T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU EĞRİ UZAYDA KUANTUM DİNAMİĞİ

MÜSLÜM GÜZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN

2011

EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU EĞRİ UZAYDA KUANTUM DİNAMİĞİ

MÜSLÜM GÜZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 01 / 07/ 2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Doç. Dr. Selim KARA
Üye

Yrd. Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN
Üye

Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN
Danışman

ÖZET

Bu çalışmada, farklı eğriselliklere sahip yüzeyler üzerinde iki boyutlu hidrojen benzeri atomu tekrar göz önüne aldık. İki boyutlu hidrojen benzeri atom problemi göreli olmayan durumda analitik olarak tekrar çözüldü. Farklı yüzeyler üzerinde göreli olmayan durum için farklı metodlar kullanarak çözümleri yeniden sunmuş bulunuyoruz. Düz yüzey üzerindeki hidrojen benzeri atom için enerji özdeğeri polar ve parabolik koordinatlarda ve faktorizasyon metodu ile göz önüne alınarak yeniden üretildi. Ayrıca, momentum uzayında Schrödinger denklemi tekrar yazıldı. Schrödinger denklemi iki boyutlu momentum uzayını üç boyutlu küre yüzeyi üzerine izdüşürülerek çözüldü. Son olarak, düzgün bir magnetik alan içerisinde iki boyutlu hidrojen benzeri atom için Schrödinger denkleminin analitik çözümleri bulundu.

ABSTRACT

We reconsider the two-dimensional hydrogen like atomon the surface have a different curvature constants. The two dimensional hydrogen atom problem is resolved analytical non-relativistically case. We have represented the solutions to the non-relativitically case on the different surface with the different method. The energy eigenvalue for two dimensional hydrogen like atom on flat surface reproduced by considering the polar and parabolic coordinates, and the factorization method. Moreover we formulated the Schrödinger equation in momentum space. The Schrödinger equation is solved by projecting the two dimensional momentum space onto the surface of a tree-dimensional sphere. Finally, we found that the analytical solutions of the Schrödinger equation for two-dimensional hydrogen like atom in a homogeneous magnetic field.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her adımında desteğini aldığım, bu çalışmanın her sayfasında tecrübe ve bilgileri ile bana yol gösteren değerli hocam *Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN*'a ve manevi desteklerini esirgemeden her zaman yanımda olan aileme ve *Gözde YILMAZGÜÇ*' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, günümüzde yüksek enerji ve nano yapılar fiziğinde oldukça önemli bir yere sahip olan kuantum dinamik sistemi, eğriselliğe sahip iki boyutlu yüzeylerde göz önüne alınacaktır.

Nanoteknolojik yapıların temel oluşumu: çok küçük boyutlarda ve hızı yüksek olan etkileşimleri içermektedir. Örneğin çok sayıdaki atomun bir araya gelerek oluşturdukları bir yapının saklayabileceği bilginin nano yapılar için daha az sayıda atom ve daha küçük bir hacim içinde saklanabileceği söylenebilir. Bu noktada nanoteknolojinin temelini; etkileşimler küçültülünce onların dinamiklerinde ortaya çıkan değişimleri anlamak oluşturur.

Yüksek enerji ve nanoteknolojide ortaya çıkan en basit kuantum sistemi, merkezcil etkileşimi göz önüne alınarak, hidrojen benzeri atom modelidir. Özellikle yarı iletkenler fiziğinde oldukça geniş uygulama alanına sahip olan kuantum dinamik yapı iki boyutlu hidrojen benzeri atom modelidir. Üç boyutlu hidrojen benzeri atom modeli enerji spektrumu ve enerji özfonksiyonu kuantum kitaplarında detaylı bir şekilde analitik olarak incelenmiştir [*Gottfried* ve *Yan, Quantum Mechanics Fundamentals*]. Fakat, bununla beraber iki boyutlu hidrojen benzeri atom modeli hem matematiksel açıdan hem de fiziksel bakışımda orijinal bir yere sahiptir. İki boyutlu hidrojen benzeri atom modeli, düzlem üzerinde çekirdek ve ona bağlı aynı düzlemde aralarında Coulomb çekim kuvveti etkisi ile hareket eden bir elektrondan oluşmaktadır. Bu çalışmada düzlem: eğriselliğe sahip iki boyutlu yüzeyler olarak göz önüne alınacaktır.

Günümüzde, Euclidean düzleminde yani eğrisellik katsayısının sıfır olduğu yerde iki boyutlu hidrojen benzeri atomun dinamik yapısı detaylı bir şekilde bilinmektedir [*Parfitt,* 2002]. Üç boyutlu hidrojen benzeri atom modeli ile karşılaştırdığımızda [*Leonard Schiff,* Quantum Mechanics] daha küçük taban durum kuantum enerji aralıklarına sahiptir. Kuantum enerji aralıklarının sıklığı ve alt limiti sistemin küçükleri içeren yapılar için taşıdığı bilgi anlamında önemlidir. Örneğin üç boyutlu hidrojen benzeri atom modelinde taban durum enerjisi $-\gamma$ (Burada $\gamma = \frac{\mu Z^2 \alpha^2 c^2}{2}$) [*Leonard Schiff*] iken iki boyutlu hidrojen benzeri atom modelinde taban durum enerjisi -4γ' dan [*Parfitt*, 2002] oluşmaktadır. Diğer enerji durumları da bu enerji düzeyi üzerinde sıralanmaktadır.

Enerji spektrumlarının sıklığı dinamik sistemlerin taşıyacağı bilgiyi artırmaktadır. Bu noktada iki boyutlu dinamik yapı, eğrilik katsayısı $+1$ ve eğrilik katsayısı -1 olan geometriler de göz önüne alındığında, dinamik sistemimizin enerji spektrumuna geometrinin getireceği katkıların nasıl yapılanacağı önemli bir konudur [*Peter W. Higgs*, 1978]. Ayrıca iki boyutlu hidrojen benzeri atomun bulunduğu düzleme dik ve sabit bir büyüklükte olan bir biçim magnetik alan söz konusu olduğunda, magnetik alan enerji spektrumunun değişmesine sebep olur; tıpkı geometrideki eğriselliğin enerjide değişikliğe sebep olduğu gibi.

