ÖZET

Bu çalışmada, hipergeometrik fonksiyonların özellikleri kullanılarak, Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonları, potansiyel fonksiyonu ve S-matrisinin belirttiği dönüşüm incelenmiştir.

Birinci bölümde, hipergeometrik denklem ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. Potansiyel fonksiyonunun genel denklemi ve dalga fonksiyonunun hipergeometrik fonksiyona bağlı olan ifadesi elde edilmiştir. Genel potansiyel denklemindeki parametrelerin özel değerleri için özel potansiyellerin denklemleri belirlenmiştir.

İkinci bölümde, S-matrisinin belirttiği dönüşüm elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, önce konfluent hipergeometrik Natanzon potansiyelleri verilmiştir, sonra dalga fonksiyonunun konfluent hipergeometrik fonksiyonuna bağlı olarak ifadesi incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bu tezde çalışılan konu ile ilgili bir uygulama yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Schrödinger denklemi, Dalga fonksiyonu, Potansiyel, Hipergeometrik fonksiyon.

SUMMARY

In this study, the wave functions which are the solutions of the Schrödinger equation, the potential function and the transformation which is determined by the S-matrix are investigated using properties of the hypergeometric functions.

In the first chapter, pertinent background material about the hypergeometric equation is given. A general form of the potential function and expression of the wave function in terms of the hypergeometric functions are obtained. The equations of the special potentials are determined for the particular values of the parameters which are in the general potential equation.

In the second chapter, the transformation which is determined by the S-matrix is obtained.

In the third chapter, first confluent hypergeometric Natanzon potentials are given and then the expression of the wave function by confluent hypergeometric function is investigated.

In the fourth chapter, an application is given for the subject which is studied in this thesis.

KEY WORDS: Schrödinger equation, Wave function, Potential, Hypergeometric function.

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Adem DALGIÇ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Arzu GÜLEROĞLU

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin temel denklemi olan Schrödinger denklemi, Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger tarafından bulunmuştur.

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=\frac{k^2}{2m}\psi(x)$$

şeklindeki ikinci mertebeden, homojen ve lineer bir diferansiyel denklem olan Schrödinger denkleminin çözümü $\psi(x)$ dalga fonksiyonu ile gösterilmektedir. $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, kütlesi m, kinetik enerjisi $E=k^2/2m$ olan bir parçacığın $U(x)$ potansiyel fonksiyonunun etkisi altındaki durumunu ifade etmektedir([1], [2]).

$U(x)$ potansiyel fonksiyonu özel tipte bir fonksiyondur. Bir $\vec{F}$ vektör alanının, bir R bölgesinin her (x,y,z) noktasına bir $\vec{F}(x,y,z)$ vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olduğu bilindiğinden, bir $\vec{F}$ vektör alanı R bölgesinin her (x,y,z) noktası için

$$\vec{F}(x,y,z)=\nabla U(x,y,z)=\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

şeklinde yazılabiliyorsa $U(x,y,z)$ fonksiyonuna $\vec{F}$ vektör alanının potansiyel fonksiyonu denir([3]).

Özel fonksiyonlar, matematikte, fizikte ve birçok bilim dalında ortaya çıkan diferansiyel denklemleri çözerken karşılaşılan standart fonksiyonlardır. $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, özel fonksiyonlara bağlı olarak ifade edilmektedir. Özel fonksiyonlar hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak ifade edilebildiği için $\psi(x)$ fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Hipergeometrik fonksiyon, hipergeometrik denklemin çözüm fonksiyonudur. Natanzon, hipergeometrik denklemde

$$u=f(z)\psi(x)$$

dönüşümünü yapmıştır. Hipergeometrik denklemi Schrödinger denklemine dönüştürecek şekilde, önce $f(z)$ fonksiyonunu belirlemiştir, sonra $U(x)$ potansiyel fonksiyonu için bir tanım elde etmiştir. $\psi(x)$ fonksiyonunu da $f(z)$ ve

$u = F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ fonksiyonlarına bağlı olarak bulmuştur. Böylece, Schrödinger denklemini çözmeden de $\psi(x)$ fonksiyonu ile $U(x)$ potansiyel fonksiyonunun belirlenebileceğini göstermiştir([4], [5]). Bu şekilde belirlenen potansiyel fonksiyonu, Natanzon potansiyeli olarak adlandırılmaktadır.

Natanzon potansiyelinin genel ifadesindeki parametrelerin özel değerleri için Pöschl-Teller potansiyeli, Rosen-Morse potansiyeli ve Manning-Rosen potansiyeli elde edilir([4], [5]).

Schrödinger denkleminin çözümü olan her $\psi(x)$ fonksiyonu, bu fonksiyonun tanımında yer alan hipergeometrik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak belirlenebilecek olan $\psi_i(x)$ ve $\psi_o(x)$ şeklinde iki fonksiyonun lineer birleşimi biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\psi_o(x)$ fonksiyonu

$$\psi_o(x) = S(x)\psi_i(x)$$

şeklinde, $\psi_i(x)$ fonksiyonunun bir katı olarak ifade edilebilir([1]). Bu ifadedeki $S(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen matrise S-matrisi(veya saçılma matrisi) denir([1], [11], [12], [13]). Bu ifadeden $S(x)$ için de bir tanım elde edilebilir.

Dalga fonksiyonu, Whittaker fonksiyonlarına bağlı olarak da bulunabilmektedir ([4], [5]). Whittaker diferansiyel denklemi, konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleminin özel bir hali olduğu için bu denklemin çözümü olan Whittaker fonksiyonları da konfluent hipergeometrik fonksiyona bağlı olarak ifade edilebilmektedir. Bu durumda elde edilen potansiyel denklemi konfluent hipergeometrik Natanzon potansiyeli olarak adlandırılmaktadır([5], [14], [15]).

Bu çalışmada genel olarak hipergeometrik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak, Schrödinger denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu, potansiyel fonksiyonu ve S-matrisinin belirttiği dönüşüm incelenmiştir.

I. BÖLÜM

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR YARDIMI İLE ÇÖZÜLEBİLEN SCHRÖDİNGER DENKLEMLERİ

1.1 Hipergeometrik Denklem

Bir hipergeometrik denklem, $u = u(z)$ olmak üzere,

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta\, u = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}) \qquad (1.1)$$

biçiminde ifade edilir([6]). Bu denklem, Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss tarafından verilmiştir. ∞, 0 ve 1 noktaları, hipergeometrik denklemin düzgün tekil noktalarıdır. Bu denklemin, $z = 0$ noktasının komşuluğunda, Frobenius yöntemi ile seri çözümü yapıldığında, çözüm;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

ve

$$(a)_0 = 1 \ , \ (a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

olmak üzere,

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} z^2 + \cdots$$

elde edilir. Bu seriye, hipergeometrik seri denir. Hipergeometrik seri, genel terimi

$$a_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n$$

ile gösterilirse

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z|$$

olduğundan, D'Alembert oran kuralına göre, $|z| < 1$ için yakınsaktır. Bu durumda

$$u(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n$$

ile gösterilir. Hipergeometrik denklemin çözümü olan ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ fonksiyonuna hipergeometrik fonksiyon denir. ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ hipergeometrik fonksiyonu, genellikle $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ şeklinde gösterilir.

Hipergeometrik denklemde $z = \dfrac{\xi}{\beta}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dz} = \beta \frac{du}{d\xi} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \beta^2 \frac{d^2u}{d\xi^2}$$

olmak üzere,

$$\frac{\xi}{\beta}\left(1 - \frac{\xi}{\beta}\right)\beta^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)\frac{\xi}{\beta}\right]\beta \frac{du}{d\xi} - \alpha\beta\, u = 0$$

veya

$$\xi\left(1 - \frac{y}{\beta}\right)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \left[\gamma - \left(\frac{\alpha + 1}{\beta} + 1\right)\xi\right]\frac{du}{d\xi} - \alpha\, u = 0$$

elde edilir. Bu denklem, $\beta \to \infty$ iken limiti alındığında

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + (\gamma - \xi)\frac{du}{d\xi} - \alpha\, u = 0$$

şeklindeki konfluent hipergeometrik deklemini(veya Kummer denklemini) verir. Konfluent hipergeometrik deklemin çözümü, konfluent hipergeometrik fonksiyon(veya Kummer fonksiyonu) olarak adlandırılır. Konfluent hipergeometrik fonksiyon, $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ hipergeometrik fonksiyonunda z yerine $\dfrac{\xi}{\beta}$ konulup $\beta \to \infty$ iken limitinin alınmasıyla

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} \xi^n$$

şeklinde elde edilir([7], [8]).

Birçok fonksiyon, hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak ifade edilebilir. Örneğin,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = F(1, \beta; \beta; z)$$

$$(1+z)^n = F(-n,\beta;\beta;-z)$$

$$\log(1+z) = zF(1,1;2;-z)$$

$$e^z = \lim_{\beta\to\infty} F\left(1,\beta;1;\frac{z}{\beta}\right)$$

Özel fonksiyonlar da hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak ifade edilebilir;

(i) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$ (Jacobi polinomu)

(ii) $$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!\,x^{n-2m}}{2^n\, m!(n-m)!(n-2m)!}$$

$$P_n(x) = F\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right)$$ (Legendre polinomu)

(iii) $$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,\Gamma(n+m+1)}$$

$$J_n(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;2ix\right)$$ (Birinci türden Bessel fonksiyonu)

(iv) $$H_{2n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2n)!(2x)^{2n-2m}}{m!(2n-2m)!}$$

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\,{}_1F_1\left(-n;\frac{1}{2};x^2\right)$$ (Hermit polinomu)

(v) $$H_{2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{2n+1}{2}\right]}\frac{(-1)^m(2n+1)!(2x)^{2n-2m+1}}{m!(2n-2m+1)!}$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}2x\,{}_1F_1\left(-n;\frac{3}{2};x^2\right)$$ (Hermit polinomu)

(vi) $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{n!}{(n-k)!(k!)^2}\, x^k$

$L_n(x)={}_1F_1(-n;1;x)$ (Laguerre polinomu)

(vii) $L_n^k(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \binom{n+k}{n-m}\dfrac{x^m}{m!}$

$L_n^k(x)=\dfrac{\Gamma(n+k+1)}{n!\,\Gamma(k+1)}\; {}_1F_1(-n;k+1;x)$ (Genelleştirilmiş Laguerre polinomu)

(viii) $T_n(x)=\dfrac{n}{2}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m \dfrac{\Gamma(n-m)}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m}$

$T_n(x)={}_2F_1\left(-n,n;\dfrac{1}{2};\dfrac{1-x}{2}\right)$ (Birinci türden Chebyshev polinomu)

(ix) $U_n(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^m \binom{n-m}{m}(2x)^{n-2m}$

$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\; n\, F\left(-n+1,n+1;\dfrac{3}{2};\dfrac{1-x}{2}\right)$ (İkinci türden Chebyshev polinomu)

(x) $C_n^\alpha(x)=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\dfrac{(-1)^m\,\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!\,\Gamma(\alpha)}(2x)^{n-2m}$

$C_n^\alpha(x)=\dfrac{\Gamma(n+2\alpha)}{n!\,\Gamma(2\alpha)}F\left(-n,n-2\alpha;\alpha+\dfrac{1}{2};\dfrac{1-x}{2}\right)$ (Gegenbauer polinomu)

biçimindedir([7], [8]).

1.2 Natanzon Potansiyelinin Genel Formu

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(k^2-2mU(x)\right)\psi(x)=0 \tag{1.2}$$

Schrödinger denkleminin çözümü olan $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilmektedir. Natanzon, hipergeometrik denklemden hareketle bu denklemden elde edilebilen çeşitli potansiyellerdeki Schrödinger denklemlerini ve bunların çözümlerini incelemiştir([4]).

Bunun için önce hipergeometrik denklemde $z=z(x)$, $x\in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$u=f(z)\psi(x) \tag{1.3}$$

dönüşümü göz önüne alınmaktadır. Bu dönüşümde yer alan $f(z)$ fonksiyonu, hipergeometrik denklem Schrödinger denklemine dönüştürülebilecek şekilde belirlenecektir.

