

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAPALI ROBERTSON – WALKER EVRENİNDE KUANTİZE
EDİLMİŞ SKALER ALANIN ENERJİ-MOMENTUM TENSÖRÜ

HÜSNÜ EŞİYOK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANA BİLİM DALI

TEZ YÖNETİCİSİ: Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN

2011

EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAPALI ROBERTSON–WALKER EVRENİNDE KUANTİZE
EDİLMİŞ SKALER ALANIN ENERJİ-MOMENTUM TENSÖRÜ

HÜSNÜ EŞİYOK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 15/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN

(ÜYE)

Yrd. Doç. Dr. M. Akif SABANER

(ÜYE)

Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN

(DANIŞMAN)

ÖZET

Pozitif eğriliğe sahip Robertson-Walker evreninde, kütlelesiz konformal skaler alana adyabatik regülarizasyon yöntemi uygulandı. Adyabatik boşluktaki kuantum gerilim tensörünün beklenen değeri açıkça yeniden elde edildi. Burada göz önüne aldığımız yaklaşım, kütlelesiz konformal skaler alanın ve çok küçük kütleli konformal skaler alanın enerji-momentum tansörünün analitik yaklaşımla elde edilmesinde yararlı bir yöntemdir.

ABSTRACT

Adiabatic regularization is applied to a massless conformal scalar field in a Robertson – Walker universe with positive spatial curvature. We reobtained explicit expressions for the expectation value of the quantum stress tensor in an adiabatic vacuum. This method we consider here is useful to be obtained the analytic approximation for the energy - momentum tensor of a massless conformal scalar field and of conformal scalar field with very small masses.

TEŞEKKÜRLER

Bu tez çalışmasının planlanmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. ENERJİ MOMENTUM TENSÖRÜ	4
2.1. Mod Fonksiyonları	4
2.2. WKB Yaklaşım Yöntemi	17
3. SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	32
Ek-A Tek Boyutta Schrödinger Denkleminin WKB Yöntemi İle Çözümleri	33
Ek-B Robertson – Walker Evreninde Bazı Geometrik Tensörler	38

KISALTMALAR

$T_{\mu\nu}$:Madde ve Alanlar Enerji Momentum Tensör
$g_{\mu\nu}$:Metrik Tensör
$\eta_{\alpha\beta}$:Minkowski Metrik Tensör
$R_{\mu\nu}$:Ricci Tensörü
R		:Ricci Skalari
$\frac{\partial T_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, T_{\mu,\nu}$:Parçalı Türev
$\partial^{\mu}, \partial_{\nu}$:	$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$
Γ_{pq}^i		:Christoffel Sembolü
$B(n, \lambda)$:Beta Fonksiyonu
$\Gamma(n)$:Gamma Fonksiyonu
$C_n^{\lambda}(x)$:Gegenbauer Polinomları
$P_l^m(x)$:Associated Legendre Polinomları
$P_l(x)$:Legendre Polinomları
\square		:D'Alembert Operatörü
ξ		:Konformal Faktör
$Ai(z), Bi(z)$:Airy Fonksiyonları

1. GİRİŞ

Casimir 1948’de ilk defa paralel yüksüz iki iletken levha ile sınırlandırılmış elektromanyetik alanın normalleştirilmiş kuantum boşluk enerjisini hesapladı. Casimir’in bulmuş olduğu enerji sonlu ve negatif olduğundan levhalar arasında çekici kuvvet üreteceğini öngördü. Bu çekici kuvvet:

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}$$

Burada \hbar Planck sabitini, c ışık hızını, a da levhalar arasındaki uzaklığı göstermektedir. Bu ifade bize birim yüzey alan başına düşen kuvveti verir. Bu çekici kuvvet daha sonra laboratuarlarda da gözlemlenmiştir [Sparnay, 1958] [Lamoreaux, 1991]. Ayrıca Casimir bu çekici kuvvetin kararlı kalacağından esinlenerek elektron modeli kurabileceğini ümit etti. Casimir’in elektron modelinin esası, bu çekici kuvvetin itici elektrik kuvvetini dengeleyebileceği öngörüsüyüdü. Yalnız bu elektron model öngörüsü 1968 yılında Boyer tarafından çürütülmüştür [Boyer, 1968]. Çünkü Casimir elektron modelindeki öngörüsünü yaparken küresel kabuğun Casimir etkisinin, aynı paralel plakalardaki gibi negatif değerli enerji üreteceğini düşünmüştü. Hâlbuki Boyer küresel kabuğun Casimir etkisinin itici kuvvete sahip olduğunu göstermiştir. Böylece Casimir etkinin kararlı diğer deyişle aynı işaretli enerji üretmeyeceği geometriden geometriye, boyuttan boyuta hem de sınır değer koşullarına bağlı olarak değişen farklı işaretli ve değerli enerji üreteceği anlaşılmıştır. Son zamanlarda yapılan çalışmalar bu düşüncüyü doğrulamaktadır [Bayın ve Özcan, 1994] [Özcan, 2005] [Özcan, 2006].

Kuantum boşluk enerjisi yapı olarak sonsuz enerji değerindedir. Ama kuantize edilmiş alanın geometri ve sınır değer koşulları ile etkileşimi mutlak sıfırda sonlu enerji üretmektedir. Bu sonlu enerjiyi elde etmek için: önce sonsuzlukların nerelerde olduğunun belirlenmesine: sonrada belirlediğimiz bu sonsuzlukları çıkarabileceğimiz fiziksel yorumlarla tutarlı olan bir yöntem ihtiyacı vardır. Sonsuzlukların

belirlenmesine: regülarizasyon, belirlenen bu sonsuzlukların çıkartılmasına da: renormalizasyon denir. Casimir enerji hesaplarında matematiksel olarak ortaya çıkan sonsuz ifadelerin içinden sonlu ifadelerin elde edilebilmesi için yegâne bir regülarizasyon yöntemine sahip değiliz. Dolayısıyla en basit geometrideki Casimir probleminde de matematiksel olarak yeni yapılanmalara ihtiyaç duymaktadır.

Kuantum alan teorisini ve kütle çekimini birlikte ilişkilendirdiğimizde ortaya çıkan temel sorunlardan biri de kuantum sıfır nokta enerjisi veya boşluk enerjisidir. Kuantum alanın sıfır nokta enerjisi kütle çekimin kaynağı gibi mi davranıyor? Bu soru kuantum alan teorisi ile kütle çekim teorisinin bir arada göz önüne alınmasının önemli bir sonucudur. Çünkü bir yerde enerji varsa orada madde var demektir. Madde varsa orada eğrisellik diğer deyişle kütle çekimi var demektir. Kütle çekimin olmadığı durumlarda uzay–zamanın geometrisi düzdür. Kuantum alan teorisi ve kütle çekimi teorisini birlikte ele aldığımızda kuantum boşluk enerjisinin doğasında var olan benzer sonsuz ifadeler üstesinden gelinemeyecek bir yapıda ortaya çıkar. Kuantize edilmiş skaler alan ile klasik Einstein kütle çekim alanları etkileştirildiğinde fiziksel durum hakkında bilgi taşıyan enerji-momentum tensörlerinin beklenen değerleri sonsuzluklara sahiptir [Anderson ve Parker, 1987]. Bu sonsuzlukların üstesinden gelebilmek için en iyi bilinen boyutsal regülarizasyon ve adyabatik regülarizasyon yöntemlerine sahibiz. Özellikle bu çalışmada ağırlıklı adyabatik regülarizasyon tekniği ile çalışacağız. Kütle çekimi teorisi ile kuantum teorisinin bir arada etkileşim gösterdiği fizik problemlerinin çözümleri, bu sonsuz ifadelerin içinden fiziksel yasalara uyumlu yorumlar içeren renormalizasyon yapılamadığından analitik olarak çözülememektedir. Problemin her adımında matematiksel olarak üstesinden gelinemeyen ıraksak ifadelerle karşılaşmaktadır. Her iki teorisinin bir arada olduğu yığınla fiziksel olaylar söz konusu olmasına rağmen işlem yaparak çözümü verecek olan yegâne bir teoriye sahip değiliz. Bulacağımız teorisinin şüphesiz bir önceki aşamada var olan teorilerimizi sarsılmaz bir şekilde barındırması gerekiyor. Kesinlikle evrenin her yerinde geçerli olan tartışmasız teorilerimizi kullanarak karşımıza çıkan fiziksel durumları anlamaya başlamalıyız. Bunun için yarı-klasik yaklaşım denilen bir yaklaşımla yukarıda anlatımını verdiğimiz sonsuzluklarla baş etmenin yolunu bulabiliriz. Yarı klasik demekle anlatmak istediğimiz şey ise: Einstein'ın kütle çekim teorisinin ana kaynağını oluşturan denklemin sol tarafındaki geometrik yapıyı klasik eğriselliğe sahip olan geri zemin geometrisi olarak

göz önüne alırız. Sağ taraftaki enerji momentum tensörünü ise kuantize edilmiş alanın enerji-momentum tensörü olarak hesaplarımıza katarız. İşte bu manada yarı-klasik yaklaşımdan bahsediyoruz [Parker, 1969] [Birrell ve Davies] [Özcan, 1991].

Bu çalışmada geri zeminde var olan kapalı Robertson–Walker evrenine yerleştirilmiş kütsüz konformal skaler alanın hiçbir şeyin olmadığı mutlak sıfırda kuantum boşluk enerjisinin nasıl hesaplanacağını yeniden inceleyeceğiz. Einstein denkleminin sol tarafı problemimizin geometrisini biçimlendirir iken sağ taraftaki enerji momentum tensörü ise geri zemine yerleştirilmiş kuantize edilmiş alanın enerji-momentum ifadesini içerecektir. Einstein denklemi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} \rangle$$

Burada $R_{\mu\nu}$ Ricci Tensörü, R Ricci Skaleri, Λ kozmolojik sabit, G Newton'un gravitasyon sabiti, $T_{\mu\nu}$ de enerji momentum tensörüdür.

