|^2$ çok değerli bir fonksiyon olsaydı veya süreksizlikler içerseydi bu olasılık iki veya daha fazla değer alabilirdi.

- Dalga fonksiyonunun büyüklüğünün karesinin bütün değerler üzerinden integrali sonlu olmalıdır.

$$\int |\Psi|^2 \, dv \langle \infty \qquad \text{(C.5)}$$

Bu koşul sağlanmazsa dalga fonksiyonu bire normalleştirilemez.

- Ψ_1 ve Ψ_2 gibi iki dalga fonksiyonunun farklı iki durumu temsil edebilmesi için bunların lineer bağımsız olması gerekir.

Schrödinger denkleminin değişik tipte potansiyeler için çözümü araştırılır. Değişkenlerine ayırma metoduyla denklem tek boyutlu Schrödinger denklemine indirgenir, bu da problemin çözümünü kolaylaştırır. Biz yaptığımız çözümlerde, Schrödinger denkleminde ki m kütlesini ve h Planck sabitini 1 aldık.

2. Normalleştirme.

$|\Psi(x,t)|^2$ dalga fonksiyonunun istatistiksel yorumu, t zamanda x noktasında parçacığın bulunması olasılığını verir. Buna göre parçacık uzay bölgesinde gerçekten varsa herhangi bir anda belirli bir yerde olmalıdır. Böylece parçacığın $(-\infty,\infty)$ aralığında bulunma olasılığı 1 , yani $|\Psi(x,t)|^2$ integrali bir olmalıdır.

$$\langle \Psi,\Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\overline{\Psi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2\, dx = 1 \qquad \text{(C.6)}$$

Bunsuz istatistiksel yorum birşey ifade etmez. Burada sembolik olarak tek katlı integral alınmıştır. dx hacim elemanı integralin katını belirler. dx hacim elemanı bir boyutlu ise tek katlı, iki boyutlu ise iki katlı integral olacaktır.

$\Psi(x,t)$ Schrödinger denkleminin bir çözümü ise, c bir sabit olmak üzere $c\Psi(x,t)$ de bir çözüm olur. c belirsiz çarpanını öyle bulmalıyız ki (C.6) bağıntısı sağlansın. Bu işleme dalga fonksiyonunun bire normalleştirilmesi denir.

Schrödinger denkleminin bazı çözümleri için integral sonsuz olur, bu durumda (C.6) bağıntısını sağlayan belirsiz katsayı yoktur. Aynı durum $\Psi(x,t)=0$ aşikar çözümü içinde geçerlidir. Normalize olmayan çözümler parçacığı belirtmediğinden çözüm olarak kabul edilmez. Fiziksel olarak

Schrödinger denkleminin çözümleri, karesi integrallenebilir ise anlamlı olur. (C.6) normalleştirme bağıntısını sağlayan $\Psi(x,t)$ dalga fonksiyonu uzayın belirli bir bölgesinde bulunur. Dolayısıyla parçacıkta uzayın belirli bir bölgesinde bulunacaktır. Böyle uzayın sınırlı bir bölgesinde parçacık veya sistem kendini gösteriyorsa bu hallere bağlı haller denir. Bu durumda bağlı hallerde dalga fonksiyonları sonlu olmalıdır ve toplam enerjide negatif, $E\langle 0$ olur.

Bir parçacık veya sistem fiziksel uzayın her yanında kendini gösteriyorsa bağlı olmayan haldedir. Dalga fonksiyonu sonsuzda sonludur, yani,

$$\langle \Psi,\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dx \to \infty \quad .$$

Bu halde normalizasyon koşulu sağlanmaz. Parçacık sınırlı bir uzay bölgesinde tutulamaz. Her yerde bulunma olasılığına sahip olur. Bağlı olmayan hallerde dalga fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve enerji , $E\rangle 0$ pozitiftir.

3. Spektrum.

Spektral teori modern fonksiyonel analizin ana branşlarından birisidir ve operatörlerle onun genel özellikleri ve aralarındaki bağıntılarla ilgilenir. Bu operatörler lineer cebirsel denklem sistemlerinin, diferensiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözüm problemleriyle bağlantılıdır. Bir T operatörünün spektral teorisi sonlu boyutlu uzayda aslında matrislerin özdeğer teorisidir. Özdeğer ve özvektör