(1.3) dönüşümüne göre,

$$\frac{du}{dz}=f'(z)\psi(x)+\frac{f(z)}{z'}\frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1}{z'}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right)$$

olduğundan

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{f(z)}{(z')^2}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[2\frac{f'(z)}{z'}-\frac{z''}{(z')^3}f(z)\right]\frac{d\psi(x)}{dx}+f''(z)\psi(x)$$

olur. $\frac{du}{dz}$ ve $\frac{d^2u}{dz^2}$ için elde edilen ifadeler, (1.1) hipergeometrik denkleminde yerlerine yazıldığında

$$z(1-z)\frac{f(z)}{(z')^2}\left[\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(2\frac{f'(z)z'}{f(z)}-\frac{z''}{z'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]z'}{z(1-z)}\right)\frac{d\psi(x)}{dx}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{f''(z)(z')^2}{f(z)}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z](z')^2}{z(1-z)}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\alpha\beta(z')^2}{z(1-z)}\right)\psi(x)\right]=0 \tag{1.4}$$

bulunur. (1.4) denklemi düzenlenirse, $0<z<1$ için,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(2\frac{f'(z)z'}{f(z)}-\frac{z''}{z'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]z'}{z(1-z)}\right)\frac{d\psi(x)}{dx}$$
$$+\left(\frac{f''(z)(z')^2}{f(z)}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z](z')^2}{z(1-z)}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\alpha\beta(z')^2}{z(1-z)}\right)\psi(x)=0 \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) denklemi ile (1.2) denklemi karşılaştırıldığında, (1.2) denkleminde $\frac{d\psi(x)}{dx}$'in katsayısı sıfır olduğundan, (1.5) denklemindeki $\frac{d\psi(x)}{dx}$'in katsayısı da sıfır olmalıdır. Buna göre,

$$2\frac{f'(z)z'}{f(z)}-\frac{z''}{z'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]z'}{z(1-z)}=0 \tag{1.6}$$

olduğundan, (1.5) denklemi

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{f''(z)}{f(z)}(z')^2+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)z](z')^2}{z(1-z)}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{\alpha\beta(z')^2}{z(1-z)}\right]\psi(x)=0 \tag{1.7}$$

haline gelir. (1.6) denkleminin her iki yanının x'e göre integrali alındığında

$$f(z)=(z')^{1/2}\,(z)^{-\gamma/2}\,(1-z)^{[\gamma-(\alpha+\beta+1)]/2} \tag{1.8}$$

elde edilir. Ayrıca (1.6)'dan

$$f'(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z''}{(z')^2}-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\right]f(z) \tag{1.9}$$

dir. (1.9) ifadesinin x'e göre türevi alındığında,

$$f''(z)=\left[\frac{z'''z'-2(z'')^2}{(z')^4}+\frac{(\alpha+\beta+1)z(1-z)+(1-2z)[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]}{z^2(1-z)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\right)^2\right]\frac{f(z)}{2} \tag{1.10}$$

bulunur. (1.7) denkleminde (1.9) ve (1.10) için bulunan ifadeler yerlerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\frac{(z'')^2}{(z')^2}\right)+\right.$$

$$\left. \frac{2(\alpha+\beta+1)z(1-z)+2(1-2z)[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]-[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]^2-4\alpha\beta z(1-z)}{4z^2(1-z)^2}(z')^2 \right]\psi(x)=0 \tag{1.11}$$

olur. (1.11) denkleminde, $(z')^2$'nin katsayısının payı

$$2(\alpha+\beta+1)z(1-z)+2(1-2z)[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]-[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]^2-4\alpha\beta z(1-z)$$
$$=\left(1-(\gamma-1)^2\right)(1-z)+\left(1-(\alpha+\beta-\gamma)^2\right)z+\left((\beta-\alpha)^2-1\right)z(1-z)$$

şeklinde düzenlenir ve

$$\begin{cases} \lambda_0=\gamma-1 \\ \lambda_1=\alpha+\beta-\gamma \\ \mu=\beta-\alpha \end{cases} \tag{1.12}$$

alınarak

$$\left(1-(\gamma-1)^2\right)(1-z)+\left(1-(\alpha+\beta-\gamma)^2\right)z+\left((\beta-\alpha)^2-1\right)z(1-z)$$
$$=\left(1-\lambda_0^2\right)(1-z)+\left(1-\lambda_1^2\right)z+\left(\mu^2-1\right)z(1-z)$$

bulunur. Buna göre,

$$I(z)=\frac{\left(1-\lambda_0^2\right)(1-z)+\left(1-\lambda_1^2\right)z+\left(\mu^2-1\right)z(1-z)}{4z^2(1-z)^2} \tag{1.13}$$

ve (1.11)'deki

$$\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\frac{(z'')^2}{(z')^2}=\frac{z''}{z'}\left(\frac{z'''}{z''}-\frac{3}{2}\frac{z''}{z'}\right)=\{z,x\} \tag{1.14}$$

$z(x)$'in x'e göre Schwartz türevi olmak üzere, (1.11) denkleminden

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\{z,x\}+I(z)(z')^2\right]\psi(x)=0 \tag{1.15}$$

veya

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\frac{(z'')^2}{(z')^2}\right)+\frac{\left(1-\lambda_0^2\right)(1-z)+\left(1-\lambda_1^2\right)z+\left(\mu^2-1\right)z(1-z)}{4z^2(1-z)^2}(z')^2\right]\psi(x)=0$$

elde edilir([4]). Bu denklem, (1.2) Schrödinger denklemi ile karşılaştırıldığında,

$$\frac{1}{2}\{z,x\}+I(z)(z')^2=k^2-2mU(x) \tag{1.16}$$

olması gerektiği görülür. Böylece, (1.15) denklemi, bir Schrödinger denklemi olur. $\{z,x\}$ ifadesi, k^2'den bağımsız olduğundan, $I(z)$'deki λ_0, λ_1 ve μ parametrelerinin k^2 ile lineer bağımlı olduğu kabul edilir.

$$\begin{cases} 1-\mu^2 = ak^2 - f \\ 1-\lambda_0^2 = c_0 k^2 - h_0 \\ 1-\lambda_1^2 = c_1 k^2 - h_1 \end{cases} \tag{1.17}$$

alındığında

$$I(z) = \frac{[az(z-1)+c_0(1-z)+c_1 z]k^2 + fz(1-z) - h_0(1-z) - h_1 z}{4z^2(1-z)^2}$$

bulunur. Bu durumda, (1.16)'dan

$$\frac{1}{2}\{z,x\} + \frac{az(z-1)+c_0(1-z)+c_1 z}{4z^2(1-z)^2}(z')^2 k^2 + \frac{fz(1-z)-h_0(1-z)-h_1 z}{4z^2(1-z)^2}(z')^2 = k^2 - 2mU(x)$$

olur. Bu denklemin sağlanması için, $z = z(x)$ olmak üzere,

(i) $$\frac{az(z-1)+c_0(1-z)+c_1 z}{4z^2(1-z)^2}(z')^2 = 1 \tag{1.18}$$

(ii) $$-2mU(x) = \frac{1}{2}\{z,x\} + \frac{fz(1-z)-h_0(1-z)-h_1 z}{4z^2(1-z)^2}(z')^2 \tag{1.19}$$

olmalıdır. (1.18)'den yararlanılarak, (1.19)'daki potansiyel fonksiyonu için genel bir ifade elde edilebilir. Bunun için,

$$R(z) = az(z-1) + c_0(1-z) + c_1 z \tag{1.20}$$

veya $b_0 = -a - c_0 + c_1$, $b_1 = a - c_0 + c_1$ olmak üzere,

$$R(z) = a(z-p)^2 + b_p(z-p) + c_p = \begin{cases} az^2 + b_0 z + c_0 & , p = 0 \\ a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1 & , p = 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifade, (1.18)'de kullanıldığında,

$$\frac{R(z)(z')^2}{4z^2(1-z)^2} = 1$$

olur. Buradan $R(z) > 0$ olmak üzere,

$$(z')^2 = \frac{4z^2(1-z)^2}{R(z)} \tag{1.22}$$

bulunur. Buradan elde edilen

$$\mp z' = \frac{2z(1-z)}{\sqrt{R(z)}} \tag{1.23}$$

denkleminden, $\Delta \neq 0$ veya $\Delta = 0$ için x, z'ye bağlı olarak ifade edilebilir. Şöyle ki, (1.23) denkleminden,

$$\mp \int dx = \int \frac{\sqrt{R(z)}}{2z(1-z)} dz$$

$$\Rightarrow \mp 2x = \int \frac{\sqrt{R(z)}}{z} dz - \int \frac{\sqrt{R(z)}}{z-1} dz \tag{1.24}$$

olur.

1. Durum : $\Delta \neq 0$ olsun. (1.24) ifadesi,

$$\mp 2x = \int \left(\frac{\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_0}}{z} + \frac{\sqrt{c_0}}{z} \right) dz - \int \left(\frac{\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_1}}{z-1} + \frac{\sqrt{c_1}}{z-1} \right) dz \tag{1.25}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci integralde $R(z) = az^2 + b_0 z + c_0$ olmak üzere,

$$t_0 = \frac{\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_0}}{z}$$

dönüşümü, ikinci integralde $R(z) = a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1$ olmak üzere,

$$t_1 = \frac{\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_1}}{z-1}$$

dönüşümü kullanılır. $p = 0{,}1$ için

$$t_p = \frac{\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_p}}{z-p} \tag{1.26}$$

$$\Rightarrow t_p^2 (z-p)^2 = R - 2\sqrt{R(z)}\sqrt{c_p} + c_p = a(z-p)^2 + b_p(z-p) + c_p - 2\sqrt{R(z)}\sqrt{c_p} + c_p$$

$$\Rightarrow (t_p^2 - a)(z-p)^2 = b_p(z-p) - 2\sqrt{c_p}\left(\sqrt{R(z)} - \sqrt{c_p}\right) = \left(b_p - 2\sqrt{c_p}\, t_p\right)(z-p)$$

olduğundan

$$z - p = \frac{b_p - 2\sqrt{c_p}\, t_p}{t_p^2 - a} \tag{1.27}$$

$$\Rightarrow dz = \left(\frac{-2\sqrt{c_p}}{t_p^2 - a} - \frac{2t_p\left(b_p - 2\sqrt{c_p}\, t_p\right)}{\left(t_p^2 - a\right)^2} \right) dt_p$$

elde edilir.

Böylece (1.25)'deki birinci integral,

$$\int\left(\frac{\sqrt{R(z)}-\sqrt{c_0}}{z}+\frac{\sqrt{c_0}}{z}\right)dz=-\sqrt{c_0}\int\frac{2\sqrt{c_0}}{b_0-2\sqrt{c_0}\,t_0}dt_0+\int\frac{2t_0\left(2a\sqrt{c_0}-b_0t_0\right)}{\left(t_0^2-a\right)^2}dt_0$$

olur. Buradaki birinci integral için

$$b_0-2\sqrt{c_0}\,t_0=s$$

dönüşümü yapılır, ikinci integrale de

$$w=2a\sqrt{c_0}-b_0t_0\ ,\quad dv=\int\frac{2t_0}{\left(t_0^2-a\right)^2}dt_0$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\left(\frac{\sqrt{R(z)}-\sqrt{c_0}}{z}+\frac{\sqrt{c_0}}{z}\right)dz=-\sqrt{c_0}\int\frac{-ds}{s}-\frac{2a\sqrt{c_0}-b_0t_0}{t_0^2-a}-b_0\int\frac{1}{t_0^2-a}dt_0$$

$$=\sqrt{c_0}\,\ln\left|b_0-2\sqrt{c_0}\,t_0\right|-\frac{2a\sqrt{c_0}-b_0t_0}{t_0^2-a}-b_0\int\frac{1}{t_0^2-a}dt_0$$

olur.

Diğer taraftan, (1.26)'da $p=0$ alınarak

$$\sqrt{R(z)}=\sqrt{c_0}+t_0z$$

elde edilir. Buradaki z yerine, (1.27) ifadesinin $p=0$ için değeri, yazıldığında

$$\sqrt{R(z)}=-\sqrt{c_0}-\frac{2a\sqrt{c_0}-b_0t_0}{t_0^2-a}$$

$$\Rightarrow\frac{2a\sqrt{c_0}-b_0t_0}{t_0^2-a}=-\sqrt{c_0}-\sqrt{R(z)}$$

bulunur. Böylece (1.25)'deki birinci integral

$$\int\left(\frac{\sqrt{R(z)}-\sqrt{c_0}}{z}+\frac{\sqrt{c_0}}{z}\right)dz=\sqrt{c_0}\,\ln\left|b_0-2\sqrt{c_0}\,t_0\right|+\sqrt{c_0}+\sqrt{R(z)}-b_0\int\frac{1}{t_0^2-a}dt_0$$

olur.

Benzer şekilde (1.25)'deki ikinci integral de

$$\int\left(\frac{\sqrt{R(z)}-\sqrt{c_1}}{z-1}+\frac{\sqrt{c_1}}{z-1}\right)dz=\sqrt{c_1}\,\ln\left|b_1-2\sqrt{c_1}\,t_1\right|+\sqrt{c_1}+\sqrt{R(z)}-b_1\int\frac{1}{t_1^2-a}dt_1$$

olarak bulunur. Böylece, (1.24) denklemi

$$\mp 2x = \sqrt{c_0}\ \ln\left|b_0 - 2\sqrt{c_0}t_0\right| + \sqrt{c_0} - b_0\int \frac{1}{t_0^2 - a}dt_0 - \sqrt{c_1}\ \ln\left|b_1 - 2\sqrt{c_1}t_1\right| - \sqrt{c_1} - b_1\int \frac{1}{t_1^2 - a}dt_1$$

haline gelir. Burada, $\sqrt{c_0}$ ve $-\sqrt{c_1}$ integral sabitleri olmak üzere

$$\mp 2x = \sum_{p=0}^{1}(-1)^p\left[\sqrt{c_p}\ \ln\left|b_p - 2\sqrt{c_p}t_p\right| - b_p\int \frac{dt_p}{t_p^2 - a}\right] \tag{1.28}$$

elde edilir([4]).