Çalışmamızda kuantum boşluk enerji hesaplarının yapılabilmesi için adyabatik regülarizasyon yöntemini kullanacağız. Öncelikle geri zeminde var olan kapalı Robertson–Walker evreninde kuantum skaler alanların dinamiğini veren dalga denkleminin çözümlerini bulacağız. Ayrıca zamana bağlı olan mod fonksiyonlarının denklemini çözerken WKB yaklaşım yöntemini kullanacağız. Burada elde ettiğimiz kütsüz konformal skaler alan için klasik olarak ifade edilen enerji-momentum tensörünü bulup geri zeminde yavaşça genişleyen Einstein evrenindeki kuantize edilmiş kütsüz konformal skaler alanın enerji-momentum tensörünün beklenen değerlerini hesaplayacağız. Ortaya çıkan enerji-momentum tensörünün beklenen değerlerindeki sonsuzlukları adyabatik regülarizasyon yöntemi ile belirleyeceğiz. Daha sonra renormalize ederek sonlu beklenen enerji-momentumun beklenen değerlerini elde edeceğiz. Bu çalışmamızı ağırlıklı olarak Anderson ve Parker'ın 1987 yılında ve Anderson ve Eaker'ın 2000 yılında yaptığı çalışmaları temel alarak geliştirdik.

Çalışmada $\hbar = c = 1$ olarak alınmıştır. Kullandığımız metrik (+---) ve

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \dots, R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \text{ şeklindedir.}$$

2. ENERJİ-MOMENTUM TENSÖRÜ

2.1 Mod Fonksiyonları

Öncelikle geri zeminde Robertson–Walker uzay–zamanında bulunan kuantize edilmiş alanın modlarını hesaplayalım. Geri zemindeki uzay–zamanı temsil eden geometri genel olarak:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1-Kr^2} - r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.1.1)$$

metriği ile tanımlanır [Anderson ve Parker, 1987]. Burada $a(\eta)$ ölçü faktörü, K ise uzay eğriliğimizdir. Uzay eğriliğimiz $K = 1$ için kapalı, $K = 0$ için düz ve $K = -1$ için ise açık evrene karşılık gelir. Kuantize edilmiş alanımızı $K = 1$ durumu için yani kapalı Robertson–Walker evreninde inceleyeceğiz. Bu durum için metriğimizi tekrar yazarsak:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1-r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.1.2)$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = \eta, r, \theta, \phi$$

şeklinde olur. Burada $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

dır. Denklem (2.1.2)'i $r = \sin \chi$ dönüşümü altında tekrar yazarsak:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi d\theta^2 - \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.1.4)$$

$$\chi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

şeklinde buluruz. $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = n$ dir. Burada n uzay-zaman boyutudur. Şimdi geri zeminde kapalı Robertson–Walker evrenindeki kütesiz konformal skaler alan denkleminin çözümlerine bakalım. Kuantum alan denklemi ve sağlaması gereken sıra değiştirme bağıntıları:

$$(\square + m^2 + \xi R)\Phi = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\Phi(\eta, \chi, \theta, \phi) = \int d\tilde{\mu}(k) (a_k U_k + a_k^\dagger U_k^*) \quad (2.1.6)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\xi = \frac{n-2}{4(n-1)} \quad (2.1.8)$$

şeklinde verilir [Birrell ve Davies, 1982]. ξ konformal faktörü, R Ricci skaleri ve \square ise D'Alembert operatörüdür:

$$\square = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanır. $g = \det g_{\mu\nu}$ dir. Böylece:

$$\sqrt{-g} = a^4 \sin^2 \chi \sin \theta \quad (2.1.10)$$

buluruz. Burada $n=4$ için konformal faktörü $\xi=1/6$ bulunur. D'Alembert operatörünü bulmak için denklem (2.1.8)'den yararlanarak, gerekli işlemleri yapıp düzenlediğimizde:

$$\square = \frac{1}{a^4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.1.11)$$

buluruz. D' Alembert işlemcisini (2.1.5)'de verilen kütleli konformal skaler alanın sağladığı dalga denkleminde yerine koyduğumuzda:

$$\left(\frac{1}{a^4} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sin^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right) + m^2 + \xi R - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \Phi(\eta, \chi, \theta, \phi) = 0 \quad (2.1.12)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (2.1.12)'i değişken ayırıştırma yöntemine göre çözümü:

$$U_k = \frac{\Psi(\eta)}{a(\eta)} X(\chi) Y(\theta, \phi) \quad (2.1.13)$$

dir. Burada $\Psi(\eta)$, $X(\chi)$ ve $Y(\theta, \phi)$ 'nün sağladıkları diferansiyel denklemler sırasıyla:

$$\frac{1}{a\Psi} \frac{d}{d\eta} \left(a^2 \frac{d}{d\eta} \frac{\Psi}{a} \right) + a^2 m^2 + \frac{a^2 R}{6} + k^2 - 1 = 0 \quad (2.1.14)$$

$$-\frac{1}{\sin^2 \chi} \left[\frac{1}{X} \frac{d}{d\chi} \left(\sin^2 \chi \frac{d}{d\chi} X \right) - l(l+1) \right] = k^2 - 1 \quad (2.1.15)$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} Y \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2} Y \right] = -l(l+1) \quad (2.1.16)$$

Burada k ve l birer sabittir. Bu sabitlerin nasıl davrandığı bu denklemlerin düzenli çözümlerinin varlığından gelir. Çözümlerimizi bulmak için denklem (2.1.16) tartışmaya başlayalım. Denklem (2.1.16) için:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)Z(\phi) \quad (2.1.17)$$

dönüşümü yapalım. Bu dönüşüm altında denklem (2.1.16)'ı tekrar yazarsak:

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{d\phi^2} Z + l(l+1) \sin^2 \theta = 0 \quad (2.1.18)$$

elde ederiz. Denklem (2.1.18) de değişkenleri birbirinden bağımsız iki diferansiyel denklem verir. Sırasıyla:

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2}{d\phi^2} Z = -m^2 \quad (2.1.19)$$

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) + l(l+1) \sin^2 \theta - m^2 = 0 \quad (2.1.20)$$

Denklem (2.1.19) katsayıları sabit, lineer ve homojen bir diferansiyel denklemdir. Çözümün tek değerli olma şartı bize:

$$Z(\phi) \approx \exp[im\phi] \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.21)$$

olduğunu söyler. Denklem (2.1.20) deki diferansiyel denklemi $x = \cos \theta$ dönüşümü altında tekrar yazarsak:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\Theta - 2x\frac{d}{dx}\Theta + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \quad (2.1.22)$$

Denklem (2.1.22)'i buluruz. Denklem (2.1.22) Associated Legendre denklemidir. Frobenius çözüm yöntemi uygulandığında çözümler:

$$P_l^m(x) \equiv \Theta = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad m \geq 0 \quad (2.1.23)$$

dır. Burada $l = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = -l, \dots, 0, \dots, l$ değerleri alabilir ve $P_l^m(x)$ Associated Legendre polinomlarıdır. Denklem (2.1.17) deki genel çözüm:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \quad (2.1.24)$$

dır [Bell, 1968]. Burada $l = 0, 1, 2, \dots$ ve $m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$ dir. Denklem (2.1.15) için çözümlerimizi tartışmaya devam edelim. Ve denklem (2.1.15)'e $x = \cos \chi$ dönüşümü uygulayarak tekrar yazıldığında:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}X - 3x\frac{d}{dx}X + \left[k^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{1-x^2}\right]X = 0 \quad (2.1.25)$$

$X(x)$ 'in sağladığı denklemi elde ederiz. $X(x)$ 'in sağladığı denklemi adi nokta etrafında çözümlerini tartıştığımız zaman:

$$(n+3)(n+4)a_{n+4} + [-2(n+1)(n+2) - 3(n+2) + k^2 - 1 - l(l+1)]a_{n+2} \\ + [n(n+2) - k^2 + 1]a_n = 0, \quad n \geq 2 \quad (2.1.26)$$

tekrarlama bağıntısını elde ederiz. Böyle bir tekrarlama bağıntısı ile katsayılar arasındaki ilişkiyi belirleyemeyiz. $X(x)$ 'in çözümlerini elde edebilmek için $X(x)$ 'in sağladığı (2.1.25) de verilen denklemi uç noktalarda nasıl davrandığını inceleyelim. Bunun için denklem (2.1.25) de yeni değişkenler tanımlayalım:

$$\begin{aligned} x = 1 \quad \text{uç noktası için} & \quad y = 1 - x \\ x = -1 \quad \text{uç noktası için} & \quad y = 1 + x \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Bu dönüşümleri kullanarak denklem (2.1.25)'i tekrar yazalım. Her iki dönüşüm altında $X(x)$ 'in sağladığı denklemi:

$$y(2-y) \frac{d^2}{dy^2} X + 3(1-y) \frac{d}{dy} X + \left[k^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{y(2-y)} \right] X = 0 \quad (2.1.28)$$

yeni değişkenler cinsinden elde ederiz. $y \rightarrow 0$ limit durumunda uç durumlarda çözümlerimize katkı veren terimler:

$$4y^2 \frac{d^2}{dy^2} X + 6y \frac{d}{dy} X - l(l+1) X = 0 \quad (2.1.29)$$

şeklini alır. Uç durumu temsil eden denklemi $t = \ln y$ dönüşümü yaparak düzenleriz.

$$4 \frac{d^2}{dt^2} X + 2 \frac{d}{dt} X - l(l+1) X = 0 \quad (2.1.30)$$

Böylece (2.1.30) denklemi katsayıları sabit ikinci dereceden çizgisel homojen diferansiyel denklem durumuna gelir. Bu durumda çözümler:

$$X_1 \approx y^{\frac{l}{2}} \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.31)$$

$$X_2 \approx y^{-(l+1)}$$

olur. X_2 çözümünü $y \rightarrow 0$ tanımsızlık yarattığı için almayız. O halde her iki uç noktada ki çözüm:

$$X = (1-x)^{\frac{l}{2}} (1+x)^{\frac{l}{2}} C(x) \quad (2.1.32)$$

dır. Uç durumlar için davranışını belirlediğimiz çözümleri denklem (2.1.25) de yerine koyarak gerekli işlemlerden sonra $C(x)$ 'in sağladığı denklemi:

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} C - (2l+3)x \frac{d}{dx} C + (k+l+1)(k-l-1)C = 0 \quad (2.1.33)$$

buluruz. Şimdi $C(x)$ 'in sağladığı denkleme Frobenius seri çözüm yöntemini tekrar uygularsak. Frobenius yöntemi gereğince $x = \pm 1$ düzgün tekil nokta etrafında çözüm:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \quad a_0 \neq 0 \quad (2.1.34)$$

dır. Bu çözümü (2.1.33) denkleminde yerine yerleştirdiğimizde:

$$a_0 r(r-1)x^{r-2} + a_1 r(r+1)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+r+1)(n+r+2)]a_{n+2} - [(n+r)(n+r+2l+2) - (k+l+1)(k-l-1)]a_n\} x^{n+r} = 0 \quad (2.1.35)$$

ifadesini elde ederiz. Bu sonuçtan hareketle:

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 &= 0 \\ r(r+1)a_1 &= 0 \end{aligned} \quad a_{n+2} = \frac{(n+r)(n+r+2l+2) - (k+l+1)(k-l-1)}{(n+r+1)(n+r+2)} a_n, \quad n \geq 0 \quad (2.1.36)$$

tekrarlama bağıntılarını buluruz. Tekrarlama bağıntımız indis kökü $r = 0$ seçeriz çünkü $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ olmalı. Bu durumda katsayılar arasındaki ilişkide:

$$a_{n+2} = \frac{(n+l+1)^2 - k^2}{(n+1)(n+2)} a_n \quad n \geq 0 \quad (2.1.37)$$

şeklinde bulunur. $x = \pm 1$ de katsayılarımızın davranışı ıraksak mı? Yakınsak mı? Düzenli çözümler için kontrol etmemiz gerekiyor. Bunun için Raabe testi ile $x = \pm 1$ de katsayıların arasındaki davranışı test edelim. Tanım gereği Raabe testi:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{U_n}{U_{n+1}} - 1 \right] \rightarrow \begin{cases} \rho < 1 & \text{ise; seri ıraksar} \\ \rho > 1 & \text{ise; seri yakınsar} \\ \rho = 1 & \text{ise; bilgi yok} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [Arfken ve Hans, 2005]. Burada $U_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ dir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+l+1)^2 - k^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} - l \quad (2.1.38)$$

$l = 0, 1, 2, \dots$ olduğundan $\rho = \frac{1}{2} - l$ için $\rho < 1$ olur. Raabe testi, katsayıların ıraksadığını bu nedenle de çözüm $x = \pm 1$ noktasında ıraksak karakterde olduğunu söyler. Düzenli çözümü bulmak için seri bir yerde kesilmeli yani $a_{2n} \neq 0$ fakat $a_{2n+2} = 0$, benzer şekilde de $a_{2n+1} \neq 0$, $a_{2n+3} = 0$ olmalı. $n = k - l - 1$ seçimi serimizin bir yerde kesilmesine olanak sağlar burada $k \geq l + 1$ dir. Bu duruma göre katsayıları veren tekrarlama bağıntısı:

$$a_{k-l-1-2r} = \frac{(-1)^r (k-l-1)!(k-r-1)!}{2^{2r} (k-1)!(k-l-1-2r)!r!} a_{k-l-1} \quad r \geq 1 \quad (2.1.39)$$

olur. Katsayıların nasıl geldiğini görmek için ilk iki terimi açarsak:

$$a_{k-l-3} = \frac{(k-l-1)(k-l-2)}{(2k-2)(-2)} a_{k-l-1} \quad (2.1.40)$$

$$a_{k-l-5} = \frac{(k-l-1)(k-l-2)(k-l-3)(k-l-4)}{2 \cdot 2(k-1)(k-2)(-2)(-4)} a_{k-l-1} \quad (2.1.41)$$

dır. Genel olarak:

$$C(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k-l-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r (k-l-1)!(k-r-1)!}{2^{2r} (k-1)!(k-l-1-2r)!r!} a_{k-l-1} x^{k-l-1-2r} \quad (2.1.42)$$

çözümü elde ederiz. Bu çözümde $k-l-1$ yerine n ve $l+1$ yerine λ yazalım.

$$C(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^r (n)!(n+\lambda-r-1)!}{2^n (n+\lambda-1)!(n-2r)!r!} a_n (2x)^{n-2r} \quad \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} n \text{ çift ise } \frac{n}{2} \\ n \text{ tek ise } \frac{n-1}{2} \end{cases} \quad (2.1.43)$$

Denklem (2.1.43) çözümündeki a_n katsayısı için aşağıdaki seçimleri yaparsak:

$$a_n = \frac{2^n}{nB(n, \lambda)} \quad B(n, \lambda) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(n+\lambda)} \quad (2.1.44)$$

$C(x)$ 'in çözümü:

$$C_n^\lambda(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \frac{\Gamma(n+\lambda-r)}{\Gamma(\lambda)r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r} \quad \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} n \text{ çift ise } \frac{n}{2} \\ n \text{ tek ise } \frac{n-1}{2} \end{cases} \quad (2.1.45)$$

Gegenbauer Polinomları ya da ultra küresel harmonikler olur. Burada $\lambda = 1/2$ seçimi ile Legendre Polinomlarına indirgenir [Bell, 1968]. denklem (2.1.45)'i (2.1.32) de yerine yazarsak $X(x)$ 'in çözümü:

$$X(\cos \chi) = \sin^l \chi C_{k-l-1}^{l+1}(\cos \chi) \quad (2.1.46)$$

olur. Genel çözümü yazarsak:

$$\mathfrak{Y}(\chi, \theta, \phi) = N_{nlk} \sin^l \chi C_{k-l-1}^{l+1}(\cos \chi) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.1.47)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad -l \leq m \leq l \quad k \geq l+1$$

dır. Burada N_{nlk} sabitini bulmak için denklem (2.1.47)'i bire boylandırmalıyız.

$$1 = \int |\mathfrak{Y}(\chi, \theta, \phi)|^2 dV \quad (2.1.48)$$

$$1 = N_{nlk}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* Y_l^{m'}(\theta, \phi) \quad (2.1.49)$$

$$\times \int_0^\pi (\sin \chi)^{2l} C_n^\lambda(\cos \chi) C_{n'}^\lambda(\cos \chi) \sin \chi d\chi$$

Küresel harmonikler ve ultra küresel harmonik fonksiyonların diklik bağıntılarını kullanalım.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \{Y_l^m(\theta, \phi)\}^* Y_l^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.1.50)$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_n^\lambda(x) C_{n'}^\lambda(x) dx = \frac{2^{1-2\lambda} \pi \Gamma(n+2\lambda)}{(n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2 \Gamma(n+1)} \delta_{nn'} \quad (2.1.51)$$

N_{nlk} boylandırma sabitini:

$$N_{nlk} = \left[\frac{2^{2l} \left(n + l + \frac{1}{2} \right) \Gamma(n+1) \left[\Gamma\left(l + \frac{1}{2} \right) \right]^2}{\pi \Gamma(n+2l+1)} \right]^{1/2} \quad \begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots \\ k \geq l+1 \\ n = k - l - 1 \end{cases} \quad (2.1.52)$$

elde ederiz. Genel çözümleri tamamlamak için konformal zamana bağlı çözümleri verecek olan (2.1.14) denkleminde yeniden dönelim. Burada R Ricci skaleri, Ek-B deki hesaplarımızdan kapalı Robertson - Walker evreninde ($K = 1$) için:

$$R = \frac{6}{a^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 1 \right)$$

ifade edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklem (2.1.14):

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \Psi + \omega^2 \Psi = 0 \quad \omega^2 = k^2 + m^2 a^2(\eta) \quad (2.1.53)$$

halini alır. Şimdi kuantize edilmiş kütleli konformal skalar alanın yavaşça genişleyen Einstein evreninde bir diğer deyişle kapalı Robertson–Walker evrenindeki enerji momentum tensörünü hesaplayacağız. Bunun için öncelikle Einstein denkleminin sağ tarafındaki enerji momentum tensör ifadesinin elde edilmesini klasik olarak göz önüne alalım sonraki adımda kuantize ederek enerji momentum tensörü beklenen değerini tanımlayalım.

$$T_{\mu\nu} = 2 \left(\sqrt{-g} \right)^{-1} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.1.54)$$

dır [Birrel ve Davies, 1982]. Burada S etki terimidir.

$$S = \int \mathcal{L} dx^4 \quad (2.1.55)$$

Ve \mathcal{L} ise Lagrange yoğunluğudur. Burada Lagrange yoğunluğu:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - m^2 \Phi^2 - \frac{R}{6} \Phi^2 \right) \quad (2.1.56)$$

şeklinde verilir. Eğer etki teriminin alana göre değişimini sıfır alırsak (2.1.5) denkleminde verilen dalga denklemini elde ederiz. Enerji momentum tensörünü bulmak için etki teriminin değişimini alacağız. Sonra bulduğumuz denklemde, aşağıdaki ifadeleri yerine yazıp düzenlediğimizde:

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.1.57)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (2.1.58)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.1.59)$$

$$\delta R = -R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (\delta g_{\alpha\beta;\mu\nu} + \delta g_{\alpha\mu;\beta\nu}) \quad (2.1.60)$$

enerji momentum tensörümüzü [Birrel ve Davies, 1982]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & (1-2\xi) \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Phi_{;\alpha} \Phi_{;\beta} \\ & - 2\Phi_{;\mu\nu} \Phi + \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi - \xi \left[R_{\mu\nu} + \left(\frac{3}{2} \xi - \frac{1}{2} \right) R g_{\mu\nu} \right] \Phi^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \xi \right) m^2 g_{\mu\nu} \Phi^2 \end{aligned} \quad (2.1.61)$$

elde ederiz. $\mu = 0$, $\nu = 0$ seçersek:

$$\begin{aligned}
T^0_0 &= \frac{1}{2a^2} \Phi_{;0} \Phi_{;0} - \frac{1}{2a^2} \Phi \Delta^{(3)} \Phi \\
&+ \frac{\dot{a}}{a^3} \Phi_{;0} \Phi + \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + m^2 a^2 \right) \Phi^2
\end{aligned} \tag{2.1.62}$$

buluruz. Ayrıca $T^\mu_\mu = m^2 \Phi^2$ buluruz. Klasik olarak elde edilen enerji – momentum tensör bileşenlerini (2.1.6) denklemi ile verilen modların fonksiyonu ve (2.1.7) denkleminde verilen sıra değiştirme bağıntılarını kullanarak T^0_0 ve T^μ_μ nün beklenen değerlerini elde ederiz [Anderson ve Parker, 1987].