Bu çalışmanın 2. bölümünde; eğrisellik katsayısı sıfır olan iki boyutlu bir düzlemde hidrojen benzeri atom modeli için genel koordinatlarda Hamilton işlemcisinden gelen özdeğer denklemi yazılacaktır. Daha sonra bu özdeğer denklemi polar koordinatlar kullanılarak değişkenlerine ayrıştırarak incelenecektir. Ayrıca, yine polar koordinatlarda Hamilton işlemcisinden hareketle özdeğer denklemi çarpanlarına ayırma işlemi yapılarak çözümleri tartışılacaktır. Sonra parabolik koordinatlara dönüşüm yaparak özdeğer denklemi çözülecektir. Bildiğimiz kadarıyla iki boyutlu parabolik koordinatlarda hidrojen benzeri atom ilk olarak bu çalışmada incelenecektir. Son olarak, *Fock*' un 1935 te simetrilerini incelemek için geliştirdiği yöntem ile iki boyutlu hidrojen benzeri atomun momentum uzayındaki özdeğer denklemini yazarak integral denklemini elde edeceğiz. Daha sonra iki boyutlu momentum uzayını üç boyutlu momentum uzayına izdüşüreceğiz. İzdüşürme işlemini *Stereographic Projection* ile gerçekleştireceğiz. İntegral denkleminden elde ettiğimiz sonuçlar bu bölümde tartıştığımız sonuçlarla bire bir örtüşmektedir.

3. bölümde iki boyutlu eğrisel yüzeylerde hidrojen benzeri atom yapısını tartışacağız. Bu bölümde hidrojen benzeri atomu eğrisellik katsayısı $+1$ ve eğrisellik katsayısı -1 olan bir geometriye yerleştirerek dinamik yapının enerji

spektrumlarındaki değişmelerini inceleyeceğiz. Matematiksel olarak eğrisellik katsayısı $+1$ ve -1 olan geometrilerde iki boyutlu hidrojen benzeri atomun ürettiği Hamilton işlemcilerini çarpanlarına ayırma yöntemi ile iki işlemcinin çarpımı şeklinde ifade ederek çözümü tartışacağız ve eğriselliğin enerji spektrumunda sebep olduğu değişiklikleri belirleyeceğiz.

4. bölümde düzleme kısıtlanmış iki boyutlu hidrojen benzeri atomu düzleme dik yönde bir biçim ve sabit magnetik alan üzerine etki ettirdiğimizde iki boyutlu hidrojen benzeri atomun enerji spektrumundaki yapılanmayı yaklaşıklıklar yöntemi ile belirlemeye çalışacağız. Son olarak bu farklı geometrilerde ürettiğimiz farklı çözümlerin taşıdığı bilgileri karşılaştıracağız. Ayrıca bu çalışmada kullandığımız matematiksel yapıların özetlerini ekte özetleyeceğiz.

BÖLÜM 2. İKİ BOYUTLU DÜZLEMDE HİDROJEN BENZERİ ATOM

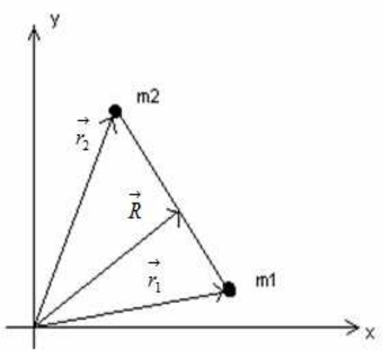
Bu bölümde hidrojen benzeri atomu eğrisellik katsayısı sıfır olan iki boyutlu düzlemde kütle merkezi koordinatlarını göz önüne alarak detaylı bir biçimde inceleyeceğiz. Dinamik sistemin Hamilton işlemcisi içinde parçacıklar arasındaki etkileşim terimi parçacıklar arasındaki uzaklığa bağlıdır. Yani, parçacıkların koordinatlarının her ikisine birden bağlıdır. Bu da fizikte problem çözümlerinde sıkça kullandığımız değişkenlerine ayrıştırma işlemini yapmamıza imkan vermemektedir. Bu nedenle ilk olarak kütle merkezi koordinatlarını kullanarak Hamilton işlemcisini yeniden düzenleyeceğiz. Daha sonra bu dinamik sistemi,

1. Polar Koordinatlarda ve polar koordinatlarda Faktorizasyon (Operatörleri çarpanlarına ayırma) yöntemi

2. Parabolik koordinatlarda

3. Momentum uzayında

olmak üzere üç farklı şekilde inceleyeceğiz. Bunun için genel olarak iki boyutlu düzlemde hidrojen benzeri atom için Hamilton işlemcisini yazalım. Şekil 2.1' de görüleceği gibi



$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \vec{\nabla}_1^{\,2} - \frac{\hbar^2}{2m_2} \vec{\nabla}_2^{\,2} + V\left(\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|\right) , \quad (2.1)$$

Şekil 2.1

şeklindedir. Hamiltonu kullanarak elde edeceğimiz özdeğer denkleminin çözülebilmesi için değişkenlerin ayrışabilmesi gerekir. Bu potansiyel terimi değişkenlerin ayrışmasına imkan vermemektedir. (Burada $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(x_2, y_2)$ ve $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$). Bu nedenle kütle merkezi koordinatları dönüşümü yaparak Hamilton işlemcisini yeniden yazarız. (2.1) ve (2.2) eşitliklerini kullanarak

$$\vec{\nabla}_1 = \frac{m_1}{M}\vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r \text{ ve } \vec{\nabla}_2 = \frac{m_2}{M}\vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_r \ , \tag{2.2}$$

eşitliklerini elde ederiz. (2.2) eşitliklerini (2.1)' de yerine yazarak

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_R^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r^2 + V(r) \ , \tag{2.3}$$

elde ederiz. Burada $m_1 + m_2 = M$ ve $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ şeklinde tanımlıdır. Böylelikle

$$\hat{\mathrm{H}}\Psi\left(\vec{r}, \vec{R}\right) = \mathrm{E}\Psi\left(\vec{r}, \vec{R}\right) \ , \tag{2.4}$$