2. Durum : $\Delta = 0$ olsun.

$$\Delta = b_p^2 - 4ac_p = 0 \quad \text{ve} \quad b_p = \mp 2\sqrt{a}\sqrt{c_p} \qquad (\,p = 0\,,1\,)$$

olduğundan, $b_0 = 2\sqrt{a}\sqrt{c_0}$, $R(z) = az^2 + b_0 z + c_0$ için

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{a}z + \sqrt{c_0}$$

olur. Benzer şekilde $b_1 = 2\sqrt{a}\sqrt{c_1}$, $R(z) = a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1$ için

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{a}(z-1) + \sqrt{c_1}$$

bulunur. Buna göre, (1.24) denkleminde, eşitliğin sağ tarafındaki birinci integralde $\sqrt{R(z)} = \sqrt{a}z + \sqrt{c_0}$, ikinci integralde de $\sqrt{R(z)} = \sqrt{a}(z-1) + \sqrt{c_1}$ değerleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\mp 2x &= \int \frac{\sqrt{a}z + \sqrt{c_0}}{z}dz - \int \frac{\sqrt{a}(z-1) + \sqrt{c_1}}{z-1}dz \\ &= \sqrt{c_0}\int \frac{1}{z}dz - \sqrt{c_1}\int \frac{1}{z-1}dz \\ \Rightarrow \mp 2(x - x_0) &= \sqrt{c_0}\ \ln|z| - \sqrt{c_1}\ \ln|z-1|\end{aligned}$$

veya

$$\mp 2(x - x_0) = \sum_{p=0}^{1}\sqrt{c_p}\ \ln|z - p| \tag{1.29}$$

elde edilir([4]). Burada x_0 integral sabiti olarak alınmaktadır.

(1.22) ifadesinin, türevleri alındığında

$$z'' = 4\frac{z(1-z)(1-2z)}{R(z)} - 2\frac{z^2(1-z)^2}{R^2(z)}R'(z)$$

ve

$$z''' = 4z'\left[\frac{(1-2z)^2 - 2z(1-z)}{R(z)} - 2\frac{z(1-z)(1-2z)}{R^2(z)}R'(z)\right.$$

$$\left. + \frac{z^2(1-z)^2}{R^3(z)}[R'(z)]^2 - \frac{z^2(1-z)^2}{2R^2(z)}R''(z)\right]$$

bulunur. Ayrıca

$$R'(z) = 2az - a - c_0 + c_1$$

$$R''(z) = 2a$$

ve $R(z)$'nin diskriminantı

$$\Delta = (a - c_1 - c_0)^2 - 4c_1c_0 = b_p^2 - 4ac_p \ , \ p = 0{,}1$$

dir. Bunlar (1.14) ifadesinde yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{1}{2}\{z,x\} = \frac{1}{R(z)} + \left[a + \frac{a + (c_1 - c_0)(2z-1)}{z(z-1)} - \frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(z)}\right]\frac{z^2(1-z)^2}{R^2(z)}$$

olur. Böylece (1.19)'dan, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$-2mU(x) = -\frac{fz(z-1) + h_0(1-z) + h_1z + 1}{R(z)} - \left[a + \frac{a + (c_1 - c_0)(2z-1)}{z(z-1)} - \frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(z)}\right]\frac{z^2(1-z)^2}{R^2(z)}$$

veya

$$2mU(x) = \frac{fz(z-1) + h_0(1-z) + h_1z + 1}{R(z)} + \left[a + \frac{a + (c_1 - c_0)(2z-1)}{z(z-1)} - \frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(z)}\right]\frac{z^2(1-z)^2}{R^2(z)} \tag{1.30}$$

potansiyeli elde edilir. Bu, Natanzon potansiyelidir([4]).

1.3 Schrödinger Denkleminin Hipergeometrik Fonksiyona Bağlı Olan Çözümü

(1.3) dönüşümünden, Schrödinger denkleminin çözümü, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x) = \frac{u}{f(z)} = [f(z)]^{-1}u$$

şeklinde yazılabilir. $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ hipergeometrik fonksiyonu, hipergeometrik denklemin çözümü olduğundan $u = F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ alınır. $f(z)$ fonksiyonu için elde edilen (1.8) ifadesinde, (1.12) bağıntıları kullanıldığında

$$f(z) = (z')^{1/2}\, z^{-\frac{\lambda_0+1}{2}}\, (1-z)^{-\frac{\lambda_1+1}{2}}$$

olur. Böylece, Schrödinger denkleminin çözümü, hipergeometrik fonksiyona bağlı olarak, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x) = (z')^{-1/2}\, z^{\frac{\lambda_0+1}{2}}\, (1-z)^{\frac{\lambda_1+1}{2}}\, F(\alpha,\beta,\gamma;z) \tag{1.31}$$

şeklinde elde edilir([4]).

1.4 Dalga Fonksiyonunun Normalizasyonu

$\psi(x)$ fonksiyonu,

$$\| \psi(x) \| = \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x)]^2\, dx = 1 \tag{1.32}$$

özelliğini sağlıyorsa bire normalize edilmiş olur([2]). $\psi(x)$ fonksiyonunu, bire normalize etmek için önce (1.31) ifadesi, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x) = (z')^{\frac{1}{2}}\, (z')^{-1}\, z^{\frac{\lambda_0+1}{2}}\, (1-z)^{\frac{\lambda_1+1}{2}}\, F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

şeklinde yazılır ve (1.23)'den

$$(z')^{-1} = \frac{\sqrt{R(z)}}{2z(1-z)}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\, z^{\frac{\lambda_0-1}{2}}\, (1-z)^{\frac{\lambda_1-1}{2}}\, \sqrt{z'R(z)}\, F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

bulunur.

Diğer taraftan Jacobi polinomları, hipergeometrik fonksiyonlara bağlı olarak

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} F\left(-n, n+a+b+1; a+1; \frac{1}{2}(1-x)\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$P_n^{(\lambda_0,\lambda_1)}(1-2z)=\frac{n!\Gamma(\lambda_0+1)}{\Gamma(n+\lambda_0+1)}F(-n,n+\lambda_0+\lambda_1+1;\lambda_0+1;z)$$

dir([7]). Bu ifadede $\alpha=-n\ \ (n=0,1,2,\ldots)$ olmak üzere, (1.12)'den

$$n+\lambda_0+\lambda_1+1=-\alpha+\gamma-1+\alpha+\beta-\gamma+1=\beta$$

olur. Bu durumda

$$P_n^{(\lambda_0,\lambda_1)}(1-2z)=\frac{n!\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

olduğundan, hipergeometrik fonksiyon da Jacobi polinomlarına bağlı olarak

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\Gamma(\gamma)}P_n^{(\lambda_0,\lambda_1)}(1-2z)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece $\psi_n(x)$, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$\psi_n(x)=\frac{1}{2}z^{\frac{\lambda_0-1}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1-1}{2}}\sqrt{z'R(z)}\,\frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\,\Gamma(\gamma)}P_n^{(\lambda_0,\lambda_1)}(1-2z)$$

şeklinde yazılır([5], [9]). Jacobi polinomlarının

$$P_n^{(a,b)}(-t)=(-1)^n P_n^{(b,a)}(t)$$

özelliğinden

$$\psi_n(x)=\frac{1}{2}(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\Gamma(\gamma)}z^{\frac{\lambda_0-1}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1-1}{2}}\sqrt{z'R(z)}\ \ P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)$$

elde edilir([8]). $n=0,1,2,\ldots$ için, B_n normalizasyon sabiti ve $z=z(x)$ olmak üzere,

$$\psi_n(x)=B_n\,z^{\frac{\lambda_0-1}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1-1}{2}}\sqrt{z'R(z)}\,P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)$$

olur([4]). Buna göre

$$[\psi_n(x)]^2=B_n^2\,z^{\lambda_0-1}(1-z)^{\lambda_1-1}\,z'R(z)\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)\right]^2$$

dir.

(1.20)'den

$$R(z)=z(1-z)\left(c_1(1-z)^{-1}+c_0z^{-1}-a\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden,

$$[\psi_n(x)]^2=B_n^2z^{\lambda_0-1}(1-z)^{\lambda_1-1}\frac{dz}{dx}z(1-z)\left(c_1(1-z)^{-1}+c_0z^{-1}-a\right)\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)\right]^2$$

ve buradan

$$[\psi_n(x)]^2\,dx = B_n^2 z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1}\left(c_1(1-z)^{-1}+c_0 z^{-1}-a\right)\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)\right]^2 dz$$

$$= B_n^2\left[c_1 z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1-1}+c_0 z^{\lambda_0-1}(1-z)^{\lambda_1}-a z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1}\right]\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)\right]^2 dz$$

olur. $0<z<1$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2\,dx = \int_0^1 B_n^2\left[c_1 z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1-1}+c_0 z^{\lambda_0-1}(1-z)^{\lambda_1}-a z^{\lambda_0}(1-z)^{\lambda_1}\right]\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(2z-1)\right]^2 dz$$

dir. Burada,

$$2z-1=t$$

dönüşümü yapıldığında,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2\,dx = \int_{-1}^1 B_n^2\Big[2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_1(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1-1}+2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_0(1+t)^{\lambda_0-1}(1-t)^{\lambda_1}$$

$$-2^{-(\lambda_0+\lambda_1+1)}a(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}\Big]\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2\,dx = B_n^2\Big[2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_1\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1-1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt$$

$$+2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_0\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0-1}(1-t)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt$$

$$-2^{-(\lambda_0+\lambda_1+1)}a\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt\Big]$$

elde edilir. Buradaki ikinci integralde $t=-v$ dönüşümü yapıldığında

$$\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0-1}(1-t)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt = \int_{-1}^1(1-v)^{\lambda_0-1}(1+v)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(-v)\right]^2 dv$$

$$= \int_{-1}^1(1-v)^{\lambda_0-1}(1+v)^{\lambda_1}\left[(-1)^n P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(v)\right]^2 dv$$

$$= \int_{-1}^1(1-v)^{\lambda_0-1}(1+v)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(v)\right]^2 dv$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2\,dx = B_n^2\Big[2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_1\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1-1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt$$

$$+2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_0\int_{-1}^1(1-v)^{\lambda_0-1}(1+v)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(v)\right]^2 dv$$

$$-2^{-(\lambda_0+\lambda_1+1)}a\int_{-1}^1(1+t)^{\lambda_0}(1-t)^{\lambda_1}\left[P_n^{(\lambda_1,\lambda_0)}(t)\right]^2 dt\Big]$$

olur.

Jacobi polinomlarının

$$\int_{-1}^1(1-t)^a(1+t)^b\left[P_n^{(a,b)}(t)\right]^2 dt = \frac{2^{a+b+1}\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{n!(a+b+1+2n)\Gamma(a+b+n+1)}$$

ve

$$\int_{-1}^{1}(1-t)^{a-1}(1+t)^{b}\left[P_n^{(a,b)}(t)\right]^2 dt=\frac{2^{a+b}\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{n!a\Gamma(a+b+n+1)}$$

şeklindeki ortogonallik özelliğinden, (1.32) bağıntısı

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2 dx = B_n^2\Bigg[2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_1\frac{2^{\lambda_0+\lambda_1}\Gamma(\lambda_1+n+1)\Gamma(\lambda_0+n+1)}{n!\lambda_1\Gamma(\lambda_1+\lambda_0+n+1)}$$
$$+2^{-(\lambda_0+\lambda_1)}c_0\frac{2^{\lambda_0+\lambda_1}\Gamma(\lambda_0+n+1)\Gamma(\lambda_1+n+1)}{n!\lambda_0\Gamma(\lambda_0+\lambda_1+n+1)}$$
$$-2^{-(\lambda_0+\lambda_1+1)}a\frac{2^{\lambda_0+\lambda_1+1}\Gamma(\lambda_0+n+1)\Gamma(\lambda_1+n+1)}{n!(\lambda_0+\lambda_1+1+2n)\Gamma(\lambda_0+\lambda_1+n+1)}\Bigg]$$

olarak bulunur([10]). Bu ise

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2 dx = B_n^2\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_0}{\lambda_0}-\frac{a}{(\lambda_0+\lambda_1+1+2n)}\right)\frac{\Gamma(\lambda_0+n+1)\Gamma(\lambda_1+n+1)}{n!\Gamma(\lambda_0+\lambda_1+n+1)}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan

$\mu=\beta-\alpha$, $n+\lambda_0+\lambda_1+1=\beta$ ve $\alpha=-n$ olduğuna göre,

$$\lambda_0+\lambda_1+n+1=\mu+\alpha=\mu-n$$

$$\lambda_0+\lambda_1+1+2n=(\lambda_0+\lambda_1+n+1)+n=\mu$$

dir. Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2 dx = B_n^2\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_0}{\lambda_0}-\frac{a}{\mu}\right)\frac{\Gamma(\lambda_0+n+1)\Gamma(\lambda_1+n+1)}{n!\Gamma(\mu-n)}$$

olur. Böylece, (1.32) eşitliğinin sağlanması için

$$B_n=\left[\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_0}{\lambda_0}-\frac{a}{\mu}\right)\frac{\Gamma(\lambda_0+n+1)\Gamma(\lambda_1+n+1)}{n!\Gamma(\mu-n)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

olması gerektiği bulunmuş olur([4]).