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle_u = (4\pi^2 a^4)^{-1} \int d\mu(k) \left[|\Psi'_k|^2 + (k^2 + m^2 a^2) |\Psi_k|^2 \right] \tag{2.1.63}$$

$$\langle 0|T|0\rangle_u = (2\pi^2 a^4)^{-1} \int d\mu(k) \left[m^2 a^2 |\Psi_k|^2 \right] \tag{2.1.64}$$

T^0_0 ve T^μ_μ kapalı Robertson–Walker evreninin boşluk enerjilerinin mutlak sıfırdaki beklenen değerleridir. Burada:

$$\int d\mu(k) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^2, \quad K=1 \tag{2.1.65}$$

dır. Buraya kadar $X(\chi)$, $Y_l^m(\theta, \phi)$ çözümlerini ve Kapalı Robertson–Walker evreninde kuantize edilmiş skaler alanın enerji–momentum tensör bileşenlerinin beklenen değerlerinin elde edilmesi için $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ ifadelerinin bilinmesi gerekiyor. Bu ifadelerinde denklem (2.1.53)'in çözümlerinden elde edeceğiz. Fakat denklem (2.1.53)'in analitik olarak çözemeyiz. Çünkü ω η 'ya bağlıdır. Geri zemindeki geometrimiz yavaşça genişleyen Einstein evreni olduğundan denklem (2.1.53)'in çözümlerini bu düşünce ile yaklaşık olarak çözeceğiz. Bu tanımlamaya en uygun yaklaşım WKB yaklaşımıdır. Şimdi ana başlık olarak WKB yöntemini detaylı bir

şekilde inceleyelim ve sonra buradan edineceğimiz tecrübeden hareketle $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ ifadelerini hesaplayalım.

2.2 WKB Yaklaşım Yöntemi

WKB yaklaşım metodu ilk olarak matematikçi Harold Jeffreys tarafından ortaya atılmıştır. Harold Jeffreys 1923 yılında ikinci dereceden diferansiyel denklemlerin ve Schrödinger denkleminin de çözümlerini içinde barındıran genel bir yöntem bulmaya çalışırken, bir yaklaşıklık geliştirmiştir [Jeffreys, 1962]. Yalnız Harold Jeffreys'in ihmalkârlığından olsa gerek ki, 3 yıl sonra, 1926 yılında Wentzel, Kramers ve Brillouin isimli fizikçiler, Harold Jeffreys'in çalışmasından habersiz bir şekilde aynı yöntemi bulup, yayınlamışlar. Ve daha sonrada yöntem bu fizikçilerin isimlerinin baş harfleri ile literatüre geçmiştir (**W**entzel **K**ramers **B**rillouin). Yalnız bazı kaynaklar yöntemi yine Harold Jeffreys'e atıfta bulunmak için JWKB veya WKBJ olarak da kullanabiliyorlar [Wikipedia]

Yöntem:

$$\frac{d^2}{dx^2} y + q(x)y = 0 \quad (2.2.1)$$

şeklindeki 2. dereceden bir diferansiyel denklem olsun. Eğer (2.2.1) eşitliğindeki $q(x)$ bir sabit ise çözümlerimiz:

$$y \cong \exp\left[\pm i\sqrt{q}\right] \quad (2.2.2)$$

gibi olur. Eğer $q(x)$ sabit değil ise o zaman bazı şartlar altında çözümümüzün yine asimptotik olacağını tahmin edebiliyoruz. Yavaşça değişen $q(x)$ değerleri için çözüm:

$$y \cong \exp[i\psi(x)] \quad (2.2.3)$$

Formunda olacağını söyleyebiliyoruz. Bu düşünceden hareketle $\psi(x)$ in ne olacağını ya da ne gibi şartlar sağlayacak, tanımlamaya çalışalım. Bunun için (2.2.3) eşitliğini (2.2.1) denkleminde yerine yazalım. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra (2.2.1) denklemi:

$$\left[\frac{d}{dx} \psi \right]^2 - i \frac{d^2}{dx^2} \psi - q = 0 \quad (2.2.4)$$

olur. Burada WKB'nin ilk koşulu olan eğer $q(x)$ yeterince yavaş değişiyor ise $\frac{d^2}{dx^2} \psi$ ifadesini $q(x)$ 'in yanında ihmal edebiliriz. Böylece denklemimiz:

$$\psi = \pm \int \sqrt{q(x)} dx \quad (2.2.5)$$

olur. Genel çözümümüz:

$$y \cong \exp \left[\pm i \int \sqrt{q(x)} dx \right] \quad (2.2.6)$$

şeklini alır. Peki, $q(x)$ 'in yeterince yavaş değişmesi ne demek? Eğer (2.2.5) eşitliğini x 'e göre iki kere türevini alırsak:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = \pm \frac{1}{2} \frac{q'}{\sqrt{q}} \quad (2.2.7)$$

olur ve bu ifade ile $q(x)$ 'i karşılaştırdığımız zaman:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{q'}{\sqrt{q}} \right| \ll |q| \quad (2.2.8)$$

gibi olması gerekir. Çünkü aralarında (2.2.8) gibi bir ifade söz konusu ise bu $q(x)$ 'in yeterince yavaş değiştiği anlamına gelir. Denklem (2.2.5)'in ihmal edilmemiş halini yazdığımızda:

$$\left(\frac{d}{dx}\psi\right)^2 = q \pm \frac{i}{2} \frac{q'}{\sqrt{q}} \quad (2.2.9)$$

şeklini alır. Önce (2.2.9) denkleminde eşitliğin sağ tarafını q parantezine alıp sonrada binom serisine açtığımızda ifademiz:

$$\psi = \pm \int \sqrt{q(x)} dx + \frac{i}{4} \ln q \quad (2.2.10)$$

halini alır. Şimdi ise bulduğumuz (2.2.6) denklemindeki çözümümüzün ϕ gibi bir genliği olsun diyelim ve bu genliğin $q(x)$ 'e bağlılığını incelemek için:

$$y = \phi(x) \exp\left[\pm i \int \sqrt{q(x)} dx\right] \quad (2.2.11)$$

eşitliğini (2.2.1) deki denklemde yerine yazıp düzenledikten sonra:

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi \pm i^2 q \phi + q \phi \pm i \left[2\sqrt{q} \frac{d}{dx} \phi + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} \frac{d}{dx} q \right] = 0 \quad (2.2.12)$$

elde edilir. (2.2.12) denkleminde ki $\pm i^2 q \phi + q \phi$ ifadesinin sadeleşmesi için başlangıçtaki (2.2.11) denklemini:

$$y = \phi(x) \exp\left[-i \int \sqrt{q(x)} dx\right]$$

şeklinde seçmemiz gerektiği ortaya çıkar. O halde seçimimizi düzelttikten sonra denklem (2.2.12)'i tekrar yazarsak:

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi - i \left[2\sqrt{q} \frac{d}{dx} \phi + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} \frac{d}{dx} q \right] = 0 \quad (2.2.13)$$

halini alır. Burada ϕ 'nin ikinci türevini WKB'nin ilk şartından dolayı ihmal edebiliriz. Kalan eşitliği çözdüğümüz zaman:

$$\phi = \frac{c_{sabit}}{\sqrt[4]{q}} \quad (2.2.14)$$

olur. Son olarak bulduğumuz (2.2.14)'yi (2.2.11) çözümünde yazarsak:

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} \left\{ c_1 \exp \left[-i \int \sqrt{q(x)} dx \right] + c_2 \exp \left[i \int \sqrt{q(x)} dx \right] \right\} \quad (2.2.15)$$

olur [Hassani, 1998]. Burada c_1 ve c_2 birer sabittir. (2.2.15) eşitliği (2.2.1) denkleminin WKB yöntemi ile elde ettiğimiz genel çözümdür. Eğer $q(x)$ hızlı değişiyor ve bazı noktalarda sıfır değerleri alıyor ise bu çözüm tekniğini kullanamayız. Denklem (2.2.8) in daha iyi bir fiziksel yorumu için: $q(x)$ 'i dalga sayısı olarak kabul edersek, $E > V(x)$ durumu için bir dalga boyu tanımlayabiliriz. Bunun için $p = \hbar k$ ve $\lambda = h / p$ denklemlerinden yararlanarak:

$$\lambda(x) = \frac{2\pi}{k(x)} \quad (2.2.16)$$

olur [Merzbacher, 1961]. Buda bize momentumda ki dalga boyu üzerinden olan değişimin, momentumun kendisi ile karşılaştırıldığında daha küçük olması gerektiğini gösterir. Yani:

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad \lambda(x) \left| \frac{dp}{dx} \right| \ll |p(x)| \quad (2.2.17)$$

Özellikle Schrödinger denkleminin çözümlerindeki örnekleme detaylı şekilde Ek-A da inceleyeceğiz. Şimdi $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ nin hesaplanmasına geri dönelim. Eğer kapalı