özdeğer denkleminden $\Psi\left(\vec{r}, \vec{R}\right) = \mathcal{V}(\vec{r})\mathcal{U}(\vec{R})$ değişken ayrıştırma işlemi ile

$$\{\vec{\nabla}_R^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}E_R\}\mathcal{U}(\vec{R}) = 0 \, , \tag{2.5}$$

ve

$$\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_r^2 + V(r)\}\mathcal{V}(\vec{r}) = E_r\mathcal{V}(\vec{r}) \, , \tag{2.6}$$

denklemlerine ulaşırız. (2.5) denklemi M kütleli serbest bir parçacığın Hamiltonunu temsil eden özdeğer denklemidir ve çözümü; $\mathcal{U}(\vec{R}) = N_R e^{i\vec{k}.\vec{R}}$, dir. Burada $\vec{k}$ dalga sayısı vektörüdür ve serbest parçacığı temsil eder. Bu çözüm $\vec{R}$ doğrultusunda hareket eden bir düzlem dalgadır. Problemde başka sınır koşulu yoksa enerji özdeğeri sürekli olur. Sisteme dışarıdan bir etki yoksa hem taşınma hem de dönme olur. Bu durumda (2.6) denklemi incelenmelidir. Sistemin asıl önemli davranışları çözümü daha zor olan bu bağıl hareket denklemi tarafından belirlenir. Bu nedenle artık bağıl Hamiltonun sağladığı (2.6) denklemini tartışacağız.

2.1. Polar Koordinatlarda Çözüm

Öncelikle iki boyutlu polar koordinatlarda $\vec{\nabla}^2$ operatörünü (2.6) denkleminde yerine yazar ve özfonksiyon çözümünü değişken ayrıştırma yöntemine göre

$$\upsilon(r,\phi) = R_{nm}\left(r\right)\Phi(\phi)\,, \tag{2.1.1}$$

şeklinde yazarak baktığımızda iki boyutlu düzlemde bağlı koordinatların sağladığı radyal denklem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}+\frac{2\mu z e^2}{r\hbar^2}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\right) R_{nm}(r) = 0\,, \tag{2.1.2}$$

olur. $\rho = \beta r$ gibi boyutsuz bir değişken tanımlayarak radyal denklemi

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}\right) R_{nm}(\rho) = 0\,, \tag{2.1.3}$$

olarak yazarız (Burada $\lambda = \dfrac{2\mu z e^2}{\beta\hbar^2}$ ve $\beta = \sqrt{\dfrac{8\mu|E|}{\hbar^2}}$ şeklinde tanımlanmıştır). Bu denklemin $\rho \to \infty$ ve $\rho \to 0$ asimptotik çözümleri gerekli işlemler yapılarak

$$R_{n|m|}(\rho) = \rho^{|m|} e^{-\rho/2} L(\rho)\,, \tag{2.1.4}$$

şeklinde bulunur. Burada $L(\rho)$, $0<\rho<\infty$ aralığındaki çözümleri içermektedir. (2.1.4)' ü (2.1.3)' te yerine yazarak

$$\rho L''(\rho) + (2|m| - \rho + 1)L'(\rho) + (-|m| + \lambda - \frac{1}{2})L(\rho) = 0\,, \tag{2.1.5}$$

denklemi elde ederiz. Bu denklemi $\rho = 0$ düzgün tekil noktası civarında Frobenius yöntemi ile çözelim.

$$L(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+s}\,, \tag{2.1.6}$$

$a_0 \neq 0$ olmak şartı ile bir çözüm olsun. (2.1.6) ve türevlerini (2.1.5)' de yerine yazar ve gerekli indis düzenleme işlemlerini yaparsak

$$[s(s-1)+(2|m|+1)s]a_0\rho^{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+s+2|m|+1)(n+s+1)]a_{n+1}+[(-|m|+\lambda-\frac{1}{2}-n-s)a_n]\}\rho^{n+s}=0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da

$a_0 \neq 0$ için, $s\left(s+2|m|\right)=0$

ve

$$a_{n+1}=\frac{(|m|-\lambda+\frac{1}{2}+n)}{(n+2|m|+1)(n+1)}a_n \quad ; \quad n \geq 0\,, \qquad (2.1.7)$$

tekrarlama bağıntısını verir. $\rho \to 0$ iken radyal denklemin sonlu kalması gerekir. Bundan dolayı $s=0$ alınır çünkü, $s=-2|m|$ alınırsa çözüm ıraksak olur. Çok büyük n' lerde ρ ne olursa olsun çözümün sonlu kalabilmesi için katsayılar arasındaki ilişki yakınsak olmalıdır. Bunu kontrol etmek için tekrarlama bağıntısı yakınsak mı? Iraksak mı? Test edeceğiz.

$n \to \infty$ limitinde $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{n}$ şeklinde davranır. Bu davranış biçimi e^{ρ} çözümünü üretir, bu da genel çözümü ıraksak yapar. Biz sonlu çözüm aradığımıza göre bu serinin bir yerde kesilmesi gerekir. Burada $a_n \neq 0$ ve $a_{n+1}=0$ olacak şekilde bir kesme işlemi yapmalıyız.

$|m|-\lambda+\dfrac{1}{2}+n=0$ seçimi seriyi kesmeyi sağlar,bu durumda çözüm düzenli olur. ($n=0,1,2,3,...;m=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$) Burada ilk olarak $n \to k$ ve daha sonra $\lambda-\dfrac{1}{2}=n$ dersek