1.5 Natanzon Potansiyelinin Özel Halleri

Natanzon potansiyelinin (1.30) genel denklemi, bu denklemdeki a ve c_p $(p=0{,}1)$ parametrelerinin özel değerleri için, Pöschl-Teller Potansiyeli, Manning-Rosen Potansiyeli ve Rosen-Morse Potansiyeli'ne indirgenir. Bu potansiyeller sırasıyla incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(i) Pöschl-Teller Potansiyeli

(1.30) denkleminde, $c_1 \neq 0$, $R(z)=c_1 z$ olsun. Bu durumda (1.20)'den

$$R(z)=az^2+(-a-c_0+c_1)z+c_0=c_1 z \Rightarrow a=0\ ,\ c_0=0$$

ve $R(z)$'nin diskriminantı

$$\Delta=(a-c_1-c_0)^2-4c_1c_0=(-c_1)^2=c_1^2$$

olur. $R(z)=c_1 z$ için (1.22) ifadesi

$$z'=\frac{dz}{dx}=\frac{2\sqrt{z}(1-z)}{\sqrt{c_1}} \tag{1.33}$$

olur. Buradan elde edilen

$$\int\frac{1}{\sqrt{z}(1-z)}dz=\frac{2}{\sqrt{c_1}}\int dx$$

eşitliğinin sol tarafındaki integralde, önce $\sqrt{z}=t$, sonra $t=\tanh v$ dönüşümü yapıldığında,

$$v=\frac{x}{\sqrt{c_1}}$$

olur. $z=t^2=\tanh^2 v$ olduğuna göre

$$z=\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right) \tag{1.34}$$

elde edilir.

(1.30)'da $R(z)=c_1 z$, $a=0$ ve $c_0=0$ alındığında, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$2mU(x)=\frac{1}{c_1}\left[\frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1z+1}{z}+\frac{(2z-1)(z-1)}{z}-\frac{5}{4}\frac{(z-1)^2}{z}\right]$$

veya

$$2mc_1U(x)=f(z-1)+h_0\frac{1-z}{z}+h_1+\frac{3}{4}z-\frac{1}{2}+\frac{3}{4z}$$

olur. Burada (1.34) ifadesi kullanıldığında

$$2mc_1U(x)=f\left[\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)-1\right]+h_0\left[\frac{1-\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}{\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}\right]+h_1$$

$$+\frac{3}{4}\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)-\frac{1}{2}+\frac{3}{4\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}$$

$$=-f\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+h_0\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+h_1+\frac{3}{4}\frac{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}$$

$$=-f\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+h_0\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+h_1+\frac{3}{4}\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)-1}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{1+\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}$$

veya

$$2mc_1U(x)=h_1+1+\frac{h_0+\frac{3}{4}}{\sinh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}-\frac{f+\frac{3}{4}}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)} \qquad (1.35)$$

potansiyeli bulunur. Bu potansiyel, Pöschl-Teller Potansiyeli olarak adlandırılır([4]).

(1.2) denkleminde potansiyel (1.35) şeklinde ise $\psi(x)$'in (1.31) ifadesi,

$$\psi(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{c_1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)\right)^{\lambda_0+\frac{1}{2}}\left(\cosh\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)\right)^{-\frac{\lambda_1-1}{2}}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)\right)$$

(1.36)

şeklini alır. Böylece, Schrödinger denkleminin çözümü (1.36) formunda elde edilir.

(ii) Manning-Rosen Potansiyeli

(1.30) denkleminde, $c_1 \neq 0$, $R(z) = c_1 z^2$ olsun. Bu durumda (1.20)'den

$$R(z) = az^2 + (-a - c_0 + c_1)z + c_0 = c_1 z^2 \Rightarrow a = c_1 \ , \ c_0 = 0$$

ve $R(z)$'nin diskriminantı

$$\Delta = (a - c_1 - c_0)^2 - 4c_1 c_0 = (c_1 - c_1)^2 = 0$$

olur. $R(z) = c_1 z^2$ için, (1.22) ifadesi

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{2(1-z)}{\sqrt{c_1}} \tag{1.37}$$

olduğundan

$$\int \frac{1}{1-z} dz = \frac{2}{\sqrt{c_1}} \int dx$$

integrali hesaplandığında

$$z = \frac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}} \tag{1.38}$$

elde edilir.

(1.30)'da $R(z) = c_1 z^2$, $a = c_1$ ve $c_0 = 0$ alındığında, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$2mU(x) = \frac{1}{c_1}\left[\frac{fz(z-1) + h_0(1-z) + h_1 z + 1}{z^2} + \left(1 + \frac{2z}{z(z-1)}\right)\frac{(1-z)^2}{z^2}\right]$$

veya

$$2mc_1 U(x) = f\,\frac{z-1}{z} + h_0\,\frac{1-z}{z^2} + h_1\,\frac{1}{z} + 1$$

olur. Burada (1.38) ifadesi kullanıldığında,

$$2mc_1 U(x) = f\,\frac{\dfrac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}} - 1}{\dfrac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}} + h_0\,\frac{1 - \dfrac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}}{\left(\dfrac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)^2} + h_1\,\frac{1}{\dfrac{e^{2x/\sqrt{c_1}} - 1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}} + 1$$

$$= -f\,\frac{1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}+h_0\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{\left(e^{2x/\sqrt{c_1}}-1\right)^2}+h_1\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}+1$$

$$= -\frac{f}{2}\left(\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}+1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}-1\right)+h_0\,\frac{1}{4sh^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+\frac{h_1}{2}\left(\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}+1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}+1\right)+1$$

veya

$$2mc_1U(x)=\frac{f+h_1+2}{2}+\frac{h_1-f}{2}\coth\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)+\frac{1}{4}\,\frac{h_0}{\sinh^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{c_1}}\right)} \tag{1.39}$$

potansiyeli bulunur. Bu potansiyel, Manning-Rosen Potansiyeli olarak adandırılır([4]).

(1.2) denkleminde potansiyel (1.39) şeklinde ise $\psi(x)$'in (1.31) ifadesi,

$$\psi(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{c_1}}\right)^{-1/2}\left(\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}}\left(\frac{1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)^{\frac{\lambda_1}{2}}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right) \tag{1.40}$$

şeklini alır. Böylece, Schrödinger denkleminin çözümü (1.40) formunda elde edilir.

(iii) Rosen-Morse Potansiyeli

(1.30) denkleminde, $c_1 \neq 0$, $R(z)=c_1$ olsun. Bu durumda (1.20)'den

$$R(z)=az^2+(-a-c_0+c_1)z+c_0=c_1 \Rightarrow a=0\,,\ c_0=c_1$$

ve $R(z)$'nin diskriminantı

$$\Delta=(a-c_1-c_0)^2-4c_1c_0=(-c_1-c_1)^2-4c_1c_1=4c_1^2-4c_1^2=0$$

olur. $R(z)=c_1$ için (1.22) ifadesi

$$z'=\frac{dz}{dx}=\frac{2z(1-z)}{\sqrt{c_1}} \tag{1.41}$$

olduğundan

$$\int\frac{1}{z(1-z)}dz=\frac{2}{\sqrt{c_1}}\int dx$$

integrali hesaplandığında

$$z = \frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}} \tag{1.42}$$

elde edilir.

(1.30)'da $R(z)=c_1$, $a=0$ ve $c_0 = c_1$ alındığında, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$2mU(x) = \frac{fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1 z+1}{c_1} + \frac{(c_1-c_1)(2z-1)}{z(z-1)}\frac{z^2(1-z)^2}{c_1^2}$$

veya

$$2mc_1U(x) = fz(z-1)+h_0(1-z)+h_1 z+1$$

olur. Burada (1.42) ifadesi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
2mc_1U(x) &= f\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}\left(\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}-1\right)+h_0\left(1-\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)+h_1\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}+1\\
&= -f\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{\left(1+e^{2x/\sqrt{c_1}}\right)^2}+h_0\,\frac{1}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}+h_1\,\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}+1\\
&= -f\,\frac{1}{4ch^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+\frac{h_0}{2}\left(1-\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}+1}\right)+\frac{h_1}{2}\left(1+\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}-1}{e^{2x/\sqrt{c_1}}+1}\right)+1\\
&= -\frac{1}{4}\frac{f}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)}+\frac{h_0+h_1}{2}+\frac{h_1-h_0}{2}\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)+1
\end{aligned}$$

veya

$$2mc_1U(x) = \frac{h_0+h_1+2}{2}+\frac{h_1-h_0}{2}\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)-\frac{1}{4}\frac{f}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right)} \tag{1.43}$$

potansiyeli bulunur. Bu potansiyel, Rosen-Morse Potansiyeli olarak adandırılır([4]).

(1.2) denkleminde potansiyel (1.43) şeklinde ise $\psi(x)$'in (1.31) ifadesi,

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{c_1}}\right)^{-1/2}\left(\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)^{\frac{\lambda_0}{2}}\left(\frac{1}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right)^{\frac{\lambda_1}{2}} F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{e^{2x/\sqrt{c_1}}}{1+e^{2x/\sqrt{c_1}}}\right) \tag{1.44}$$

şeklini alır. Böylece, Schrödinger denkleminin çözümü (1.44) formunda elde edilir.

II. BÖLÜM

S-MATRİSİNİN BELİRTTİĞİ DÖNÜŞÜMÜN BULUNMASI

S-matrisi, 1937'de Amerikalı teorik fizikçi John Archibald Wheeler tarafından verilmiştir. Schrödinger denkleminin çözümü olan her $\psi(x)$ fonksiyonu, $\psi_i(x)$ ve $\psi_o(x)$ şeklinde iki fonksiyonun lineer birleşimi biçiminde yazılabilir. Bu durumda, $\psi_o(x)$ fonksiyonu

$$\psi_o(x) = S(x)\psi_i(x) \tag{2.1}$$

şeklinde, $\psi_i(x)$ fonksiyonunun bir katı olarak ifade edilebilir([1]). Bu ifadedeki $S(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen matrise S-matrisi(veya saçılma matrisi) denir([1], [11], [12], [13]).

$\psi_i(x)$ ve $\psi_o(x)$ fonksiyonlarını belirlemek için, (1.31)'de elde edilen $\psi(x)$ fonksiyonun tanımı ve bu tanımda yer alan hipergeometrik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılır.

Hipergeometrik fonksiyonların,

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)$$

şeklindeki özelliğinde, $\lambda_1 = \alpha+\beta-\gamma$ alındığında

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha,\beta;1+\lambda_1;1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{-\lambda_1} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;1-\lambda_1;1-z)$$

bulunur([6]). Bu ifade, $\psi(x)$'in (1.31) ifadesinde yerine yazıldığında, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x) = (z')^{-1/2} z^{\frac{\lambda_0+1}{2}} (1-z)^{\frac{\lambda_1+1}{2}} \left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha,\beta;1+\lambda_1;1-z) \right.$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{-\lambda_1}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;1-\lambda_1;1-z)\Bigg]$$

olur. Burada (1.23) ifadesi kullanıldığında, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x)=\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta;1+\lambda_1;1-z)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{-\frac{\lambda_1}{2}}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{-\lambda_1}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;1-\lambda_1;1-z)$$

(2.2)

bulunur.

Hipergeometrik fonksiyonların,

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)$$

özelliğinde z yerine $1-z$ konulduğunda,

$$F(a,b;c;1-z)=z^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;1-z) \tag{2.3}$$

olur([7]). Buna göre $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=1+\lambda_1$ için

$$c-a=1+(\alpha+\beta-\gamma)-\alpha=1+\beta-\gamma\,,$$

$$c-b=1+(\alpha+\beta-\gamma)-\beta=1+\alpha-\gamma\,,$$

$$c-a-b=1-\gamma=-\lambda_0$$

olduğundan

$$F(\alpha,\beta;1+\lambda_1;1-z)=z^{-\lambda_0}F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z)$$

bulunur. Benzer şekilde $a=\gamma-\alpha$, $b=\gamma-\beta$, $c=1-\lambda_1$ için

$$c-a=1-(\alpha+\beta-\gamma)-\gamma+\alpha=1-\beta\,,$$

$$c-b=1-(\alpha+\beta-\gamma)-\gamma+\beta=1-\alpha\,,$$

$$c-a-b=1-\gamma=-\lambda_0$$

olduğundan,

$$F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;1-\lambda_1;1-z)=z^{-\lambda_0}F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z)$$

bulunur. Böylece (2.2) ifadesi, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x)=\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{-\frac{\lambda_1}{2}} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z) \tag{2.4}$$

olur.

Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

özelliğinden

$$\Gamma(\lambda_1)=\lambda_1\Gamma(\lambda_1+1)$$

ve

$$\Gamma(-\lambda_1)=-\lambda_1\Gamma(1-\lambda_1)$$

olduğundan, (2.4) denklemi, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x)=\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}} F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z)$$
$$+\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{-\frac{\lambda_1}{2}} F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z) \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir([7]). Burada, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$\psi_i(x)=z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}} F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z) \tag{2.6}$$

ve

$$\psi_o(x)=z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{-\frac{\lambda_1}{2}} F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z) \tag{2.7}$$

şeklinde alınırsa

$$\psi(x)=\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\lambda_1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\psi_i(x)+\left(\frac{\sqrt{R}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\lambda_1\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\lambda_1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\psi_o(x) \tag{2.8}$$

olur. Böylece, $\psi(x)$ fonksiyonu, $\psi_i(x)$ ve $\psi_o(x)$ fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde ifade edilir.