Robertson–Walker evreninin yeterince yavaş genişlediğini düşünürsek WKB yaklaşım yöntemine göre denklem (2.1.53)'in çözümü [Anderson ve Parker, 1987]:

$$\Psi = (2W)^{-1/2} \exp\left[-i \int W d\eta\right] \quad (2.2.18)$$

Şeklinde yazabiliriz. Bu çözümü (2.1.53) de yerine koyup düzenlersek:

$$W^2 = \omega^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{W''}{W} - \frac{3}{2} \frac{(W')^2}{W^2} \right] \quad (2.2.19)$$

buluruz. Bu bize W 'nın nasıl çalışması gerektiğini söylüyor. W 'yı saydırmak için denklem (2.2.19) den yararlanacağız. W için:

$$\left[W^{(1)} \right]^2 = \omega^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\left[W^{(0)} \right]''}{W^{(0)}} - \frac{3}{2} \frac{\left[\left(W^{(0)} \right)' \right]^2}{\left[W^{(0)} \right]^2} \right] \quad (2.2.20)$$

$$\left[W^{(2)} \right]^2 = \omega^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\left[W^{(1)} \right]''}{W^{(1)}} - \frac{3}{2} \frac{\left[\left(W^{(1)} \right)' \right]^2}{\left[W^{(1)} \right]^2} \right] \quad (2.2.21)$$

Hatta $W^{(3)}$, $W^{(4)}$ gibi devam edebiliriz ama çözümümüzde adyabatik derecesi dörtten yükseklere ihtiyacımız olmadığı için $W^{(2)}$ de kestik. Denklem (2.2.20) de $W^{(0)} = \omega$ dir. Denklem (2.1.63) ve (2.1.64) deki beklenen değerleri hesaplamak için $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ ifadelerini bulmamız gerekli. Bunlar için denklem (2.2.18) den yararlanarak, gerekli işlemler yapıldığında:

$$|\Psi'_k|^2 = \Psi'_k \Psi'^*_k = \frac{W'^2}{8W^3} + \frac{W}{2} \quad (2.2.22)$$

$$|\Psi_k|^2 = \Psi_k \Psi_k^* = \frac{1}{2W} \quad (2.2.23)$$

dır. W 'i elde etmek için denklem (2.2.20), (2.2.21) den yararlanacağız. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra:

$$\begin{aligned} W^{(1)} = & \omega - \frac{m^2}{4\omega^3} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{5m^4}{8\omega^5} (a\dot{a})^2 - \frac{m^4}{32\omega^7} (\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 \\ & + \frac{5m^6}{32\omega^9} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{25m^8}{128\omega^{11}} (a\dot{a})^4 + O\left(\frac{1}{T^p}; p \geq 6\right) \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} W^{(2)} = & \omega - \frac{m^2}{4\omega^3} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{5m^4}{8\omega^5} (a\dot{a})^2 \\ & + \frac{m^2}{16\omega^5} (3\ddot{a}^2 + 4\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \\ & - \frac{m^4}{32\omega^7} \left[19(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 28(a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \\ & + \frac{442m^6}{64\omega^9} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{1105m^8}{128\omega^{11}} (a\dot{a})^4 + O\left(\frac{1}{T^p}; p \geq 6\right) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Şeklinde birinci ve ikinci mertebeden W 'ya gelen katkıları göstermektedir. $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ bulmak için $W^{(2)}$ 'in gerekli işlemlerini yaparsak:

$$W^{(2)'} = \frac{m^2 (a\dot{a})}{\omega} \left\{ 1 - \frac{3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\ddot{a}}}{(a\dot{a})} + \frac{16m^2 (a\dot{a})(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{8\omega^4 (a\dot{a})} - \frac{25m^4 (a\dot{a})^3}{8\omega^6 (a\dot{a})} \right\} \quad (2.2.26)$$

$$\begin{aligned}
\left[W^{(2)'} \right]^2 &= \frac{m^4}{\omega^2} (a\dot{a})^2 (1+t)^2 \\
&= \frac{m^4}{\omega^2} (a\dot{a})^2 - \frac{m^4}{2\omega^2} (a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}) \\
&\quad + \frac{16m^6}{4\omega^6} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{25m^8}{4\omega^8} (a\dot{a})^4
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Burada t :

$$t = -\frac{3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}}{(a\dot{a})} + \frac{16m^2}{8\omega^4} \frac{(a\dot{a})(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{(a\dot{a})} - \frac{25m^4}{8\omega^6} \frac{(a\dot{a})^3}{(a\dot{a})} \tag{2.2.28}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\left[W^{(2)} \right]^{-3} &= \frac{1}{\omega^3} \left[1 + \frac{3m^2}{4\omega^4} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{15m^4}{8\omega^6} (a\dot{a})^2 - \frac{3m^2}{16\omega^6} (3\ddot{a}^2 + 4\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^4}{32\omega^8} \left\{ 69(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 84(a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1446m^6}{64\omega^{10}} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{3615m^8}{128\omega^{12}} (a\dot{a})^4 \right]
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

buluruz. Bu ifadeleri $|\Psi'_k|^2$ ve $|\Psi_k|^2$ de yerlerine yazarsak:

$$\begin{aligned}
|\Psi'_k|^2 &= \frac{\omega}{2} - \frac{m^2}{8\omega^3} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{7m^4}{16\omega^5} (a\dot{a})^2 + \frac{m^2}{32\omega^5} (3\ddot{a}^2 + 4\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}) \\
&\quad - \frac{m^4}{64\omega^7} \left[19(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 32(a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\dot{a}}) \right] \\
&\quad + \frac{259m^6}{64\omega^9} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{1365m^8}{256\omega^{11}} (a\dot{a})^4
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_k|^2 = \frac{1}{2\omega} & \left\{ 1 + \frac{m^2}{4\omega^4} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{5m^4}{8\omega^6} (a\dot{a})^2 - \frac{m^2}{16\omega^6} (3\ddot{a}^2 + 4\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right. \\
& + \frac{m^4}{32\omega^8} \left[21(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 28(a\dot{a})(3\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \\
& \left. - \frac{462m^6}{64\omega^{10}} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{1155m^8}{128\omega^{12}} (a\dot{a})^4 \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Dördüncü dereceden adyabatik yaklaşıma sahip terimleri buluruz. Bu ifadeleri $\langle 0|T^0_0|0\rangle$ ve $\langle 0|T|0\rangle$ beklenen değerlerindeki yerine yazıp ve gerekli işlemleri yapıp düzenlersek

$$\begin{aligned}
\langle 0|T^0_0|0\rangle_A = \frac{1}{4\pi^2 a^4} \int d\mu(k) & \left(\omega + \frac{2m^4}{16\omega^5} (a\dot{a})^2 \right. \\
& + \frac{m^4}{64\omega^7} \left[2(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 - 4(a\dot{a})(3\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \\
& \left. + \frac{56m^6}{128\omega^9} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{210m^8}{256\omega^{11}} (a\dot{a})^4 \right)
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|T|0\rangle_A = \frac{1}{4\pi^2 a^4} \int d\mu(k) & \left(\frac{m^2 a^2}{\omega} + \frac{m^4 a^2}{4\omega^5} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{5m^6 a^2}{8\omega^7} (a\dot{a})^2 \right. \\
& + \frac{m^4 a^2}{16\omega^7} (3\ddot{a}^2 + 4\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \\
& + \frac{m^6 a^2}{32\omega^9} \left[21(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 28(a\dot{a})(3\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \\
& \left. - \frac{462m^8 a^2}{64\omega^{11}} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{1155m^{10} a^2}{128\omega^{13}} (a\dot{a})^4 \right)
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Terimlerini elde ederiz. Yavaşça genişleyen kapalı Robertson–Walker evreni için boşluk enerji-momentumun beklenen değerlerindeki regülarizasyon terimlerini elde etmiş oluruz. Denklem (2.2.32) ve (2.2.33) deki integraller denklem (2.1.65) den yararlanarak yazıldığında:

$$\begin{aligned} \langle 0|T^0_0|0\rangle_u &= \frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_k k^2 \left(\omega + \frac{2m^4}{16\omega^5} (a\dot{a})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^4}{64\omega^7} \left[2(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 - 4(a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{56m^6}{128\omega^9} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{210m^8}{256\omega^{11}} (a\dot{a})^4 \right) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T|0\rangle_u &= \frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_k k^2 \left(\frac{m^2 a^2}{\omega} + \frac{m^4 a^2}{4\omega^5} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - \frac{5m^6 a^2}{8\omega^7} (a\dot{a})^2 \right. \\ &\quad \left. + -\frac{m^4 a^2}{16\omega^7} (3\ddot{a}^2 + 4\dot{a}\ddot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^6 a^2}{32\omega^9} \left[21(\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 + 28(a\dot{a})(3\ddot{a}\dot{a} + a\ddot{\ddot{a}}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{462m^8 a^2}{64\omega^{11}} (a\dot{a})^2 (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + \frac{1155m^{10} a^2}{128\omega^{13}} (a\dot{a})^4 \right) \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

denklemlerine dönüşür. Bu enerji – momentum değerlerini hesaplamak için Plana toplam formülünü kullanacağız. Plana toplam formülü [Whittaker ve Watson, 1927]:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 + m^2 a^2)^{n/2}} &= \int_0^{\infty} \frac{dkk^2}{(k^2 + m^2 a^2)^{n/2}} - \int_0^1 \frac{dkk^2}{(k^2 + m^2 a^2)^{n/2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 + m^2 a^2)^{-n/2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{dtq(t)}{e^{2\pi t} - 1} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

$$q(t) = \frac{1}{2i} \left[\frac{(1+it)^2}{\left[(1+it)^2 + m^2 a^2 \right]^{n/2}} - \frac{(1-it)^2}{\left[(1-it)^2 + m^2 a^2 \right]^{n/2}} \right] \quad (2.2.37)$$

şeklinde verilir. Plana toplam formülü $n = -1,1$ değerleri için ıraksıyor. Denklem (2.2.34) ve (2.2.35) deki toplama Plana toplam kuralını sırasıyla uyguladığımızda karşımıza $n \neq -1,1$ değerler için:

$$\int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(k^2 + m^2 a^2)^{n/2}} = (ma)^{3-n} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (2.2.38)$$

integralleri çıkar. $n = -1,1$ değerleri için gelen sonsuzlukları Einstein denklemindeki kozmolojik sabitin içine atarız. Geride kalan sonlu ifadeleri denklem (2.2.38) den yararlanarak hesapladığımızda, $m \rightarrow 0$ durumunda kütleli konformal skaler alanın beklenen enerji-momentumundaki sonsuzluklara sebep olan terimler:

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle_A = \frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[-\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}^2}{2a^2} + \frac{2\dot{a}\ddot{a}^2}{a^3} - \frac{\dot{a}^4}{2a^4} \right] \quad (2.2.39)$$

$$\langle 0|T|0\rangle_A = \frac{1}{480\pi^2} \left[-\frac{\ddot{\ddot{a}}}{a^5} + \frac{4\ddot{a}\dot{a}}{a^6} + \frac{3\ddot{a}^2}{a^6} - \frac{8\dot{a}\ddot{a}^2}{a^7} + \frac{2\dot{a}^4}{a^4} \right] \quad (2.2.40)$$

Şeklinde elde edilir. Çok yavaş genişleyen kapalı Robertson-Walker evrenindeki kütleli konformal skaler alanın enerji-momentumun beklenen değerleri yüksek frekanslı modların katkılarının içerdiğinden Einstein evrenindeki enerji ifadesinden bu sonsuzlukları yani adyabatik regülarize edilmiş terimleri çıkartarak kütleli konformal skaler alanın yavaşça genişleyen Einstein evrenindeki renormalize edilmiş sonlu enerji-momentum büyüklüklerini elde ederiz. Einstein evrenindeki kütleli konformal skaler alanın enerji yoğunluğu,

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle_u = \frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \quad (2.2.41)$$

dir. Adyabatik regülarize yöntemi ile regülarize edilmiş kütleless konformal skaler alanın renormalize edilmiş enerji-momentum ifadeleri:

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle_{ren} = \frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 - \langle 0|T^0_0|0\rangle_A \quad (2.2.42)$$

$$\langle 0|T|0\rangle_{ren} = -\langle 0|T|0\rangle_A \quad (2.2.43)$$

şeklinde verilir. Bunun için Einstein evrenindeki kütleless konformal skaler alanın enerji yoğunluğu olan (2.2.41) denklemindeki ifadeleri kullanarak renormalize edilmiş enerji yoğunluğunu bulalım. Euler-Mclaurin formülü

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(i) &= \int_0^n f(x) dx - B_1 [f(n) + f(0)] \\ &+ \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{2k-1}(n) - f^{2k-1}(0)] + R_{artik terim} \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$\frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} k^3 e^{-\alpha k} \quad (2.2.45)$$

dır. Burada B_{2k} ve B_1 Bernoulli sayılarıdır. Bernoulli sayıları $B_n = B_n(0)$ ifadesi ile bulunur. $f^{2k-1}(n)$ ifadesi fonksiyonun $2k-1$ kere türevi demektir. Denklem (2.2.45)'e denklem (2.2.44) deki gerekli işlemler yapıldığında:

$$\frac{1}{4\pi^2 a^4} \sum_{k=1}^{\infty} k^3 = \frac{1}{480\pi^2 a^4} \quad (2.2.46)$$

buluruz. Son olarak denklem:

$$\langle 0|T^0_0|0\rangle_{ren} = \frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[1 + \frac{\ddot{a} \dot{a}}{a^2} - \frac{\ddot{a}^2}{2a^2} - \frac{2\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} + \frac{\dot{a}^4}{2a^4} \right] \quad (2.2.47)$$

$$\langle 0|T|0\rangle_{ren} = -\frac{1}{480\pi^2 a^4} \left[-\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\ddot{a} \dot{a}}{a^2} + \frac{3\ddot{a}^2}{a^2} - \frac{8\ddot{a}\dot{a}^2}{a^3} + 2\dot{a}^4 \right] \quad (2.2.48)$$

Buraya kadar 1987 de Paul R. Anderson ve Leonard Parker tarafından yapılan çalışmayı inceledik. Daha sonra 1999 da Paul R. Anderson ve Wayne Eaker 1987 de yapılan çalışmayı ilerletmek için kuantum vakum enerji-momentum tensör hesaplamalarını farklı bir analitik yaklaşım ile elde etmeye çalıştılar. Denklem (2.2.32) ve (2.2.33)'e kadar olan hesaplar aynıdır. Bu farklı yaklaşım daha önceden de elde ettiğimiz denklem (2.2.33) den yararlanarak k nın büyük değerleri (yüksek frekansına karşılık gelir) için kuvvet serisine açtığımız zaman elde edilir [Anderson ve Eaker, 2000]. $n = -1,1$ terimlerindeki regülarizasyon edilemeyen sonsuzluklar yüksek frekansların temsili ile renormalize edilmiştir.

Adyabatik regülarizasyon yöntemi ile elde ettiğimiz enerji-momentum tensörünün beklenen değerleri Einstein denkleminde türetilen geometrik terimlerin düzenlenmesiyle yeniden:

$$\langle T \rangle_{an} = \frac{1}{2880\pi^2} \left(-\frac{1}{6} {}^{(1)}H_\mu{}^\mu + {}^{(3)}H_\mu{}^\mu \right) + \frac{m^2}{288\pi^2} G_\mu{}^\mu - \frac{m^4}{16\pi^2} \left[1 + \log \left(\frac{\mu^2 a^2}{4\lambda^2} \right) + (2C + \log \lambda^2) \right] \quad (2.2.49)$$

şeklinde elde edilir [Anderson ve Eaker, 2000]. Bu denklemdeki logaritmik terimler çok küçük kütleli konformal skaler alanın getireceği katkıları göstermektedir. Burada ${}^{(1)}H_\mu{}^\mu$, ${}^{(3)}H_\mu{}^\mu$ ve $G_\mu{}^\mu$ detaylı olarak Ek-B çıkartılmıştır.

Kütlesiz konformal skaler alanın renormalize edilmiş enerji-momentum tensörü gerizemindeki geometrinin tensör büyüklükleri cinsinden

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle_{an} = \frac{1}{2880\pi^2} \left(-\frac{1}{6} {}^{(1)}H_{\mu}^{\mu} + {}^{(3)}H_{\mu}^{\mu} \right) \quad (2.2.50)$$

elde edilir [Anderson ve Eaker, 2000].

3. SONUÇ

Bu çalışmada yavaşça genişleyen kapalı Robertson–Walker uzay-zamanda kuantize edilmiş kütsüz konformal skaler alanın enerji-momentum tensörlerini adyabatik regülarizasyon yöntemi ile yeniden elde edilmiştir. Yavaşça genişleyen Einstein evrenine bu çalışmada kapalı Robertson–Walker evreni karşılık gelmektedir. Mod fonksiyonun η 'ya bağlı çözümlerini veren denklem Einstein geometrisinin yavaşça genişlemesi düşüncesinden hareketle WKB yaklaşım yöntemi ile çözüldü. Bu çözümler enerji–momentum beklenen değerinde kullanıldığında yavaşça genişleyen Einstein evreninin kütsüz konformal skaler alanın enerji yoğunluğundaki sonsuzlukları içermektedir. Diğer bir deyişle enerji–momentum tensörünün adyabatik boşluk durumu WKB yaklaşıklık yönteminin kullanımı ile tanımlanmıştır. WKB yaklaşımı kuantum alanlarının yüksek frekanslardaki davranışlarını temsil eder. Bu nedenle Einstein evreninde kütsüz konformal skaler alanın enerji yoğunluğu sonsuzlukları çıkartıldığında geriye kalan terimler yavaşça genişleyen Einstein evrenindeki kütsüz konformal skaler alanın kuantum yeniden normalleştirilmiş boşluk enerjisini verir. Einstein denkleminin sol tarafı geometrik terimlerden oluştuğundan burada sağdaki enerji-momentum tensör büyüklüğünü kütsüz konformal skaler alan için ürettiği kuantize boşluk enerjisi geometrik terimler ile (Ricci tensör ve Einstein tensör) yeniden yazılmıştır [Parker ve Eaker, 2000]. Burada renormalize edilmiş kütsüz konformal skaler alanın yavaşça genişleyen Einstein evrenindeki enerji–momentum tensör ve bileşenleri daha önce boyutsal regülarizasyon (dimensional regularization) ve değişmez nokta ayrıştırma yöntemi ile (covariant point splitting) elde edilen sonuçlar büyük bir uyum içerisindedir.

Kütle çekim alanı ile kuantum alanların etkileşiminden çıkan fiziksel olayların anlaşılması bilgisini taşıyan enerji–momentum tensör büyüklükleri ıraksak bir yapıdadır. Bu sonsuz yapılardan kurtulup sonlu fiziksel anlama sahip ifadeler elde edilmesinde adyabatik regülarizasyon yöntemi önemli bir yere sahiptir.

KAYNAKLAR

Anderson Paul R ve **Parker** Leonard, 1987, “Adiabatic regularization in closed Robertson–Walker Universes” Phys. Rev. D 36, 2963

Abramovitz M., **Stegun** I.2.2., 1972, “Handbook Of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables” U.S. Government Printing Office

Bell W.W., 1968, “Special Functions For Scientists And Engineers” D. Van Nostrand Company Ltd.