$$k+|m|=n \;\Rightarrow\; k=n-|m|$$

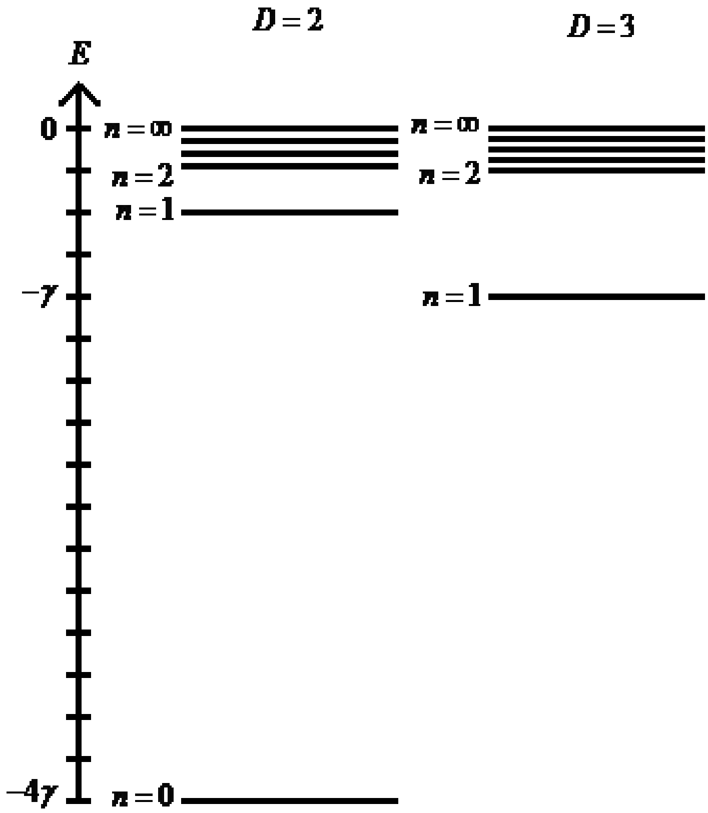
olur. Çözümün sonlu olması için yaptığımız seçim $L(\rho)$ fonksiyonunu $L_{n-|m|}^{2|m|}(\rho)$ Associated Laguerre polinomuna taşır. Böylece radyal denklem

$$R_{n|m|}(\rho)=N_n e^{-\rho/2}\rho^{|m|}L_{n-|m|}^{2|m|}(\rho)\,, \tag{2.1.8}$$

olur. Enerji özdeğeri

$$E_n=-\frac{\mu z^2\alpha^2c^2}{2}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\;;n=0,1,2,3,...\text{ ve } m=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\;, \tag{2.1.9}$$

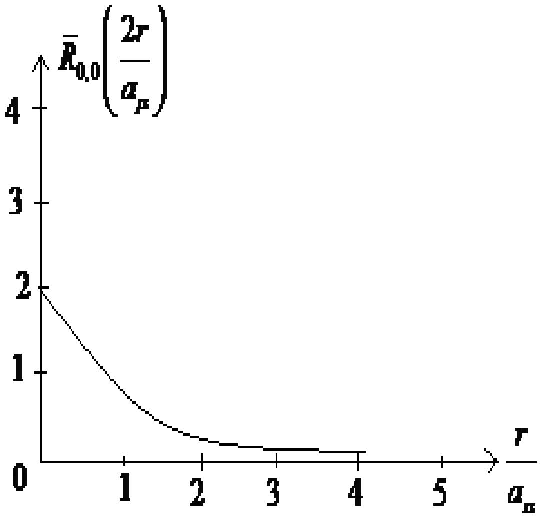
olarak bulunur (Burada $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$: İnce yapı sabitidir). Üç boyutlu hidrojen atomu ile iki boyutlu hidrojen atomunun enerji özdeğerlerini Şekil 2.2’ deki gibi karşılaştırılabilir.

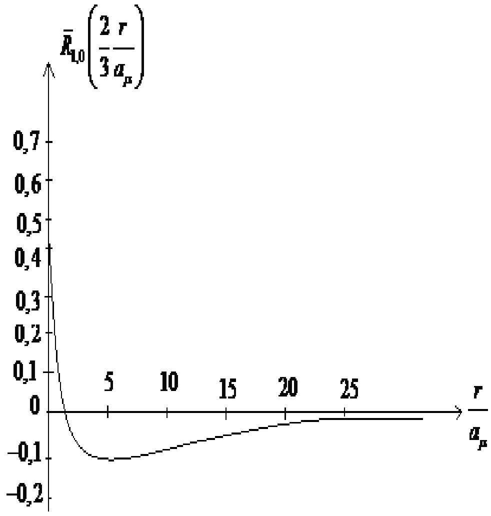


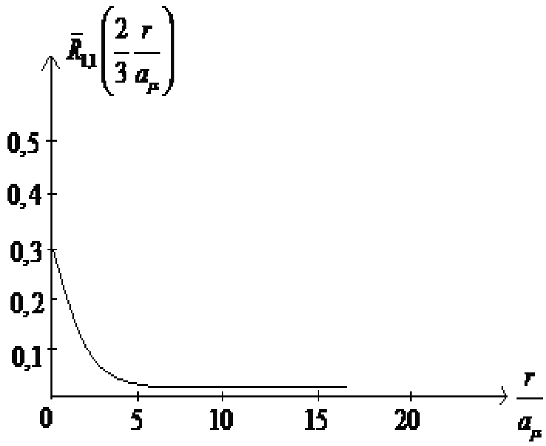
Şekil 2.2

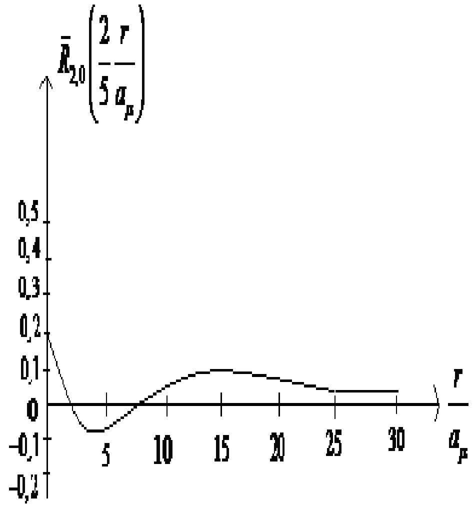
Aynı enerji seviyesinin farklı fonksiyonlarla ifade edilmesine dejenerelik denir. Burada sıfırdan farklı her $|m|$ degeri iki defa sayılır. Örneğin $m=\pm 1$ değerleri için $|m|=1'dir.$ Buradan da anlaşılacağı gibi $2n+1$ dejenerelik vardır.

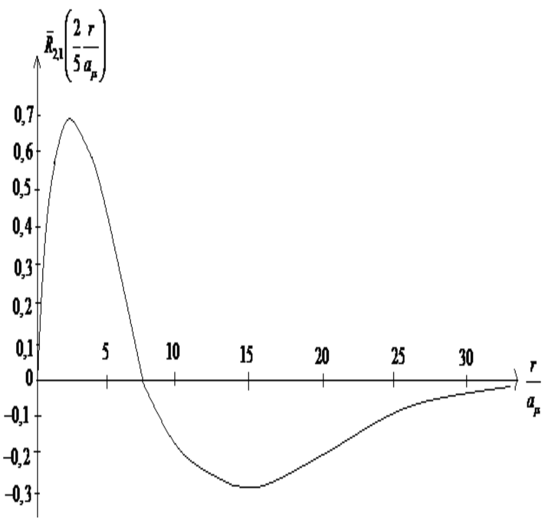
$P(r)=rR^2_{n,|m|}(r)$ olasılık yoğunluğunu göz önüne alalım. $n-|m|+1$ tane maksimumu vardır. Bunu görebilmek için $R_{n,|m|}(\beta r)$ ve $P_{n,|m|}(r)$ ’ in ilk bir kaç n ve $|m|$ değeri için grafikleri Şekil 2.3’ teki gibidir.