Buna göre, (2.1) ifadesinin sağlanması için, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$S(x)=\frac{z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{-\frac{\lambda_1}{2}}F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z)}{z^{-\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}}F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z)}$$
$$=(1-z)^{-\lambda_1}\frac{F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z)}{F(1+\beta-\gamma,1+\alpha-\gamma;1+\lambda_1;1-z)}$$

olması gerektiği görülür. Burada $\lambda_0=\gamma-1$ alındığında, $z=z(x)$ olmak üzere,

$$S(x)=(1-z)^{-\lambda_1}\frac{F(1-\beta,1-\alpha;1-\lambda_1;1-z)}{F(\beta-\lambda_0,\alpha-\lambda_0;1+\lambda_1;1-z)} \tag{2.9}$$

elde edilir.

III. BÖLÜM

KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONA GEÇİŞ

3.1 Konfluent Hipergeometrik Natanzon Potansiyeli

(1.1) hipergeometrik denkleminde τ skaler, $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere

$$z = \tau\varsigma$$

dönüşümü yapıldığında

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{d\varsigma}\frac{d\varsigma}{dz} = \frac{1}{\tau}\frac{du}{d\varsigma}$$

ve

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz}\right) = \frac{d}{d\varsigma}\left(\frac{1}{\tau}\frac{du}{d\varsigma}\right)\frac{d\varsigma}{dz} = \frac{1}{\tau^2}\frac{d^2u}{d\varsigma^2}$$

olmak üzere,

$$\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)\frac{1}{\tau^2}\frac{d^2u}{d\varsigma^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]\frac{1}{\tau}\frac{du}{d\varsigma} - \alpha\beta u = 0$$

olur([4]). Eşitliğin her iki yanı τ ile çarpıldığında,

$$\varsigma(1-\tau\varsigma)\frac{d^2u}{d\varsigma^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]\frac{du}{d\varsigma} - \alpha\beta\tau\, u = 0 \qquad (3.1)$$

bulunur. Bu denklemde

$$u = f(\varsigma)\psi(x) \qquad (3.2)$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümde yer alan $f(\varsigma)$ fonksiyonu, (3.1) denklemi bir Schrödinger denklemi haline gelecek şekilde belirlenecektir.

(3.2) dönüşümüne göre,

$$\frac{du}{d\varsigma} = f'(\varsigma)\psi(x) + \frac{f(\varsigma)}{\varsigma'}\frac{d\psi(x)}{dx}$$

ve

$$\frac{d^2u}{d\varsigma^2} = \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma')^2}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(2\frac{f'(\varsigma)}{\varsigma'} - \frac{\varsigma''}{(\varsigma')^3}f(\varsigma)\right)\frac{d\psi(x)}{dx} + f''(\varsigma)\psi(x)$$

olduğundan

$$\varsigma(1-\tau\varsigma)\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma')^2}\left[\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(2\frac{f'(\varsigma)\varsigma'}{f(\varsigma)}-\frac{\varsigma''}{\varsigma'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]\varsigma'}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)\frac{d\psi(x)}{dx}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{f''(\varsigma)(\varsigma')^2}{f(\varsigma)}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma](\varsigma')^2 f'(\varsigma)}{\varsigma(1-\tau\varsigma)f(\varsigma)}-\frac{\alpha\beta\tau(\varsigma')^2}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)\psi(x)\right]=0$$

veya

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(2\frac{f'(\varsigma)\varsigma'}{f(\varsigma)}-\frac{\varsigma''}{\varsigma'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]\varsigma'}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)\frac{d\psi(x)}{dx}$$
$$+\left(\frac{f''(\varsigma)(\varsigma')^2}{f(\varsigma)}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma](\varsigma')^2 f'(\varsigma)}{\varsigma(1-\tau\varsigma)f(\varsigma)}-\frac{\alpha\beta\tau(\varsigma')^2}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)\psi(x)=0 \tag{3.3}$$

denklemi elde edilir. (3.3) denklemi ile (1.2) denklemi karşılaştırıldığında, iki denklemin aynı olması için $\frac{d\psi(x)}{dx}$'in katsayısı, (1.2) denkleminde sıfır olduğundan (3.3) denkleminde de sıfır olmalıdır. Buna göre,

$$2\frac{f'(\varsigma)\varsigma'}{f(\varsigma)}-\frac{\varsigma''}{\varsigma'}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]\varsigma'}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}=0 \tag{3.4}$$

olduğundan (3.3) denklemi

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(\frac{f''(\varsigma)(\varsigma')^2}{f(\varsigma)}+\frac{[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma](\varsigma')^2 f'(\varsigma)}{\varsigma(1-\tau\varsigma)f(\varsigma)}-\frac{\alpha\beta\tau(\varsigma')^2}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)\psi(x)=0 \tag{3.5}$$

haline gelir. (3.5) denkleminin Schrödinger denklemi haline getirilmesi için $\psi(x)$'in katsayısı düzenlenir. Bunun için, (3.4) denkleminin her iki yanının x'e göre integrali alındığında

$$f(\varsigma)=(\varsigma')^{1/2}\,\varsigma^{-\gamma/2}\,(1-\tau\varsigma)^{[\gamma-(\alpha+\beta+1)]/2} \tag{3.6}$$

elde edilir. Ayrıca (3.4)'den

$$f'(\varsigma)=\frac{1}{2}\left[\frac{\varsigma''}{(\varsigma')^2}-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right]f(\varsigma) \tag{3.7}$$

yazılır ve bunun x'e göre türevi alınırsa

$$f''(\varsigma)=\left[\frac{\varsigma'''\varsigma'-2(\varsigma'')^2}{(\varsigma')^4}+\frac{(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)+(1-2\tau\varsigma)[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]}{\varsigma^2(1-\tau\varsigma)^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma''}{(\varsigma')^2}-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma}{\varsigma(1-\tau\varsigma)}\right)^2\Bigg]\frac{f(\varsigma)}{2} \tag{3.8}$$

bulunur. (3.5) denkleminde (3.7) ve (3.8) ifadelerinin değerleri yerlerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma'''}{\varsigma'}-\frac{3}{2}\frac{(\varsigma'')^2}{(\varsigma')^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{2(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)+2(1-2\tau\varsigma)[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]-[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]^2-4\alpha\beta\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)}{4\varsigma^2(1-\tau\varsigma)^2}(\varsigma')^2\right]\psi(x)=0 \tag{3.9}$$

denklemi elde edilir.

Diğer taraftan, (3.9) denkleminde $(\varsigma')^2$'nin katsayısının payı, (1.12) bağıntıları kullanılarak

$$2(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)+2(1-2\tau\varsigma)[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]-[\gamma-(\alpha+\beta+1)\tau\varsigma]^2-4\alpha\beta\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)$$
$$=(1-\lambda_0^2)(1-\tau\varsigma)+(1-\lambda_1^2)\tau\varsigma+(\mu^2-1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)$$

şeklinde yazılır ve $\varsigma(x)$'in, x'e göre Schwartz türevi olan

$$\{\varsigma,x\}=\frac{\varsigma'''}{\varsigma'}-\frac{3}{2}\frac{(\varsigma'')^2}{(\varsigma')^2}=\frac{\varsigma''}{\varsigma'}\left(\frac{\varsigma'''}{\varsigma''}-\frac{3}{2}\frac{\varsigma''}{\varsigma'}\right) \tag{3.10}$$

ifadesi kullanılırsa, (3.9) denklemi

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\{\varsigma,x\}+\frac{(1-\lambda_0^2)(1-\tau\varsigma)+(1-\lambda_1^2)\tau\varsigma+(\mu^2-1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)}{4\varsigma^2(1-\tau\varsigma)^2}(\varsigma')^2\right]\psi(x)=0 \tag{3.11}$$

şeklini alır. Bu denklemde $(\varsigma')^2$'nin katsayısı

$$I(\varsigma)=\lim_{\tau\to0}\frac{(1-\lambda_0^2)(1-\tau\varsigma)+(1-\lambda_1^2)\tau\varsigma+(\mu^2-1)\tau\varsigma(1-\tau\varsigma)}{4\varsigma^2(1-\tau\varsigma)^2}$$
$$=\frac{1-\lambda_0^2-\varsigma\lim\limits_{\tau\to0}\left[(\lambda_1^2-\mu^2)\tau\right]-\varsigma^2\lim\limits_{\tau\to0}\mu^2\tau^2}{4\varsigma^2} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır ve

$$a=\frac{\sigma_2}{\tau^2}\ ,\ c_1=\frac{\sigma_2}{\tau^2}+\frac{\sigma_1}{\tau}+c_0\quad ,\ f=\frac{g_2}{\tau^2}\ ,\ h_1=\frac{g_2}{\tau^2}+\frac{g_1}{\tau}+h_0 \tag{3.13}$$

bağıntıları tanımlanır ve (1.17) bağıntıları kullanılırsa

$$\lambda_1^2 = 1 + \left(\frac{g_2}{\tau^2} + \frac{g_1}{\tau} + h_0 \right) - \left(\frac{\sigma_2}{\tau^2} + \frac{\sigma_1}{\tau} + c_0 \right) k^2$$

ve

$$\mu^2 = 1 + \frac{g_2}{\tau^2} - \frac{\sigma_2}{\tau^2} k^2$$

olmak üzere

$$\lim_{\tau \to 0} \left[\tau \left(\lambda_1^2 - \mu^2 \right) \right] = \lim_{\tau \to 0} \left(g_1 - \sigma_1 k^2 - \left(c_0 k^2 - h_0 \right) \tau \right) = g_1 - \sigma_1 k^2$$

ve

$$\lim_{\tau \to 0} \left(\tau^2 \mu^2 \right) = \lim_{\tau \to 0} \left(\tau^2 + g_2 - \sigma_2 k^2 \right) = g_2 - \sigma_2 k^2$$

limiti bulunur. Böylece

$$\delta_l = g_l - \sigma_l k^2 \qquad (l = 1,2)$$

$$\delta_2 \geq 0 \tag{3.14}$$

olmak üzere (3.12) ifadesi

$$I(\varsigma) = \frac{-\varsigma^2 \delta_2 - \varsigma \delta_1 + 1 - \lambda_0^2}{4\varsigma^2} \tag{3.15}$$

şeklinde yazılır([4]). Sonuç olarak (3.11) denkleminde $(\varsigma')^2$'nin katsayısı olan $I(\varsigma)$'nın yerine konulması ile

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} \{\varsigma, x\} + I(\varsigma)(\varsigma')^2 \right] \psi(x) = 0 \tag{3.16}$$

veya

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\varsigma'''}{\varsigma'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\varsigma''}{\varsigma'} \right)^2 \right] + \frac{-\delta_2 \varsigma^2 - \delta_1 \varsigma + 1 - \lambda_0^2}{4\varsigma^2} (\varsigma')^2 \right] \psi(x) = 0 \tag{3.17}$$

denklemine ulaşılır.. Bu denklem, (1.2) Schrödinger denklemi ile karşılaştırıldığında

$$\frac{1}{2} \{\varsigma, x\} + I(\varsigma)(\varsigma')^2 = k^2 - 2mU(x) \tag{3.18}$$

olduğu görülür. (3.18) eşitliğinin olabilmesi için (3.15) ifadesinin k'ya bağlı bir ifadeye dönüştürülmesi gerekir. Bunun için (3.14) ve $1 - \lambda_0^2 = c_0 k^2 - h_0$ bağıntılarından yararlanılarak bu eşitlik

$$I(\varsigma) = \frac{\left(\sigma_2 \varsigma^2 + \sigma_1 \varsigma + c_0 \right) k^2 - \left(g_2 \varsigma^2 + g_1 \varsigma + h_0 \right)}{4\varsigma^2}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, (3.18)

$$\frac{1}{2}\{\varsigma, x\}+\frac{\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0}{4\varsigma^2}(\varsigma')^2 k^2-\frac{g_2\varsigma^2+g_1\varsigma+h_0}{4\varsigma^2}(\varsigma')^2=k^2-2mU(x)$$

haline gelir. Bu denklemin sağlanması için, $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\text{(i)}\quad \frac{\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0}{4\varsigma^2}(\varsigma')^2=1 \tag{3.19}$$

$$\text{(ii)}\quad -2mU(x)=\frac{1}{2}\{\varsigma, x\}-\frac{g_2\varsigma^2+g_1\varsigma+h_0}{4\varsigma^2}(\varsigma')^2 \tag{3.20}$$

olması gerekir.