$$A\Psi(x) = \lambda\Psi(x) \qquad \text{(C.7)}$$

denkleminin terimleriyle tanımlanır. (C.7) denklemi $\Psi(x,t)\neq 0$ çözümüne sahipse , λ, A operatörünün özdeğerleri , $\Psi(x)$ da λ özdeğerlerine uygun gelen A operatörünün özvektörleridir. A operatörünün λ özdeğerlerinin oluşturduğu kümeye A operatörünün spektrumu denir. Kümenin elemanları kesikli ise kesikli spektrum, sürekli ise sürekli spektrum denir. Bazı hallerde bu iki durum birlikte bulunabilir. Yani λ kümesinin elemanlarının bir kısmı kesikli , bir kısmı da sürekli olabilir. Bu spektruma da karışık spektrum denir. Bunlardan başka band spektrumları vardır. Bu durumda bazı bölgelerde λ

sürekli bir şekilde değişebilir. O bölgenin dışında λ değerler almaz. Bu tür spektrumlara da band spektrumu denir.

Hermitik operatörün özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen farklı özfonksiyonları birbirine diktir. Fiziksel büyüklükler deneysel olarak ölçülebildiğinden, bulunan değerler reel sayılar olduğundan fiziksel büyüklüklerin hermitik operatörlerle temsil edilmelidir. Operatörün bir özdeğerine birden fazla özfonksiyon karşılık gelirse dejenerelik vardır denir.

K A Y N A K L A R

[1]. C.Dane and Y.A.Verdiyev, Integrable systems of group SO(1,2) and Green's functions. J.Math.Phys. 37 (1), (1996) 39-60.

[2]. Y.A. Verdiyev, Quantum integrable systems related with symmetric spaces of the groups U(1,2) and Sp(1,2) and Green's functions on these spaces, J.Math.Phys. 36(7), (1995) 3320-3331.

[3]. M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, Quantum integrable systems related to Lie algebra, Phys.Rep. 94, (1983) 313-404.

[4]. E.G.Kalnins and W.Miller, Jr., The wave equation, O(2,2) and separation of variables on hyperboloids, Proce.Roy.Socit.Edinburg, 79 A, (1977) 227-256.

[5]. I.Hakkı Duru, Path integrals over SU(2) manifold on related potentials, Phys.Rev. D 30, (1984) 2121-2127.

[6]. G. Junker and M.Böhm, The SU(1,1) propagator as a path integral over non compact groups, Phys.Lett. Vol.117, (1986) 375-380.

[7]. C. Grosche, Path integral solution of two potentials related to the SO(2,1) dynamical algebra, J.Physs.A:Math.Gen., 26 ,(1993) L279-L287

[8]. N.Ya. Vilenkin and A.U. Klimyk, Representation of Lie Groups and Special Functions, Vol.I,II,III, (Kluwer Academic Publ. London, 1991).

[9]. Bateman Manuscript, edited by A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions, (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol.I,II.

[10]. R.Raczka, N.Limic and J.Niederle, Discrete degenerate representations of non compact rotation groups .I, J.Math.Phys., 7, (1966) 1861-

[11].B.A.Dubrovin, A.T.Fomenko, S.P.Novikov, Modern Geometry-Methods and Applications, Springer-Verlag New York Inc., 1984

[12].S.Helgason, Groups and Geometric Analysis, Academic Press Inc. 1984

[13]. A.O. Barut and R. Raczka, Theory of Group Representations and Applications, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1980

[14].Y.Alhassid, F.Gürsey and F.Iachello, Group Theory Approach to Scattering II. The Euclidean Connection, Annals of Physics 167, (1986) 181-200

[15]. M.Nikolic, Kinematic and Symmetries, TEPP, tome 2, Institut National de Pyhs. Nucleaire et de Phys. des Particules 11, rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris Cedex 05, 1979

[16]. Y. A. Verdiyev, Harmonic Analysis on Homogeneous Space of SO(1,2), Hadronic Press, 1988

[17]. P. I. Etingof, Quantum Integrable Systems and Representations of Lie Algebras, J.Math. Phys. 36 (6), (1995)

[18]. D.J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, Inc. 1994

[19]. S.Gasiorowicz, Quantum Physics, John Wiley & Sons, Inc. 1974

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Doğan Köy'de dünyaya geldim. Sırasıyla Doğan Köy İlkokulu, Malkara Ortaokulu ve Lisesini bitirdikten sonra Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne 1984 yılında kayıt yaptırdım ve bu bölümden 1988 yılında mezun oldum. 1989-1992 yılları arasında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansı tamamladım. Ayni yıllar arasında Trakya Üniversitesi Bilgisayar Araştırma ve Uygulama Merkezinde Bilgisayar İşletmeni olarak çalıştım. 1992-1998 yılları arasında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora programını tamamladım. 1993 yılında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Uygulamalı Matematik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandım ve halen bu görevimi sürdürüyorum.