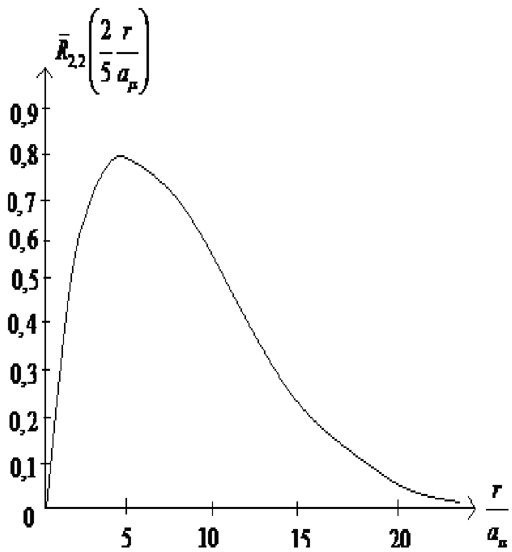

$\bar{R}_{0,0}\left(\frac{2r}{a_\mu}\right)$
4
3
2
1
0
1 2 3 4 5
$\frac{r}{a_\mu}$

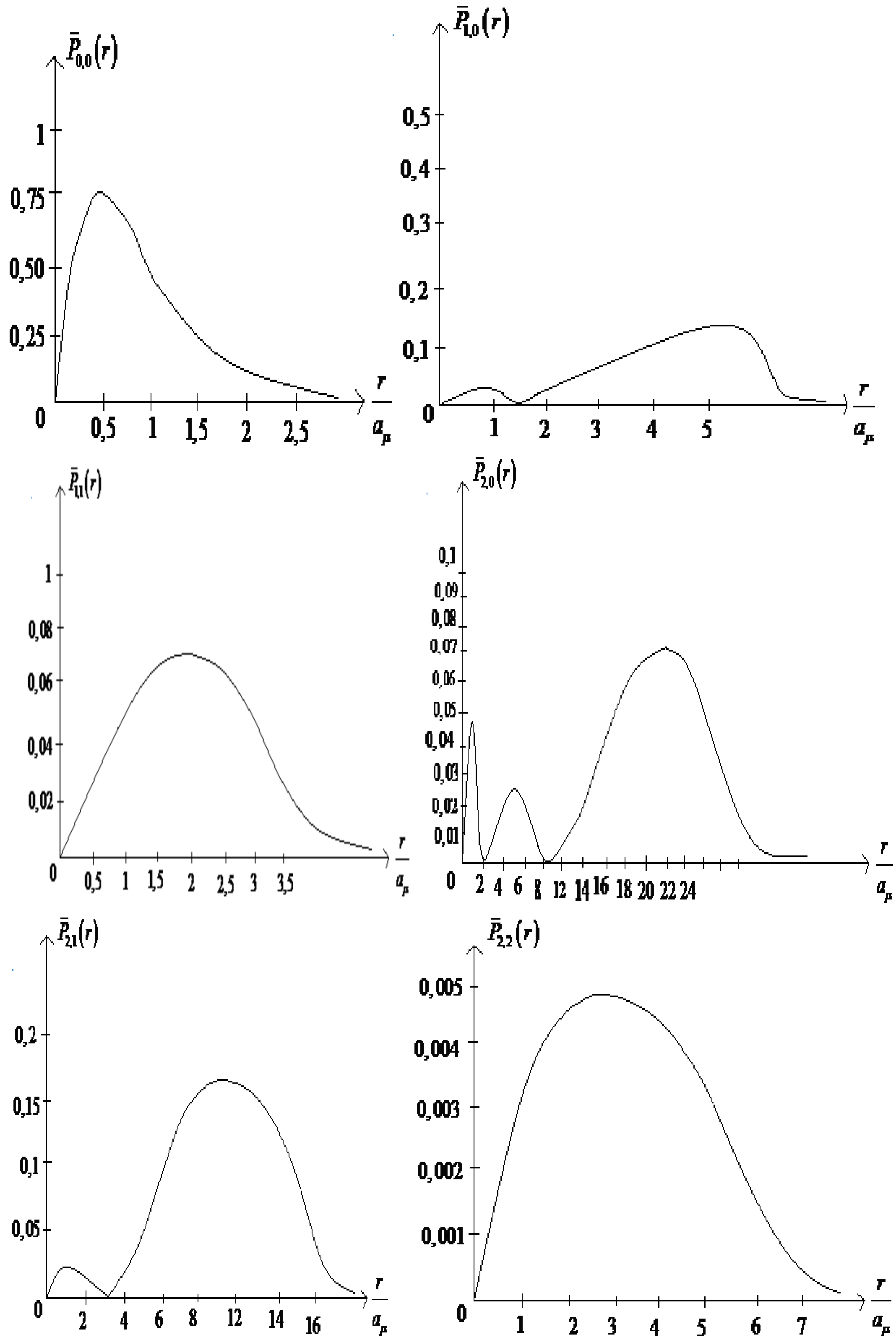

$\bar{R}_{1,0}\left(\frac{2}{3}\frac{r}{a_\mu}\right)$
0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2
5 10 15 20 25
$\frac{r}{a_\mu}$


$\bar{R}_{1,1}\left(\frac{2}{3}\frac{r}{a_\mu}\right)$
0,5 0,4 0,3 0,2 0,1
0 5 10 15 20
$\frac{r}{a_\mu}$


$\bar{R}_{2,0}\left(\frac{2}{5}\frac{r}{a_\mu}\right)$
0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2
5 10 15 20 25 30
$\frac{r}{a_\mu}$