Diğer taraftan, (3.19)'dan yararlanılarak (3.20)'deki potansiyel fonksiyonunun genel bir ifadesini elde edebilmek için,

$$R(\varsigma)=\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0 \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlandığında, (3.19)'dan

$$\frac{R(\varsigma)(\varsigma')^2}{4\varsigma^2}=1$$

ve $R(\varsigma)>0$ olmak üzere,

$$(\varsigma')^2=\frac{4\varsigma^2}{R(\varsigma)} \tag{3.22}$$

elde edilir([4], [9]). (3.22)'den bulunan

$$\mp\varsigma'=\frac{2\varsigma}{\sqrt{R(\varsigma)}} \tag{3.23}$$

denkleminden, $\Delta\neq 0$ veya $\Delta=0$ için x, ς'ya bağlı olarak ifade edilebilir. Şöyle ki,

1. Durum: $\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2 c_0\neq 0$ olsun. (3.23) denkleminden elde edilen

$$\mp\int dx=\int\frac{\sqrt{R(\varsigma)}}{2\varsigma}d\varsigma$$

ifadesi

$$\mp 2x=\int\left(\frac{\sqrt{R(\varsigma)}-\sqrt{c_0}}{\varsigma}+\frac{\sqrt{c_0}}{\varsigma}\right)d\varsigma \tag{3.24}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $R(\varsigma)=\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0$ olmak üzere,

$$t=\frac{\sqrt{R(\varsigma)}-\sqrt{c_0}}{\varsigma} \tag{3.25}$$

dönüşümü yapılır. Buradan,

$$t^2\varsigma^2=R(\varsigma)-2\sqrt{R(\varsigma)}\sqrt{c_0}+c_0=\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0-2\sqrt{R(\varsigma)}\sqrt{c_0}+c_0$$

$$\Rightarrow (t^2-\sigma_2)\varsigma^2=\sigma_1\varsigma-2\sqrt{c_0}\left(\sqrt{R(\varsigma)}-\sqrt{c_0}\right)=\sigma_1\varsigma-2\sqrt{c_0}\,t\varsigma=\left(\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t\right)\varsigma$$

olduğundan

$$\varsigma=\frac{\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t}{t^2-\sigma_2} \tag{3.26}$$

ve

$$d\varsigma=\left(\frac{-2\sqrt{c_0}}{t^2-\sigma_2}-\frac{2t\left(\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t\right)}{\left(t^2-\sigma_2\right)^2}\right)dt$$

elde edilir. Buna göre,(3.24) ifadesi

$$\mp 2x=-\sqrt{c_0}\int\frac{2\sqrt{c_0}}{\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t}\,dt+\int\frac{2t\left(2\sqrt{c_0}\,\sigma_2-\sigma_1 t\right)}{\left(t^2-\sigma_2\right)^2}\,dt$$

olur. Buradaki birinci integral için

$$\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t=s$$

dönüşümü yapılır, ikinci integrale de

$$w=2\sigma_2\sqrt{c_0}-\sigma_1 t \quad , \quad dv=\int\frac{2t}{\left(t^2-\sigma_2\right)^2}\,dt$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\mp 2x=-\sqrt{c_0}\int\left(-\frac{1}{s}\right)ds-\frac{2\sqrt{c_0}\,\sigma_2-\sigma_1 t}{t^2-\sigma_2}-\sigma_1\int\frac{1}{t^2-\sigma_2}\,dt$$

$$=\sqrt{c_0}\ln\left|\sigma_1-2\sqrt{c_0}\,t\right|-\frac{2\sqrt{c_0}\,\sigma_2-\sigma_1 t}{t^2-\sigma_2}-\sigma_1\int\frac{1}{t^2-\sigma_2}\,dt \tag{3.27}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (3.25) dönüşümünden,

$$\sqrt{R(\varsigma)}=\sqrt{c_0}+t\varsigma$$

olur. Burada ς yerine (3.26) ifadesi yazıldığında

$$\sqrt{R(\varsigma)} = -\sqrt{c_0} - \frac{2\sigma_2\sqrt{c_0} - \sigma_1 t}{t^2 - \sigma_2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2\sigma_2\sqrt{c_0} - \sigma_1 t}{t^2 - \sigma_2} = \sqrt{R(\varsigma)} + \sqrt{c_0}$$

bulunur. Böylece, (3.27) ifadesi

$$\mp 2x = \sqrt{c_0}\ln\left|\sigma_1 - 2\sqrt{c_0}t\right| + \sqrt{R(\varsigma)} + \sqrt{c_0} - \sigma_1\int\frac{1}{t^2 - \sigma_2}dt$$

haline gelir. Burada

$$\int\frac{1}{t^2 - \sigma_2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\sigma_2}}\int\left(\frac{1}{t + \sqrt{\sigma_2}} - \frac{1}{t - \sqrt{\sigma_2}}\right)dt = -\frac{1}{2\sqrt{\sigma_2}}\ln\left|\frac{t + \sqrt{\sigma_2}}{t - \sqrt{\sigma_2}}\right|$$

olduğundan

$$\mp 2x = \sqrt{c_0}\ln\left|\sigma_1 - 2\sqrt{c_0}t\right| + \sqrt{R(\varsigma)} + \sqrt{c_0} + \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\sigma_2}}\ln\left|\frac{t + \sqrt{\sigma_2}}{t - \sqrt{\sigma_2}}\right|$$

olur. Böylece, $\sqrt{c_0}$ integral sabiti olmak üzere,

$$\mp 2x = \sqrt{R(\varsigma)} + \sqrt{c_0}\ln\left|\sigma_1 - 2\sqrt{c_0}t\right| + \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\sigma_2}}\ln\left|\frac{t + \sqrt{\sigma_2}}{t - \sqrt{\sigma_2}}\right| \qquad (3.28)$$

elde edilir([4]).

2. Durum: $\Delta = 0$ olsun.

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 c_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma_1 = \mp 2\sqrt{\sigma_2}\sqrt{c_0}$$

olduğundan, $\sigma_1 = 2\sqrt{\sigma_2}\sqrt{c_0}$, $R(\varsigma) = \sigma_2\varsigma^2 + \sigma_1\varsigma + c_0$ için,

$$\sqrt{R(\varsigma)} = \sqrt{\sigma_2}\varsigma + \sqrt{c_0} \qquad (3.29)$$

olur. Buna göre, (3.23) denkleminden

$$\mp\int dx = \int\frac{\sqrt{R(\varsigma)}}{2\varsigma}d\varsigma$$

$$\Rightarrow \mp 2\int dx = \int\frac{\sqrt{\sigma_2}\varsigma + \sqrt{c_0}}{\varsigma}d\varsigma$$

$$= \sqrt{\sigma_2}\int d\varsigma + \sqrt{c_0}\int\frac{1}{\varsigma}\frac{\sigma_2}{\sigma_2}d\varsigma \qquad (\sigma_2 > 0)$$

$$\Rightarrow \mp 2(x-x_0)=\sqrt{\sigma_2}\,\varsigma+\sqrt{c_0}\,\ln|\varsigma\sigma_2| \tag{3.30}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi t'ye bağlı olarak yazmak için, (3.25) bağıntısında (3.29) ifadesi kullanıldığında, $\sqrt{\sigma_2}=t$ olduğundan

$$\sigma_2=t^2 \tag{3.31}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\sigma_1=2\sqrt{\sigma_2}\sqrt{c_0}\Rightarrow\sqrt{c_0}=\frac{\sigma_1}{2\sqrt{\sigma_2}}=\frac{\sigma_1}{2t}$$

olduğundan (3.29)'dan

$$\sqrt{\sigma_2}\,\varsigma=\sqrt{R(\varsigma)}-\sqrt{c_0}=\sqrt{R(\varsigma)}-\frac{\sigma_1}{2t} \tag{3.32}$$

olur. (3.32) ve (3.31) ifadeleri, (3.30)'da kullanıldığında

$$\mp 2(x-x_0)=\sqrt{R(\varsigma)}-\frac{\sigma_1}{2t}+\sqrt{c_0}\,\ln|\varsigma\,t^2| \tag{3.33}$$

elde edilir([4]).

(3.22) ifadesinin x'e göre ς'' ve ς''' türevleri alınarak, (3.10) ifadesinde yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\{\varsigma,x\}=-\frac{2}{R(\varsigma)}-2\frac{\varsigma R'(\varsigma)}{R^2(\varsigma)}+\frac{5}{2}\frac{\varsigma^2(R'(\varsigma))^2}{R^3(\varsigma)}-2\frac{\varsigma^2R''(\varsigma)}{R^2(\varsigma)}$$

veya

$$-\frac{1}{2}\{\varsigma,x\}=\frac{1}{R(\varsigma)}+\left[R''(\varsigma)+\frac{R'(\varsigma)}{\varsigma}-\frac{5}{4}\frac{(R'(\varsigma))^2}{R(\varsigma)}\right]\frac{\varsigma^2}{R^2(\varsigma)} \tag{3.34}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan (3.21)'den

$$R'(\varsigma)=2\sigma_2\varsigma+\sigma_1$$

$$R''(\varsigma)=2\sigma_2$$

ve

$$\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2c_0$$

diskriminantı hesaplandığında, (3.34)'ün parantez içi

$$R''(\varsigma)+\frac{R'(\varsigma)}{\varsigma}-\frac{5}{4}\frac{(R'(\varsigma))^2}{R(\varsigma)}=\frac{\sigma_1}{\varsigma}-\sigma_2-\frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(\varsigma)}$$

şeklinde yazılırsa eşitlik

$$-\frac{1}{2}\{\varsigma, x\} = \frac{1}{R(\varsigma)} + \left[\frac{\sigma_1}{\varsigma} - \sigma_2 - \frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(\varsigma)}\right]\frac{\varsigma^2}{R^2(\varsigma)} \tag{3.35}$$

haline gelir. Böylece, (3.35) ve (3.22) ifadeleri, (3.20)'de kullanıldığında, $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere,

$$2mU(x) = \frac{g_2\varsigma^2 + g_1\varsigma + h_0 + 1}{R(\varsigma)} + \left[\frac{\sigma_1}{\varsigma} - \sigma_2 - \frac{5}{4}\frac{\Delta}{R(\varsigma)}\right]\frac{\varsigma^2}{R^2(\varsigma)} \tag{3.36}$$

potansiyeli elde edilir([4], [14]). Bu, konfluent hipergeometrik Natanzon potansiyelidir.

3.2 Schrödinger Denkleminin Özel Fonksiyonlara Bağlı Olan Çözümleri

(3.17)'de elde edilen Schrödinger denkleminin çözümü olan $\psi(x)$ fonksiyonu, $\delta_2 > 0$ alındığında Whittaker fonksiyonlarına ve $\delta_2 = 0$ alındığında birinci türden Bessel fonksiyonuna bağlı olarak elde edilebilmektedir. Bu durumlar sırasıyla aşağıda incelenmektedir.

(i) $\delta_2 > 0$ olsun. Bu durumda, (3.17) denkleminde

$$z = \sqrt{\delta_2}\varsigma \quad , \quad \varsigma = \varsigma(x)$$

olmak üzere

$$\psi(x) = (\varsigma')^{-\frac{1}{2}} w(z) \tag{3.37}$$

dönüşümü yapılır. Buna göre

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(\varsigma')^{-\frac{3}{2}}\varsigma'' w(z) + \sqrt{\delta_2}(\varsigma')^{\frac{1}{2}}\frac{dw(z)}{dz}$$

ve

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\varsigma'''}{\varsigma'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varsigma''}{\varsigma'}\right)^2\right](\varsigma')^{-\frac{1}{2}} w(z) + \left(\sqrt{\delta_2}\right)^2(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{d^2w(z)}{dz^2}$$

olur. Bu türevler (3.17) denkleminde yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\left(\sqrt{\delta_2}\right)^2(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{d^2w(z)}{dz^2} + \frac{-\delta_2\varsigma^2 - \delta_1\varsigma + 1 - \lambda_0^2}{4\varsigma^2}(\varsigma')^{\frac{3}{2}} w(z) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\frac{-\delta_2\varsigma^2-\delta_1\varsigma+1-\lambda_0^2}{4\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^2}w(z)=0$$

olduğundan

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}-\frac{\delta_1}{4\left(\sqrt{\delta_2}\right)^2\varsigma}+\frac{1-\lambda_0^2}{4\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^2}\right)w(z)=0$$

veya

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\frac{-\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}}}{\sqrt{\delta_2}\varsigma}+\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^2}\right)w(z)=0$$

elde edilir. Bu denklem,

$$\mu=\frac{-\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}}\ ,\ v=\frac{\lambda_0}{2} \tag{3.38}$$

olmak üzere

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\mu}{z}+\frac{\frac{1}{4}-v^2}{z^2}\right)w(z)=0 \tag{3.39}$$

şeklinde yazılabilir. Bu, $w=w(z)$ için Whittaker diferansiyel denklemidir([8]). Bu denklemin çözümleri

$$w_1=M_{\mu,v}(z)$$

ve

$$w_2=W_{\mu,v}(z)$$

şeklindeki Whittaker fonksiyonlarıdır. Buna göre, (3.37) dönüşümü yapılan (3.17) denkleminin çözümleri, $z=\sqrt{\delta_2}\varsigma$ ve $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\psi_0(x)=(\varsigma')^{-\frac{1}{2}}M_{\mu,v}(z) \tag{3.40}$$

ve

$$\psi_+(x)=(\varsigma')^{-\frac{1}{2}}W_{\mu,v}(z) \tag{3.41}$$

olur.

$\psi_0(x)$ ve $\psi_+(x)$ fonksiyonlarının Wronski determinanatının sıfırdan farklı olduğu gösterilirse, $\psi_0(x)$ ve $\psi_+(x)$ fonksiyonu lineer bağımsız fonksiyonlar olur. Bunu göstermek için $\psi_0(x)$ ve $\psi_+(x)$'in

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = \begin{vmatrix} \psi_+(x) & \psi_0(x) \\ \dfrac{d\psi_+(x)}{dx} & \dfrac{d\psi_0(x)}{dx} \end{vmatrix} = \psi_+(x)\frac{d\psi_0(x)}{dx} - \frac{d\psi_+(x)}{dx}\psi_0(x)$$

şeklindeki Wronski determinanatı hesaplanır. Burada, $z = \sqrt{\delta_2}\varsigma$, $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\frac{d\psi_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(\varsigma')^{-\frac{3}{2}}\varsigma'' M_{\mu,\nu}(z) + (\varsigma')^{-\frac{1}{2}} z' \frac{d}{dz} M_{\mu,\nu}(z)$$

ve

$$\frac{d\psi_+(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(\varsigma')^{-\frac{3}{2}}\varsigma'' W_{\mu,\nu}(z) + (\varsigma')^{-\frac{1}{2}} z' \frac{d}{dz} W_{\mu,\nu}(z)$$

olduğundan

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = (\varsigma')^{-1} z' \left[W_{\mu,\nu}(z)\frac{d}{dz}M_{\mu,\nu}(z) - M_{\mu,\nu}(z)\frac{d}{dz}W_{\mu,\nu}(z) \right]$$

bulunur.

$$z = \sqrt{\delta_2}\varsigma \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{\delta_2}\frac{d\varsigma}{dx} \Rightarrow (\varsigma')^{-1} z' = \sqrt{\delta_2}$$

olduğundan,

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = \sqrt{\delta_2}\left[W_{\mu,\nu}(z)\frac{d}{dz}M_{\mu,\nu}(z) - M_{\mu,\nu}(z)\frac{d}{dz}W_{\mu,\nu}(z) \right]$$

olur([5]).