Birrell N.D., **Davies** P.C.W., 1982, “Quantum Fields In Curved Space” Cambridge University Press

E.T. **Whittaker** ve G.N. **Watson**, 1927, “A Course Of Modern Analysis” Cambridge University Pres London p. 145

George B. **Arfken** ve **Hans** J. Weber, 2005, “Mathematical Method of Physicists

Hassani Sadri, 1998, “Mathematical Physics” Springer – Verlag New York

H.B.G. **Casimir**, 1948, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet., 51,793

Jeffreys Harold, 1962, “Asymptotic Approximations” Oxford At The Clarendon Pres

Mustafa **Özcan**, 2005, Phy. Letters A 344, 307

Merzbacher Eugen, 1961, “Quantum Mechanics” John Wiley & Sons Inc

Mustafa **Özcan**, 2006, Class. Quantum Gravity 23, 5531

Mustafa **Özcan**, 1991, “Quantum Vacuum Energy for Massless Conformal Scalar Field in Einstein and Closed Friedman Universes” A master of thesis in Physics, METU

Paul R. **Anderson** ve Wayne **Eaker**, 2000, Phys Rev. D 61, 024003

S.S. **Bayin** ve Mustafa **Özcan**, 1994, Phys. Rev. D 49, 5313

T.H. **Boyer**, 1968, Phys. Rev. 174, 1764

Weinberg Steven, 1971, “Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity” John Wiley & Sons Inc

Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/WKB_approximation

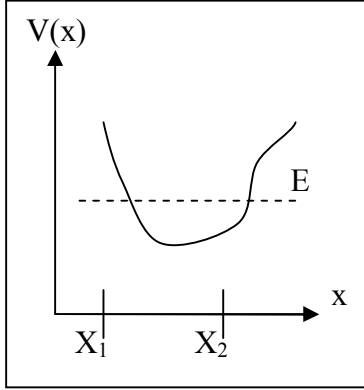
ÖZGEÇMİŞ

Hüsnü Eşiyok 1985’de İstanbul da doğdu. Tercüman Kolejinde bir yıl İngilizce eğitimi aldı. Daha sonra lise eğitimini tamamlamak için 2000 yılında İstek Vakfı Kaşgarlı Mahmut Lisesine kaydını yaptırdı. Öğrenim hayatına 2003 yılında girmeye hak kazandığı Trakya Üniversitesi Fizik Bölümü’nde devam etti. Lisans eğitiminin ardından askerliğini Şırnak’ın Akçay Tugayına bağlı Seslice Taburunda Asteğmen olarak icra etti. Vatani görevinin son bulmasıyla 2009 yılının kışında Kelime DOĞAN ile dünya evine girdi. Halen Trakya Üniversitesi Fizik Bölümü Yüksek Enerji Ana Bilim Dalında yüksek lisans yapmaktadır.

Ek-A Tek Boyutta Schrödinger Denkleminin WKB Yöntemi İle Çözümleri

Şimdi Schrödinger denklemini bir boyutta çözmeye çalışalım:

$$\frac{d^2}{dx^2} y + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) y = 0 \quad (\text{A.1})$$



$E > V(x)$ için:

$$q(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \quad (\text{A.2})$$

$E < V(x)$ için:

$$k(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \quad (\text{A.3})$$

dır.

O halde bölgelere göre dalga denklemini çözümlerimiz:

$$x < x_1 \text{ ise:} \quad y_I = \frac{C_1}{[k(x)]^{1/4}} \exp\left[\int \sqrt{k(x)} dx\right] \quad (\text{A.4})$$

$$x_1 < x < x_2 \text{ ise:} \quad y_{II} = \frac{\left\{ C_2 \exp\left[i \int \sqrt{q(x)} dx\right] + C_2' \exp\left[-i \int \sqrt{q(x)} dx\right] \right\}}{[q(x)]^{1/4}} \quad (\text{A.5})$$

$$x > x_2 \text{ ise:} \quad y_{III} = \frac{C_3}{[k(x)]^{1/4}} \exp\left[-\int \sqrt{k(x)} dx\right] \quad (\text{A.6})$$

olur. Bu çözümlerin kendileri ve türevleri $x = x_1$ ve $x = x_2$ noktalarında sürekli olmak zorundadır. Bu nedenle potansiyeli $x = x_1$ ve $x = x_2$ civarında Taylor serisine açıp birden büyük terimleri ihmal ettiğimizde:

$$V(x) = E - K_1(x - x_1) \quad \rightarrow \quad V(x) - E = -K_1(x - x_1) \quad (\text{A.7})$$

$$V(x) = E + K_2(x - x_2) \quad \rightarrow \quad V(x) - E = K_2(x - x_2) \quad (\text{A.8})$$

(A.7) ve (A.8) denklemini elde ederiz. $x = x_1$ ve $x = x_2$ nin komşuluklarında nasıl davrandıklarını bulabilmek için (A.1) denkleminde $E - V(x)$ yerine yazarsak:

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi + \frac{2m}{\hbar^2} K_1(x - x_1) \phi = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi - \frac{2m}{\hbar^2} K_2(x - x_2) \phi = 0 \quad (\text{A.10})$$

olur. Burada (A.9) denklemini için:

$$z = -\left(\frac{2m}{\hbar^2} K_1\right)^{\frac{1}{3}} (x - x_1) \quad (\text{A.11})$$

tanımlayalım. Ve (A.10) denklemini için de:

$$z = \left(\frac{2m}{\hbar^2} K_2\right)^{\frac{1}{3}} (x - x_2) \quad (\text{A.12})$$

tanımlayalım. Sonra (A.11) ve (A.12) tanımlamaları altında (A.9) ve (A.10) denklemlerini yeniden yazarsak.

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{2m}{\hbar^2} K\right)^{\frac{2}{3}} \frac{d^2}{dz^2} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \phi - z \phi = 0 \quad (\text{A.14})$$

halini alır. (A.14) denkleminin çözümleri Airy Functions'dır. Çözümleri asimptotik $Ai(z)$ ve $Bi(z)$ 'dir. Burada $Ai(z)$ ve $Bi(z)$ şöyle tanımlanmıştır [Abramovitz ve Stegun, 1972].

$$(3a)^{-1/3} \pi Ai\left(\pm(3a)^{-1/3} x\right) = \int_0^{\infty} \cos(at^3 \pm xt) dt \quad (\text{A.15})$$

$$(3a)^{-1/3} \pi Bi\left(\pm(3a)^{-1/3} x\right) = \int_0^{\infty} \left[\exp(-at^3 \pm xt) + \sin(at^3 \pm xt) \right] dt \quad (\text{A.16})$$

(A.15) ve (A.16) denklemlerinde $a = \frac{1}{3}$ ve $x = z$ alırsak denklemler:

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} \pm zt\right) dt \quad (\text{A.17})$$

$$Bi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} \pm zt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} \pm zt\right) \right] dt \quad (\text{A.18})$$

olur. (A.17) ve (A.18) denklemlerinin pozitif büyük ($|z|$) değerleri için:

$$Ai(z) \cong \frac{1}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} e^{-\zeta} \quad (\text{A.19})$$

$$Bi(z) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} e^{\zeta} \quad (\text{A.20})$$

$$\zeta = \frac{2}{3} |z|^{3/2} \quad (\text{A.21})$$

olur. (A.17) ve (A.18) denklemlerinin negatif büyük ($|z|$) değerleri için:

$$Ai(z) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi} |z|^{1/4}} \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.22})$$

$$Bi(z) \cong -\frac{1}{\sqrt{\pi} |z|^{1/4}} \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.23})$$

olur. (A.2) ve (A.3) denklemlerini birbirine eşitleyip gerekli işlemlerden sonra:

$$q(x) = -k(x) = \frac{2m}{\hbar^2} K_1(x - x_1) = -\left(\frac{2m}{\hbar^2} K_1\right)^{2/3} z \quad (\text{A.24})$$

olur. Yaptığımız işlemlerin nedeni (A.4), (A.5) ve (A.6) deki denklemleri Airy Functions'lara benzeterek çözmektir. O halde:

$$\int_{x_1}^x \sqrt{k} dx = \left(\frac{2m}{\hbar^2} K_1\right)^{1/3} \int_{x_1}^x \sqrt{z} dx = -\frac{2}{3} z^{3/2} \quad (\text{A.25})$$

$$\int_{x_1}^x \sqrt{q} dx = \left(\frac{2m}{\hbar^2} K_1\right)^{1/3} \int_{x_1}^x \sqrt{-z} dx = \frac{2}{3} (-z)^{3/2} \quad (\text{A.26})$$

olur. (A.4) ve (A.5) denklemlerini Airy Functions ile karşılaştırdığımız zaman:

$$x < x_1 \quad \text{için} \quad y_I = \frac{C_1}{[k(x)]^{1/4}} \exp\left[\int_{x_1}^x \sqrt{k} dx\right] \quad (\text{A.27})$$

$$x_1 < x \quad \text{için} \quad y_{II} = \frac{2C_1}{(q(x))^{1/4}} \sin\left(\int_{x_1}^x \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.28})$$

olur. (A.5) ve (A.6) denklemlerini Airy Functions ile karşılaştırdığımız zaman:

$$x > x_2 \quad \text{için} \quad y_{III} = \frac{C_3}{[k(x)]^{1/4}} \exp\left[-\int \sqrt{k(x)} dx\right] \quad (\text{A.29})$$

$$x < x_2 \quad \text{için} \quad y_{II} = \frac{2C_3}{(q(x))^{1/4}} \sin\left(\int_x^{x_2} \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.30})$$

(A.28) ve (A.30) denklemini birbirine eşitlersek:

$$\sin\left(\int_{x_1}^x \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{C_3}{C_1} \sin\left(\int_x^{x_2} \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.31})$$

$$\int_{x_1}^x = \int_{x_1}^{x_2} - \int_x^{x_2} \quad (\text{A.32})$$

(A.32) eşitliğini (A.31) eşitliğinin sol tarafında kullanırsak denklem:

$$\sin\left(\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q} dx - \int_x^{x_2} \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{C_3}{C_1} \sin\left(\int_x^{x_2} \sqrt{q} dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A.33})$$