$\bar{R}_{2,1}\left(\frac{2}{5}\frac{r}{a_\mu}\right)$
0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0 -0,1 -0,2 -0,3
5 10 15 20 25 30
$\frac{r}{a_\mu}$


$\bar{R}_{2,2}\left(\frac{2}{5}\frac{r}{a_\mu}\right)$
0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0
5 10 15 20
$\frac{r}{a_\mu}$


$\bar{P}_{0,0}(r)$
1
0,75
0,50
0,25
0
0,5 1 1,5 2 2,5
$\frac{r}{a_\mu}$
$\bar{P}_{1,0}(r)$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1 2 3 4 5
$\frac{r}{a_\mu}$
$\bar{P}_{1,1}(r)$
1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5
$\frac{r}{a_\mu}$
$\bar{P}_{2,0}(r)$
0,1
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
2 4 6 8 12 14 16 18 20 22 24
$\frac{r}{a_\mu}$
$\bar{P}_{2,1}(r)$
0,2
0,15
0,1
0,05
0
2 4 6 8 12 14 16
$\frac{r}{a_\mu}$
$\bar{P}_{2,2}(r)$
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0
1 2 3 4 5 6 7
$\frac{r}{a_\mu}$

Şekil 2.3

Şimdi de (2.6)' deki işlemciyi işlemcilerin çarpanlarını oluşturarak inceleyeceğiz [*Bayın S.* , 2006].

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{2\alpha}{r}+\lambda\right]\mathcal{V}(r,\phi)=0\,, \tag{2.1.10}$$

Burada $\alpha=\frac{\mu z e^2}{\hbar^2}$ ve $\lambda=\frac{2\mu E}{\hbar^2}$ şeklinde tanımlıdır. Denklem (2.1.10)' da

$$\mathcal{V}(r,\phi)=R(r)\Phi(\phi)\ ;\ \Phi(\phi)\sim e^{\pm im\phi}\ ;\ m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ , \tag{2.1.11}$$

değişkenlerine ayrıştırma işlemini yaparak

$$\frac{d^2}{dr^2}y(r)+\left\{\lambda-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}{r^2}+\frac{2\alpha}{r}\right\}r^{\frac{1}{2}}y(r)=0\ , \tag{2.1.12}$$

denklemini elde ederiz (Burada $y(r)=r^{\frac{1}{2}}R(r)$ dir). $q=-\alpha$ dersek (EK-A),

$$r(z,m)=-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}{r^2}+\frac{2\alpha}{r}$$

$$k(,m)=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)}{r}-\frac{\alpha}{\left(m-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\mu(m)=-\frac{\alpha^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}\ , \tag{2.1.13}$$

eşitliklerine ulaşırız. m' in pozitif ve ya negatif olma durumuna göre $m>0$ için $\lambda=\mu(m_{\max}+1)$ ve $m<0$ için $\lambda=\left(|m_{\min}|+1\right)$ şeklindedir .

$$\Rightarrow \ \left|m_{\min}\right| = m_{\max} = n \ \therefore \ \lambda = -\frac{\alpha^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \ , \qquad (2.1.14)$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2\hbar^2/\mu}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \ , \qquad (2.1.15)$$

Görüldüğü gibi daha önce bulduğumuz sonuçla aynıdır. Şimdi (EK-A)' dan yararlanarak basamak işlemcilerini yazalım.

$$O_{\pm}\left(r,m\right) = \pm\frac{d}{dr} - \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)}{r} + \frac{\alpha}{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \ , \qquad (2.1.16)$$

$m > n$ durumuna karşı gelen özdeğerlerin olmadığı bilgisine sahibiz. Bu bilgi ile

$$y_n^n\left(r\right) = N_n r^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{\alpha}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}r} \ , \qquad (2.1.17)$$

$$R_n^n\left(r\right) = N_n r^n e^{-\frac{\alpha}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}r} \ , \qquad (2.1.18)$$

Çözümlerini elde ederiz. Burada bulduğumuz $m = n$' deki çözümdür. Şimdi bu çözümden yararlanarak genel çözümleri elde edebiliriz.

$$y_n^{m-1}\left(r\right) = \left[\mu\left(n+1\right) - \mu\left(r\right)\right]^{-\frac{1}{2}} O_{-}\left(r,m\right) y_n^m\left(r\right) \ , \qquad (2.1.19)$$

m' in n' den başlayarak birkaç değeri için (2.1.19) tekrarlanırsa

$$R_{n,m}\left(r\right) = B_{n,m}\beta^{(n-m)}\frac{\left(2n\right)!}{\left(n+m\right)!} r^{-(n+1)} e^{\frac{\beta}{2}r}\left[r^2\frac{d}{dr}\right]^{n-m} r^{2m+1}e^{-\beta r} \ , \qquad (2.1.20)$$

özfonksiyonunu buluruz.

2.2. Parabolik Koordinatlarda Çözüm

Radyal denklemin çözümleri sadece polar koordinatlarda değişkenlerine ayırma yöntemi ile bulunmuyor. Aynı zamanda parabolik koordinat dönüşümü ile de değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak radyal denklem çözülebiliyor [*Schiff, 1949*]. Burada bağıl koordinatlardan gelen özdeğer denkleminin parabolik koordinatları göz önüne alarak çözümlerini inceleyeceğiz.

Parabolik koordinatlarda koordinat dönüşümleri, $\vec{\nabla}^2$ operatörü ve Coulomb potansiyeli

$$x = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right) \ , \ y = \eta\xi$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\left(\eta^2 + \xi^2\right)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)$$

$$V(\eta,\xi) = -\frac{2Ze^2}{\left(\eta^2 + \xi^2\right)} \ , \tag{2.2.1}$$

şeklindedir. Bu durumda bağıl Hamiltondan gelen (2.6) özdeğer denklemi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{4\mu Ze^2}{\hbar^2} - \frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\left(\eta^2 + \xi^2\right)\right)\psi(\eta,\xi) = 0 \ , \tag{2.2.2}$$

denklemine dönüşür. Bu denklemde

$$\psi(\eta,\xi) = f(\eta)\, g(\xi) \ , \tag{2.2.3}$$

değişken ayırma işlemini yapar ve denklemi düzenlersek

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{4\mu Ze^2}{\hbar^2} - \frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\eta^2\right) f(\eta) = \alpha f(\eta) \ , \tag{2.2.4}$$

ve

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\xi^2\right)g(\xi)=-\alpha g(\xi)\ , \tag{2.2.5}$$

denklemlerini elde ederiz. (2.2.4) denklemini $\rho=\beta\eta$ gibi bir boyutsuz değişken tanımlayarak düzenlersek