Whittaker fonksiyonlarının,

$$W_{\mu,\nu} = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - \mu\right)} M_{\mu,-\nu} + \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2} - \mu\right)} M_{\mu,\nu}$$

özelliğinden,

$$\frac{d}{dz}W_{\mu,\nu}(z) = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - \mu\right)} \frac{d}{dz} M_{\mu,-\nu}(z) + \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2} - \mu\right)} \frac{d}{dz} M_{\mu,\nu}(z)$$

bulunur([8]). Buna göre, $z = \sqrt{\delta_2}\varsigma$ ve $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere,

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = \sqrt{\delta_2}\,\frac{\Gamma(2v)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}\left[M_{\mu,-v}(z)\frac{d}{dz}M_{\mu,v}(z) - M_{\mu,v}(z)\frac{d}{dz}M_{\mu,-v}(z)\right]$$

$$= \sqrt{\delta_2}\,\frac{-\Gamma(2v)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}\begin{vmatrix} M_{\mu,v}(z) & M_{\mu,-v}(z) \\ \frac{d}{dz}M_{\mu,v}(z) & \frac{d}{dz}M_{\mu,-v}(z) \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{\delta_2}\,\frac{-\Gamma(2v)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}W\left(M_{\mu,v}(z),\, M_{\mu,-v}(z)\right)$$

olur.

$M_{\mu,v}(z)$ ile $M_{\mu,-v}(z)$ fonksiyonlarının Wronski determinantı

$$W\left(M_{\mu,v}(z),\, M_{\mu,-v}(z)\right) = -2v$$

olduğundan,

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = \sqrt{\delta_2}\,\frac{2v\Gamma(2v)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}$$

haline gelir([8]).

Gamma fonksiyonunun, $n\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{C}$ için

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}$$

şeklindeki özelliğine göre

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) = \sqrt{\delta_2}\,\frac{2v\dfrac{\Gamma(2v+n)}{2v(2v+1)(2v+2)\ldots(2v+n-1)}}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}$$

$$= \sqrt{\delta_2}\,\frac{\dfrac{\Gamma(2v+n+1)}{(2v+1)(2v+2)\ldots(2v+n-1)(2v+n)}}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}-\mu\right)}$$

$$= \sqrt{\delta_2}\,\frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}t\mu\right)}$$

olur([7]). Buradan

$$W(\psi_+(x),\psi_0(x)) \neq 0$$

olduğundan $\psi_+(x)$ ile $\psi_0(x)$ fonksiyonları, (3.17) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

(3.40)'da elde edilen ifadede, $z=\sqrt{\delta_2}\varsigma$ ve $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere (3.38) bağıntıları kullanıldığında

$$\psi(x)=(\varsigma')^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{-\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}},\frac{\lambda_0}{2}}\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

olur. Bu ifade, Whittaker fonksiyonunun

$$M_{\mu,v}(x)=x^{\frac{1}{2}+v}e^{-\frac{x}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\mu+v;1+2v;x\right)$$

şeklindeki özelliği, (3.38)'den

$$\frac{1}{2}-\mu+v=\frac{1}{2}-\left(\frac{-\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}}\right)+\frac{\lambda_0}{2}=\frac{1+\lambda_0}{2}+\frac{\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}}=\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}}$$

ve

$$1+2v=1+2\frac{\lambda_0}{2}=1+\lambda_0=\gamma$$

olduğundan

$$M_{\frac{-\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}},\frac{\lambda_0}{2}}\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)=\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}}e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}};\gamma;\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

biçiminde yazılabileceği için, $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\psi(x)=(\varsigma')^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}}e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}};\gamma;\sqrt{\delta_2}\varsigma\right) \tag{3.42}$$

şeklinde de gösterilebilir([4]).

(ii) $\delta_2=0$ olsun. Bu durumda, (3.17) denklemi

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\left[\frac{\varsigma'''}{\varsigma'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varsigma''}{\varsigma'}\right)^2\right]+\frac{-\delta_1\varsigma+1-\lambda_0^2}{4\varsigma^2}(\varsigma')^2\right]\psi(x)=0 \tag{3.43}$$

haline gelir. Bu denklemde

$$z=\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\quad,\quad \varsigma=\varsigma(x) \tag{3.44}$$

olmak üzere

$$\psi(x)=\varsigma^{\frac{1}{2}}(\varsigma')^{-\frac{1}{2}}w(z) \tag{3.45}$$

dönüşümü yapıldığında

$$\frac{d\psi(x)}{dx}=\frac{1}{2}\left[\varsigma^{-\frac{1}{2}}(\varsigma')^{\frac{1}{2}}-\varsigma^{\frac{1}{2}}(\varsigma')^{-\frac{3}{2}}\varsigma''\right]w(z)+\frac{\sqrt{-\delta_1}}{2}(\varsigma')^{\frac{1}{2}}\frac{dw(z)}{dz}$$

ve

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=\frac{\left(\sqrt{-\delta_1}\right)^2}{4}\varsigma^{-\frac{1}{2}}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\frac{\sqrt{-\delta_1}}{4}\varsigma^{-1}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{dw(z)}{dz}$$
$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\varsigma^{-\frac{3}{2}}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}-\varsigma^{\frac{1}{2}}(\varsigma')^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\varsigma'''}{\varsigma'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\varsigma''}{\varsigma'}\right)^2\right)\right]w(z)$$

elde edilir. Bu türevler (3.43) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{\left(\sqrt{-\delta_1}\right)^2}{4}\varsigma^{-\frac{1}{2}}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\frac{\sqrt{-\delta_1}}{4}\varsigma^{-1}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\frac{dw(z)}{dz}+\frac{-\delta_1\varsigma-\lambda_0^2}{4}\varsigma^{\frac{1}{2}}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}w(z)=0$$

olduğundan

$$\frac{1}{4}\varsigma^{-\frac{3}{2}}(\varsigma')^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\right)^2\frac{d^2w(z)}{dz^2}+\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\frac{dw(z)}{dz}+\left(\left(\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\right)^2-\lambda_0^2\right)w(z)\right]=0$$

olur. Buradan, (3.44) ifadesi göz önünde bulundurularak

$$z^2\frac{d^2w(z)}{dz^2}+z\frac{dw(z)}{dz}+\left(z^2-\lambda_0^2\right)w(z)=0 \tag{3.46}$$

bulunur. Bu, $z=\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}$ ve $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere $w=w(z)$ için Bessel diferansiyel denklemidir ([8]). Bu denklemin çözümü

$$w=J_{\lambda_0}\left(\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\right)$$

şeklinde, birinci türden Bessel fonksiyonu ile tanımlanır. Bu durumda $z=\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}$ ve $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere, (3.45) dönüşümü yapılan (3.43) denklemin çözümü

$$\psi(x)=\left(\frac{\varsigma}{\varsigma'}\right)^{-\frac{1}{2}}J_{\lambda_0}\left(\sqrt{-\delta_1}\varsigma^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.47}$$

olur([5]).

3.3 Konfluent Hipergeometrik Fonksiyona Bağlı Olan Dalga Fonksiyonunun Normalizasyonu

$\psi(x)$ fonksiyonunu, bire normalize etmek için (1.32) ifadesini sağladığını göstermek gerekir. Bunun için, önce (3.42) ifadesi, $\varsigma = \varsigma(x)$, $\gamma = \lambda_0 + 1$ olmak üzere

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta_1}{4\sqrt{\delta_2}} = n \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

alınarak

$$\psi(x) = (\varsigma')^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}} \, {}_1F_1\left(-n; \lambda_0 + 1; \sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$
$$= (\varsigma')^{\frac{1}{2}} (\varsigma')^{-1} \left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}} \, {}_1F_1\left(-n; \lambda_0 + 1; \sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

şeklinde yazılır([4]). Burada (3.22)'den, $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere,

$$(\varsigma')^{-1} = \frac{\sqrt{R(\varsigma)}}{2\varsigma}$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$\psi(x) = (\varsigma')^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{R(\varsigma)}}{2\varsigma} \left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0+1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}} \, {}_1F_1\left(-n; \lambda_0 + 1; \sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

bulunur.

Diğer taraftan, Laguerre polinomları hipergeometrik fonksiyonlara bağlı olarak

$$L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right) = \frac{\Gamma(n + \lambda_0 + 1)}{n!\,\Gamma(\lambda_0 + 1)} \, {}_1F_1\left(-n; \lambda_0 + 1; \sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$F\left(-n, \lambda_0 + 1; \sqrt{\delta_2}\varsigma\right) = \frac{n!\,\Gamma(\lambda_0 + 1)}{\Gamma(n + \lambda_0 + 1)} L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\varsigma\right)$$

şeklinde ifade edilebilir([7]). Böylece $\psi_n(x)$, $\varsigma = \varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\psi_n(x)=\frac{\left(\sqrt{\delta_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}(\varsigma')^{\frac{1}{2}}\frac{n!\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\sqrt{R(\varsigma)}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0-1}{2}}e^{-\frac{\sqrt{\delta_2}\varsigma}{2}}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma'\right)^{\frac{1}{2}}L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)$$

şeklinde yazılır([4]). $n=0,1,2,\ldots$ için, B_n normalizasyon sabiti ve $\varsigma=\varsigma(x)$ olmak üzere,

$$\psi_n(x)=B_n\sqrt{R(\varsigma)}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)^{\frac{\lambda_0-1}{2}}e^{-\sqrt{\delta_2}\frac{\varsigma}{2}}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma'\right)^{\frac{1}{2}}L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)$$

olur([4]). Buradan

$$[\psi_n(x)]^2=B_n^2R\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)^{\lambda_0-1}e^{-\sqrt{\delta_2}\varsigma}\sqrt{\delta_2}\,\varsigma'\left[L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)\right]^2$$

ve (3.21)'den,

$$[\psi_n(x)]^2=B_n^2\left(\sigma_2\varsigma^2+\sigma_1\varsigma+c_0\right)\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)^{\lambda_0-1}e^{-\sqrt{\delta_2}\varsigma}\sqrt{\delta_2}\,\frac{d\varsigma}{dx}\left[L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow[\psi_n(x)]^2dx=B_n^2\left(\sqrt{\delta_2}\right)^{\lambda_0}\left(\sigma_2\varsigma^{\lambda_0+1}+\sigma_1\varsigma^{\lambda_0}+c_0\varsigma^{\lambda_0-1}\right)e^{-\sqrt{\delta_2}\varsigma}\left[L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)\right]^2d\varsigma$$

olur. $0<\varsigma<\infty$ için,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2dx=\int_0^{\infty}B_n^2\left(\sqrt{\delta_2}\right)^{\lambda_0}\left(\sigma_2\varsigma^{\lambda_0+1}+\sigma_1\varsigma^{\lambda_0}+c_0\varsigma^{\lambda_0-1}\right)e^{-\sqrt{\delta_2}\varsigma}\left[L_n^{\lambda_0}\left(\sqrt{\delta_2}\,\varsigma\right)\right]^2d\varsigma$$

dır. Burada

$$\sqrt{\delta_2}\,\varsigma=t$$

dönüşümü yapıldığında,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2dx=\int_0^{\infty}B_n^2\left(\frac{\sigma_2}{\delta_2}t^{\lambda_0+1}+\frac{\sigma_1}{\sqrt{\delta_2}}t^{\lambda_0}+c_0t^{\lambda_0-1}\right)e^{-t}\left[L_n^{\lambda_0}(t)\right]^2dt$$

$$=B_n^2\left[\frac{\sigma_2}{\delta_2}\int_0^{\infty}t^{\lambda_0+1}e^{-t}\left[L_n^{\lambda_0}(t)\right]^2dt+\frac{\sigma_1}{\sqrt{\delta_2}}\int_0^{\infty}t^{\lambda_0}e^{-t}\left[L_n^{\lambda_0}(t)\right]^2dt\right.$$

$$\left.+c_0\int_0^{\infty}t^{\lambda_0-1}e^{-t}\left[L_n^{\lambda_0}(t)\right]^2dt\right]$$

olur. Laguerre polinomlarının ortogonallik özelliğinden,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi_n(x)]^2dx=B_n^2\left[\frac{\sigma_2}{\delta_2}\frac{(\lambda_0+2n+1)\Gamma(n+\lambda_0+1)}{n!}+\frac{\sigma_1}{\sqrt{\delta_2}}\frac{\Gamma(n+\lambda_0+1)}{n!}+c_0\frac{\Gamma(n+\lambda_0+1)}{\lambda_0 n!}\right]$$

$$=B_n^2\left[\left(\frac{c_0}{\lambda_0}+\frac{\sigma_1}{\sqrt{\delta_2}}+(\lambda_0+2n+1)\frac{\sigma_2}{\delta_2}\right)\frac{\Gamma(n+\lambda_0+1)}{n!}\right]$$

olarak bulunur([10]). Böylece (1.32) eşitliğinin sağlanması için

$$B_n = \left[\left(\frac{c_0}{\lambda_0} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\delta_2}} + (\lambda_0 + 2n + 1)\frac{\sigma_2}{\delta_2} \right) \frac{\Gamma(n + \lambda_0 + 1)}{n!} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

olması gerektiği bulunmuş olur([4]).