Burada eşitliğin sağlanabilmesi için:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2} \quad (\text{A.34})$$

olur ve burada $n : 0, 1, 2, \dots$ dır

EK-B Robertson - Walker Evreninde Bazı Geometrik Tansörler

Ricci skalerini [Weinberg, 1971] bulmak için:

$$R = g^{ab} R_{ab} \quad a, b \rightarrow \begin{cases} 0, 1, 2, 3 \\ \eta, \chi, \theta, \phi \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$R_{ab} = \Gamma_{\alpha a, b}^{\alpha} - \Gamma_{ab, \alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda b}^{\alpha} \Gamma_{\alpha a}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda \alpha}^{\alpha} \Gamma_{ba}^{\lambda} \quad (\text{B.2})$$

$$[pq, r] = \frac{1}{2} [g_{qr, p} + g_{rp, q} - g_{pq, r}] \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{pq}^i \equiv \begin{Bmatrix} i \\ pq \end{Bmatrix} = g^{ir} [pq, r] = \frac{g^{ir}}{2} [g_{qr, p} + g_{rp, q} - g_{pq, r}] \quad (\text{B.4})$$

$$A_{ij, k} = \frac{\partial}{\partial x^k} A_{ij} \quad i, p, q, j, k \rightarrow \begin{cases} 0, 1, 2, 3 \\ \eta, \chi, \theta, \phi \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

denklemlerini kullanacağız. Denklem (B.2) Ricci Tensörüdür, buda Riemann tensöründen elde edilir. Denklem (B.3) ve (B.4) sırasıyla, Christoffel sembollerinin birinci ve ikinci türüdür. Denklem (B.1) ün açık halini yazarsak:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \quad (\text{B.6})$$

elde ederiz. Burada R_{00} , R_{11} , R_{22} ve R_{33} ü denklem (B.2) ve (B.4) den yararlanarak tek tek bulmamız gerekiyor. O halde R_{00} için denklem (B.2) den yararlanırsak:

$$R_{00} = \Gamma_{\alpha 0, 0}^{\alpha} - \Gamma_{00, \alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda 0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda \alpha}^{\alpha} \Gamma_{00}^{\lambda} \quad (\text{B.7})$$

elde ederiz. Denklem (B.7) da $\alpha : 0, 1, 2, 3$ için saydırırsak:

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 + \Gamma_{\lambda 0}^0 \Gamma_{00}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda 0}^0 \Gamma_{00}^{\lambda} + \Gamma_{10,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{\lambda 0}^1 \Gamma_{10}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda 1}^1 \Gamma_{00}^{\lambda} \\
& + \Gamma_{20,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 + \Gamma_{\lambda 0}^2 \Gamma_{20}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda 2}^2 \Gamma_{00}^{\lambda} + \Gamma_{30,0}^3 - \Gamma_{00,3}^3 + \Gamma_{\lambda 0}^3 \Gamma_{30}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda 3}^3 \Gamma_{00}^{\lambda}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

olur. Bu sefer, denklem (B.8) yi $\lambda : 0, 1, 2, 3$ için saydırırsak:

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 \\
& + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{20}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{30}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{00}^3 \\
& + \Gamma_{10,0}^1 - \Gamma_{00,1}^1 \\
& + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{10}^3 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{00}^3 \\
& + \Gamma_{20,0}^2 - \Gamma_{00,2}^2 \\
& + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{20}^3 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{00}^3 \\
& + \Gamma_{30,0}^3 - \Gamma_{00,3}^3 \\
& + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^3 \Gamma_{30}^1 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{20}^3 \Gamma_{30}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{00}^3
\end{aligned} \tag{B.9}$$

elde ederiz. Ve aynı işlemleri R_{11} , R_{22} ve R_{33} içinde yaparsak:

$$\begin{aligned}
R_{11} = & \Gamma_{01,1}^0 - \Gamma_{11,0}^0 \\
& + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^0 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^0 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{11}^3 \\
& + \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{11,1}^1 \\
& + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 \\
& + \Gamma_{21,1}^2 - \Gamma_{11,2}^2 \\
& + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{21}^3 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{11}^3 \\
& + \Gamma_{31,1}^3 - \Gamma_{11,3}^3 \\
& + \Gamma_{01}^3 \Gamma_{31}^0 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{31}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} = & \Gamma_{02,2}^0 - \Gamma_{22,0}^0 \\
& + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{12}^0 \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^0 \Gamma_{02}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{22}^3 \\
& + \Gamma_{12,2}^1 - \Gamma_{22,1}^1 \\
& + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{22}^3 \\
& + \Gamma_{22,2}^2 - \Gamma_{22,2}^2 \\
& + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{22}^3 \\
& + \Gamma_{32,2}^3 - \Gamma_{22,3}^3 \\
& + \Gamma_{02}^3 \Gamma_{32}^0 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{32}^1 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{32}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{22}^3
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = & \Gamma_{03,3}^0 - \Gamma_{33,0}^0 \\
& + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{03}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{13}^0 \Gamma_{03}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^0 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{33}^3 \\
& + \Gamma_{13,3}^1 - \Gamma_{33,1}^1 \\
& + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{33}^3 \\
& + \Gamma_{23,3}^2 - \Gamma_{33,2}^2 \\
& + \Gamma_{03}^2 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{23}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{32}^2 \Gamma_{33}^3 \\
& + \Gamma_{33,3}^3 - \Gamma_{33,3}^3 \\
& + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3
\end{aligned} \tag{B.12}$$

buluruz. Denklem (B.4) ve (B.5) den yararlanarak gerekli olan Christoffel Sembollerinin bazılarını hesaplırsak:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 = & \frac{g^{0r}}{2} [g_{2r,2} + g_{r2,2} - g_{22,r}] \quad r=0 \quad \text{için değer var.} \\
= & -\frac{1}{2a^2} \frac{d}{d\eta} (-a^2 \sin^2 \chi) \\
= & \frac{\dot{a}}{a} \sin^2 \chi
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{10}^1 = & \frac{g^{1r}}{2} [g_{0r,1} + g_{r1,0} - g_{10,r}] \quad r=1 \quad \text{için değer var.} \\
= & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a^2} \right) \frac{d}{d\eta} (-a^2) \\
= & \frac{\dot{a}}{a}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Benzer şekilde diğerlerini de hesapladığımızda:

$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}}{a}$	$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$	$\Gamma_{22}^0 = \frac{\dot{a} \sin^2 \chi}{a}$	$\Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{a} \sin^2 \chi \sin^2 \theta}{a}$
$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}$	$\Gamma_{22}^1 = -\sin \chi \cos \chi$	$\Gamma_{33}^1 = -\sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi$	$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}$
$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$	$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{\cos \chi}{\sin \chi}$	$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos \chi}{\sin \chi}$

buluruz. Diğer Christoffel Sembolleri sıfırdır. Eğer tablodan yararlanarak gerekli Christoffel Sembollerini denklem (B.9), (B.10), (B.11) ve (B.12) de yerlerine koyarsak gerekli düzenlemelerden sonra:

$$R_{00} = 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$R_{11} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) - 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2 \quad (\text{B.16})$$

$$R_{22} = -\sin^2 \chi \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \right) \quad (\text{B.17})$$

$$R_{33} = -\sin^2 \chi \sin^2 \theta \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \right) \quad (\text{B.18})$$

buluruz. Bulduğumuz bu denklemleri denklem (B.6) de yerine koyup düzenlersek:

$$R = \frac{6}{a^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 1 \right) \quad (\text{B.19})$$

Ricci skalerini bulmuş oluruz. Hesaplarımızda kullanacağımız başka tensörlerde denklem (B.20) ve (B.21) deki gibidir.

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = 2R_{,\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\square R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2RR_{,\mu\nu} \quad (\text{B.20})$$

$${}^{(3)}H_{\mu\nu} = R_{\mu}{}^{\rho}R_{\rho\nu} - \frac{2}{3}RR_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}g_{\mu\nu} + \frac{1}{4}R^2g_{\mu\nu} \quad (\text{B.21})$$

Denklem (B.20) ve (B.21) de $\mu, \nu \rightarrow 0$ yazıp, sağdan g^{00} ile çarparsak:

$${}^{(1)}H_0^0 = 2R_{,00}g^{00} - 2\square R - \frac{1}{2}R^2 + 2RR_{,00}g^{00} \quad (\text{B.22})$$

$${}^{(3)}H_0^0 = R_0{}^{\rho}R_{\rho 0}g^{00} - \frac{2}{3}RR_{,00}g^{00} - \frac{1}{2}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}R^2 \quad (\text{B.23})$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu denklemlerde kullanacağımız bazı ifadeleri verirsek:

$$A_{,\mu\nu} = A_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{,\alpha} \quad (\text{B.24})$$

$$A_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A \quad (\text{B.25})$$

dir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra ${}^{(1)}H_0^0$ ve ${}^{(3)}H_0^0$:

$${}^{(1)}H_0^0 = -\frac{36\ddot{a}\dot{a}}{a^6} + \frac{72\ddot{a}\dot{a}^2}{a^7} + \frac{18\ddot{a}^2}{a^6} + \frac{36\dot{a}}{a^6} - \frac{18}{a^4} \quad (\text{B.26})$$

$${}^{(3)}H_0^0 = \frac{3\dot{a}^4}{a^8} + \frac{6\dot{a}^2}{a^6} + \frac{3}{a^4} \quad (\text{B.27})$$

bulunur. Bu sefer denklem (B.20) ve (B.21)'i sağdan $g^{\mu\nu}$ ile çarparsak ve gerekli işlemleri yapıp düzenlediğimizde:

$${}^{(1)}H_{\mu}{}^{\mu} = -\frac{36\ddot{a}}{a^5} + \frac{144\ddot{a}\dot{a}}{a^6} - \frac{216\ddot{a}\dot{a}^2}{a^7} + \frac{108\ddot{a}^2}{a^6} + \frac{72\ddot{a}}{a^5} - \frac{72\dot{a}^2}{a^6} \quad (\text{B.28})$$

$${}^{(3)}H_{\mu}{}^{\mu} = \frac{12\ddot{a}\dot{a}^2}{a^7} - \frac{12\dot{a}^2}{a^8} + \frac{12\ddot{a}}{a^5} - \frac{12\dot{a}^2}{a^6} \quad (\text{B.29})$$

bulunur. Einstein tansörü ise denklem (B.30) daki gibi verilir.

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (\text{B.30})$$

Bu tansör içinde benzer şekilde işlemleri yapıp düzenlediğimizde:

$$G_0^0 = -\frac{3\dot{a}^2}{a^4} - \frac{3}{a^2} \quad (\text{B.31})$$

$$G_{\mu}{}^{\mu} = -\frac{6\ddot{a}}{a^3} - \frac{6}{a^2} \quad (\text{B.32})$$

buluruz.