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\lambda_1-\rho^2\right)f(\rho)=0\,;\quad \beta^4=\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\ \text{ ve }\ \frac{4\mu Ze^2-\alpha\hbar^2}{\beta^2\hbar^2}=\lambda_1\ \text{(sabit)}\ , \tag{2.2.6}$$

olur. Denklemi $\rho\to\infty$ limitinde incelediğimizde

$$f(\rho)=e^{\frac{-\rho^2}{2}}H(\rho)\ , \tag{2.2.7}$$

elde ederiz. Burada eksponansiyel terim asimptotik çözümleri temsil eder ve $H(\rho)$' nun sağladığı diferansiyel denklem

$$H''(\rho)-2\rho H'(\rho)+(\lambda_1-1)H(\rho)=0\ , \tag{2.2.8}$$

dir. $H(\rho)$' in sağladığı bu diferansiyel denklemi $\rho=0$ düzenli tekil noktası civarında $a_0\neq 0$ olmak şartı ile incelersek $s=0$ ve $s=1$ gibi iki indis kök bulunur. $s=0$ alırız çünkü $a_0\neq 0$ ve $a_1\neq 0$ dır. Bu durumda katsayılar arasındaki bağıntı

$$a_{n_1+2}=\frac{(2n_1-\lambda_1+1)}{(n_1+1)(n_1+2)}a_{n_1}\ ;\ n_1\geq 0\ , \tag{2.2.9}$$

olur. Görüldüğü gibi katsayılar, $n_1\to\infty$ limitinde $\frac{a_{n_1+2}}{a_{n_1}}\to\frac{2}{(n_1+2)}$ şeklinde davranır. Bu, katsayıların ıraksak davrandığını söyler. Ancak $a_0\neq 0$ ve $a_1\neq 0$ olacak şekilde bir kesme işlemi çözümü düzenli kılar. Kesme işlemini $(2n_1-\lambda_1+1)=0$ seçimi ile yaparsak

$n_1 = \dfrac{\lambda_1 - 1}{2}$, benzer şekilde (2.2.8) denkleminden $n_2 = \dfrac{\lambda_2 - 1}{2}$ bulunur ve $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - 1 = 2n$ dersek $n_2 = 2n - n_1$ olur (Burada $\dfrac{e^2}{\hbar c} = \alpha$: ince yapı sabiti ve $\lambda_2 = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$ dir). Bu durumda enerji özdeğeri

$$E_n = \frac{\mu Z^2 \alpha^2 c^2}{2} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \ , \qquad (2.2.10)$$

olur. Kesme işlemi $H(\rho)$' yu Hermite polinomu yapar. Böylece görüldüğü gibi enerji özdeğeri polar koordinatlardaki sonuçla örtüşür.

Özfonksiyon ise $2\beta^2 r = \sigma$ dönüşümü ile

$$\psi_{n_1,n_2}(\sigma,\phi) = e^{\frac{-\rho}{2}} H_{n_1}\left(\sqrt{\sigma}\cos\frac{\phi}{2}\right) H_{2n-n_1}\left(\sqrt{\sigma}\sin\frac{\phi}{2}\right) \ , \qquad (2.2.11)$$

şeklinde bulunur. Dejenere durumlar ile ilgili bilgiyi Şekil 2.4' teki tablo ile gösterilebiliriz.

n	n_1	
0	0	$\rightarrow\ 1 = 2.0+1$
1	0 1 2	$\rightarrow\ 3 = 2.1+1$
2	0 1 2 3 4	$\rightarrow\ 5 = 2.2+1$
$\vdots$	$\vdots$	
n	0 1 2 $\vdots$ $2n$	$\rightarrow\ 2n+1$

Şekil 2.4

Tablodan görüleceği gibi dejenerelik $2n+1$ şeklindedir. Ayrıca,

$$H_{n_1}(\sqrt{\rho}\cos\frac{\phi}{2})H_{2n-n_1}(\sqrt{\rho}\sin\frac{\phi}{2}) = \sum_{m=-n}^{n} L_{n-|m|}^{2|m|}(\rho)e^{im\phi}(2\rho)^{|m|}B_m^{nn_1} \quad , \qquad (2.2.12)$$

eşitliği vardır [*Duru, I. H. , ve H. Kleinert*, 1982]. Bu eşitliği kullanırsak çözümümüz

$$\psi_{n,m}(\rho,\phi) = e^{\frac{-\rho}{2}} \sum_{m=-n}^{n} L_{n-|m|}^{2|m|}(\rho)\rho^{|m|}2^{|m|}B_m^{nn_1}e^{im\phi} \quad , \qquad (2.2.13)$$

olur. Buradan da dejenereliğin $2n+1$ olduğu görülür.

2.3. Momentum Uzayı

Eğrisellik katsayısı sıfır olan iki boyutlu düzlemde tanımlı hidrojen benzeri atomun dinamik yapısını ifade eden özdeğer denklemini momentum uzayında yazarak, mometum uzayında Schrödinger denkleminin integral temsilini elde edeceğiz. Daha sonra bu integral denklemi *Stereographic Projection* yöntemi ile iki boyuttan üç boyuta iz düşüreceğiz. Matematiksel yöntem için, Fock' un geliştirdiği yolu izleyeceğiz. Bunun için ilk olarak

$$\psi\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{2}}\int\Phi\left(\vec{p}\right)e^{-i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}d\vec{r} \quad , \qquad (2.3.1)$$

ve

$$\Phi\left(\vec{p}\right)=\int\psi\left(\vec{r}\right)e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}d\vec{p} \quad , \qquad (2.3.2)$$

şeklindeki Fourier dönüşümlerini kullanarak (2.6) özdeğer denklemini momentum uzayında yazarız. Burada $\psi\left(\vec{r}\right)$ konum uzayında ve $\Phi\left(\vec{p}\right)$ momentum uzayındaki dalga fonksiyonlarıdır.