IV. BÖLÜM

NATANZON POTANSİYELLERİ İLE İLGİLİ BİR UYGULAMA

$$-\frac{d^2u}{d\xi^2}-\coth\xi\frac{du}{d\xi}+\left[\frac{m^2-2ml\cosh\xi+l^2}{\sinh^2\xi}+\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0 \qquad (m,l,j\in\mathbf{C}) \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. (4.1) denklemi, çözümü ve genel potansiyel denklemi daha önce belirlenen (1.15) denklemine dönüştürülürse (4.1) denkleminin çözümü de bulunabilir. Bunun için (4.1) denklemi,

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\coth\xi\frac{du}{d\xi}$$
$$-\left[\frac{m^2\left(\cosh^2\frac{\xi}{2}-\sinh^2\frac{\xi}{2}\right)-2ml\left(\cosh^2\frac{\xi}{2}+\sinh^2\frac{\xi}{2}\right)\xi+l^2\left(\cosh^2\frac{\xi}{2}-\sinh^2\frac{\xi}{2}\right)}{4\cosh^2\frac{\xi}{2}\sinh^2\frac{\xi}{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradan

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\coth\xi\frac{du}{d\xi}-\left[\frac{\left(m^2-2ml+l^2\right)\cosh^2\frac{\xi}{2}-\left(m^2+2ml+l^2\right)\sinh^2\frac{\xi}{2}}{4\cosh^2\frac{\xi}{2}\sinh^2\frac{\xi}{2}}+\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0$$

olduğundan

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\coth\xi\frac{du}{d\xi}+\left[\frac{(m+l)^2}{4\cosh^2\frac{\xi}{2}}-\frac{(m-l)^2}{4\sinh^2\frac{\xi}{2}}-\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0$$

olur. Burada

$$m+l=m_1 \text{ ve } m-l=m_2$$

alındığında

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\coth\xi\frac{du}{d\xi}+\left[\frac{m_1^2}{4\cosh^2\frac{\xi}{2}}-\frac{m_2^2}{4\sinh^2\frac{\xi}{2}}-\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0 \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.2) denkleminde

$$z=\tanh^2\frac{\xi}{2} \tag{4.3}$$

dönüşümü yapıldığında

$$\cosh^2\frac{\xi}{2}=\frac{1}{1-z}\ ,\ \sinh^2\frac{\xi}{2}=\frac{z}{1-z}\ ,\ \coth\xi=\frac{1+\tanh^2\frac{\xi}{2}}{2\tanh\frac{\xi}{2}}$$

olmak üzere

$$\frac{du}{d\xi}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{d\xi}=\tanh\frac{\xi}{2}\left(1-\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)\frac{du}{dz}$$

ve

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=\tanh^2\frac{\xi}{2}\left(1-\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)^2\frac{d^2u}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}\left(1-\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)^2-\tanh^2\frac{\xi}{2}\left(1-\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)\right]\frac{du}{dz}$$

bulunur([15]). Bu ifadeler (4.2) diferansiyel denkleminde yerlerine yazıldığında

$$z(1-z)^2\frac{d^2u}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}(1-z)^2-z(1-z)\right]\frac{du}{dz}+\frac{1}{2}(1+z)(1-z)\frac{du}{dz}$$

$$+\left[\frac{m_1^2}{\frac{4}{1-z}}-\frac{m_2^2}{\frac{4z}{1-z}}-\frac{1}{4}j(j+2)\right]u=0$$

ve buradan

$$z(1-z)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(1-z)^2\frac{du}{dz}+\frac{m_1^2z(1-z)-m_2^2(1-z)-j(j+2)z}{4z}u=0$$

veya

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\frac{m_1^2z(1-z)-m_2^2(1-z)-j(j+2)z}{4z^2(1-z)^2}u=0 \tag{4.4}$$

olur. Bu denklemde $z=z(x)$, $x\in\mathbf{R}$ olmak üzere

$$u=f(z)\psi(x) \tag{4.5}$$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümde yer alan $f(z)$ fonksiyonu, (4.4) denklemi bir Schrödinger denklemi haline gelecek şekilde belirlenecektir. (4.5) dönüşümüne göre,

$$\frac{du}{dz}=f'(z)\psi(x)+\frac{1}{z'}f(z)\frac{d\psi(x)}{dx}$$

ve

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{1}{(z')^2}f(z)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{2}{z'}f'(z)-\frac{z''}{(z')^3}f(z)\right]\frac{d\psi(x)}{dx}+f''(z)\psi(x)$$

olmak üzere

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{2f'(z)z'}{f(z)}-\frac{z''}{z'}+\frac{z'}{z}\right]\frac{d\psi(x)}{dx}$$
$$+(z')^2\left[\frac{f''(z)}{f(z)}+\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{m_1^2 z(1-z)-m_2^2(1-z)-j(j+2)z}{4z^2(1-z)^2}\right]\psi(x)=0 \qquad (4.6)$$

elde edilir. Bu denklemin, (1.15) denklemi haline gelmesi için $\frac{d\psi(x)}{dx}$'in katsayısı, (1.15) denkleminde sıfır olduğundan (4.6) denkleminde de sıfır olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{2f'(z)z'}{f(z)}-\frac{z''}{z'}+\frac{z'}{z}=0 \qquad (4.7)$$

alınırsa,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{f''(z)}{f(z)}+\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{m_1^2 z(1-z)-m_2^2(1-z)-j(j+2)z}{4z^2(1-z)^2}\right](z')^2\psi(x)=0 \qquad (4.8)$$

olur. (4.7) denkleminin her iki yanının x'e göre integrali alındığında

$$f(z)=(z')^{\frac{1}{2}}\,z^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.9)$$

elde edilir. Ayrıca (4.7)'den

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{1}{z}\right) \qquad (4.10)$$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{1}{z}\right)f(z)$$

şeklinde yazılır. $f'(z)$'nin x'e göre türevi alındığında

$$f''(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{(z')^3}-2\frac{(z'')^2}{(z')^4}+\frac{1}{z^2}\right)f(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{1}{z}\right)f'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{f''(z)}{f(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{(z')^3}-2\frac{(z'')^2}{(z')^4}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{1}{z}\right)\frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{f''(z)}{f(z)}=\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{(z')^3}-2\frac{(z'')^2}{(z')^4}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{z''}{(z')^2}-\frac{1}{z}\right)^2 \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) ve (4.11) ifadeleri (4.8)'de yerine yazıldığında

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2\right)+\frac{m_1^2 z(1-z)-m_2^2(1-z)-j(j+2)z+(1-z)^2}{4z^2(1-z)^2}(z')^2\right]\psi(x)=0 \tag{4.12}$$

olur. Burada, $(z')^2$'nin katsayısının payı, (1.13) fonksiyonu ile karşılaştırıldığında

$$\begin{cases}\mu^2=m_1^2\\ \lambda_0^2=m_2^2\\ \lambda_1^2=(j+1)^2\end{cases} \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$I(z)=\frac{(m_1^2-1)z(1-z)-(m_2^2-1)(1-z)-j(j+2)z}{4z^2(1-z)^2} \tag{4.14}$$

ve $z(x)$'in x'e göre Schwartz türevi

$$\{z,x\}=\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 \tag{4.15}$$

ile gösterildiğinde (4.12) diferansiyel denklemi de

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}\{z,x\}+I(z)(z')^2\right]\psi(x)=0 \tag{4.16}$$

haline gelir. Şu halde (1.15) denklemi için bulunanlar burada da geçerlidir.

(1.15) denkleminin çözümü olan $\psi(x)$ dalga fonksiyonu için elde edilen (1.31) ifadesi ile (4.9) ifadesi, (4.5) dönüşümünde yerlerine yazılırsa,

$$u=z^{\frac{\lambda_0}{2}}(1-z)^{\frac{\lambda_1}{2}}F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

bulunur. Bu ifadede, (4.2) denkleminde yapılan (4.3) dönüşümü göz önüne alındığında

$$u=\left(\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{\lambda_0}{2}}\left(1-\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{\lambda_1}{2}}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\tanh^2\frac{\xi}{2}\right)$$

şeklinde yazılır. Burada (4.13) bağıntıları kullanıldığında, (4.1) denkleminin çözümü

$$u = u(\xi) = \left(\tanh^2 \frac{\xi}{2}\right)^{\frac{m_2}{2}} \left(1 - \tanh^2 \frac{\xi}{2}\right)^{\frac{j+1}{2}} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \tanh^2 \frac{\xi}{2}\right) \qquad (4.17)$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca (1.17) bağıntılarında, (4.13) bağıntıları kullanıldığında

$$\begin{cases} 1 - m_1^2 = ak^2 - f \\ 1 - m_2^2 = c_0 k^2 - h_0 \\ 1 - (j+1)^2 = c_1 k^2 - h_1 \end{cases} \qquad (4.18)$$

elde edilir. Bu bağıntılar, (4.14) ifadesinde kullanıldığında

$$I(z) = \frac{[az(z-1) + c_0(1-z) + c_1 z]k^2 + fz(1-z) - h_0(1-z) - h_1 z}{4z^2(1-z)^2}$$

olduğundan, birinci bölümden, (4.16) denklemindeki $U(x)$ potansiyeli (1.30) biçiminde olur.

KAYNAKLAR

[1] Newton, R.G.; 1966, *Scattering Theory Of Waves And Particles*, McGraw-Hill Book Company, New York, 339-340, 349

[2] Karaoğlu, Bekir; 1994, *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Bilgi Tek Yayıncılık, İstanbul, 2. Basım, 29-65

[3] Spiegel, M.R.; 1959, *Vektörel Analiz ve Tensör Analizine Giriş*, Birsen Kitabevi Yayınları, İstanbul, 3, 76-77

[4] Natanzon, G. A.; 1971, *Study Of The One-Dimensional Schrödinger Equation Generated From The Hypergeometric Equation*, Vestnik Leningradskogo Universiteta, No.10, 22-28

[5] Natanzon, G. A.; 1979, *General Properties Of Potentials For Which the Schrödinger Equation Can Be Solved By Means Of Hypergeometric Functions*, Teor. Mat. Fiz., Vol.38, 146-153

[6] Whittaker, E. T. ve Watson, G. N.; 1965, *A Course of Modern Analysis*, *An Introduction To The General Theory Of Infinite Processes And Of Analytic Functions; With An Account Of The Principal Transcendental Functions,* Cambridge At The University Press, Fourth Edition, 281-296

[7] Abramowitz, M. ve Stegun, I. A.; 1964, *Handbook Of Mathmatical Functions With Formulas, Graphs, And Mathmatical Tables*, National Bureau Of Standards, Washington, 255-256, 779-780

[8] Magnus, M. vd.; 1966, *Formulas And Theorems For The Special Functions Of Mathematical Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*, 209-210, 295-304

[9] Lévai, G. ve Znojil, M.; 2000, *Systematic search For PT SymmetricPotentials With Real Energy Spectra*, J. Phys. A:Math. Gen., 33, 7165-7180

[10] Gradshteyn, I. S. ve Ryzhik, I. M.; 1969, *Table Of Integrals, Series And Products*, Academic, New York, 841-842

[11] Aktosun, T.; 2004, *Construction Of The Half-Line Potential From The Jost Function*, Inverse Problems, Institute Of Physics Publishing, Vol.20, No.3, 859-876

[12] Rakityansky, S. A. vd.; 1996, *A Method Of Calculating The Jost Function For*

Analytic Potentials, Nuovo Cimento-Societa Italiano Di Fisica Seizone B, Vol.111, No.3, 363-380

[13] Newton, R.G.; 1980, *Inverse Scattering. I. One Dimension*, J. Math. Phys., Vol.21, No.3, 493-495

[14] Milson, R.; 1998, *On The Liouville Transformation And Exactly-Solvable Schrödinger Equations*, International Journal Of Theoretical Physics, Vol.37, No.6, 1735-1752

[15] Wu, J. vd.; 1989, *Group Theory Approach To Scattering. IV.Solvable Potentials Associated With SO(2,2)*, Annals Of Physics, Vol.196, 163-181

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Arzu GÜLEROĞLU
Doğum Yeri	:	Ankara
Doğum Tarihi	:	21.09.1980
Medeni Durumu	:	Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul	:	Yozgat-Merkez Sakarya İlkokulu
Ortaokul	:	Kars-Merkez Atatürk Ortaokulu
Lise	:	Edirne Lisesi
Lisans	:	Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Tezsiz Yüksek Lisans	:	Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Programı
Yabancı Dil	:	İngilizce

İş Tecrübesi

24 Ocak 2005 tarihinden beri Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.