Konum uzayında özdeğer denklemi;

$$\left(-\frac{\hbar^{2}}{2\mu}\vec{\nabla}_{r}^{2}+V\left(r\right)\right)\psi\left(r\right)=E\psi\left(r\right)$$

$$-\frac{\hbar^{2}}{2\mu}\overrightarrow{\nabla}_{r}^{2}\psi\left(r\right)+E\psi\left(r\right)=V\left(r\right)\psi\left(r\right) \quad , \qquad (2.3.3)$$

şeklindedir. (2.3.3) denkleminin her iki tarafını soldan $e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}$ ile çarpıp $\vec{p}$ üzerinden integralini alalım.

$$\frac{\hbar^{2}}{2\mu}\int e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}\vec{\nabla}_{r}^{2}\psi\left(\vec{r}\right)d\vec{r}+E\int\psi\left(\vec{r}\right)e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}d\vec{r}=\int V\left(r\right)\psi\left(\vec{r}\right)e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}.\vec{r}}d\vec{r}$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\int e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}_r^2\psi\left(\vec{r}\right)d\vec{r}+E\Phi\left(\vec{p}\right)=\int V\left(r\right)\psi\left(\vec{r}\right)e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}d\vec{r}\ , \qquad (2.3.4)$$

(2.3.4)denkleminin sol tarafındaki ilk terimi;

$$\int_v \left(F\vec{\nabla}^2G-G\vec{\nabla}^2F\right)dv=\int_s\left(F\vec{\nabla}G-G\vec{\nabla}F\right)\cdot\hat{n}ds$$

şeklinde verilen Green teoremi ile düzenleyelim.

$$\int_v\left\{e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}^2\psi\left(\vec{r}\right)-\psi\left(\vec{r}\right)\vec{\nabla}^2e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\right\}d\vec{r}=\oint_s\left\{e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}\psi\left(\vec{r}\right)-\psi\left(\vec{r}\right)\vec{\nabla}e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\right\}\cdot\hat{n}ds$$

İntegral bölgesi yarıçapı R olan bir küre olarak düşünülürse, $\hat{n}=\hat{e}_r$ ve $ds=R^2d\Omega$ dır. O halde denklemin sağ tarafı $R\to\infty$ limitinde;

$$\oint_s\left\{e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\vec{\nabla}\psi\left(\vec{r}\right)-\psi\left(\vec{r}\right)\vec{\nabla}e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\right\}\cdot\hat{n}ds=\lim_{R\to\infty}R^2\left\{\int\int\left[e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\frac{d}{dr}\psi\left(\vec{r}\right)-\psi\left(\vec{r}\right)\frac{d}{dr}e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}\right]d\Omega\right\}$$

olur. Eğer $\psi\left(\vec{r}\right)$ fonksiyonu $\frac{1}{r}\to 0$ limitinde yeteri kadar hızlı sıfıra giderse, bu yüzey alan integrali sıfır olur. Bu durumda (2.3.4) denklemi

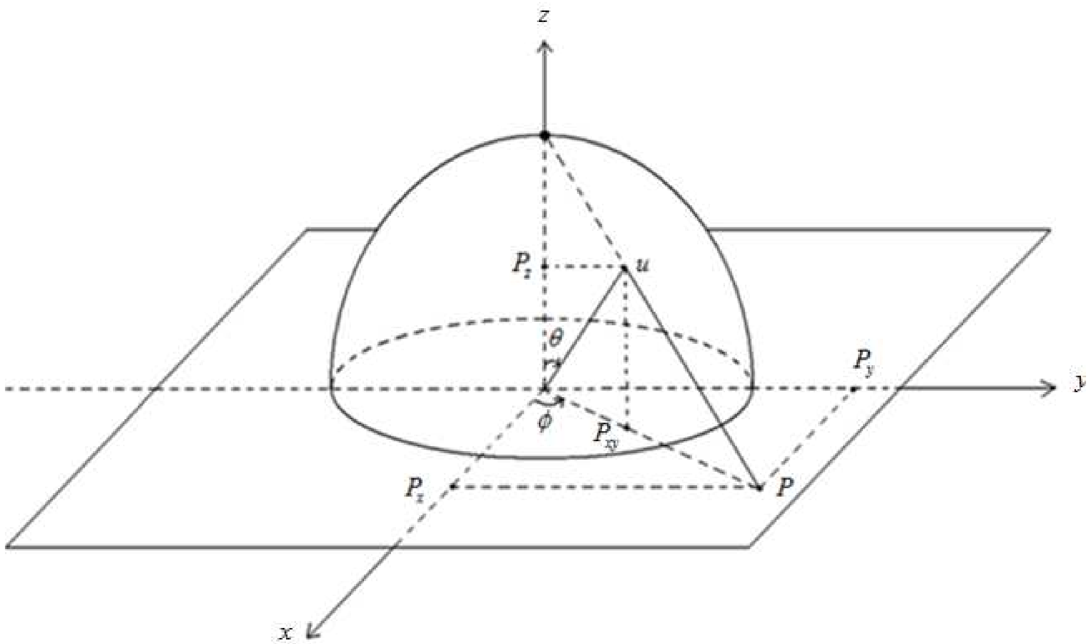
$$-\frac{p^2}{\hbar^2}\Phi\left(\vec{p}\right)+E\Phi\left(\vec{p}\right)=\int V\left(r\right)\psi\left(\vec{r}\right)e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{r}}d\vec{r}$$

$E=-\frac{p_0^2}{2\mu}$ dersek, $\mu=Z=e=1$ için

$$\left(p^2+p_0^2\right)\Phi\left(\vec{p}\right)=\frac{1}{\pi}\int\frac{\Phi\left(\vec{p'}\right)}{\left|\vec{p}-\vec{p'}\right|}d\vec{p'}\quad , \qquad (2.3.5)$$

denklemine dönüşür. Böylece iki boyutlu konum uzayındaki özdeğer denklemini iki boyutlu momentum uzayında yazmış oluruz.

Bir noktası delinmiş küre ile düzlem topolojik olarak eş yapılıdır. Yani düzlem ile küre yüzeyi arasında birebir eşlemeyi sağlayan bir *projection* dönüşümü vardır. Bu Şekil 2.5' teki gibi resmedilebilir. Biz de burada bu bilgiden yaralanarak, iki boyutlu momentum uzayındaki bu denklemi üç boyutlu ve merkezi orijinde olan birim küre üzerine taşıyacağız.



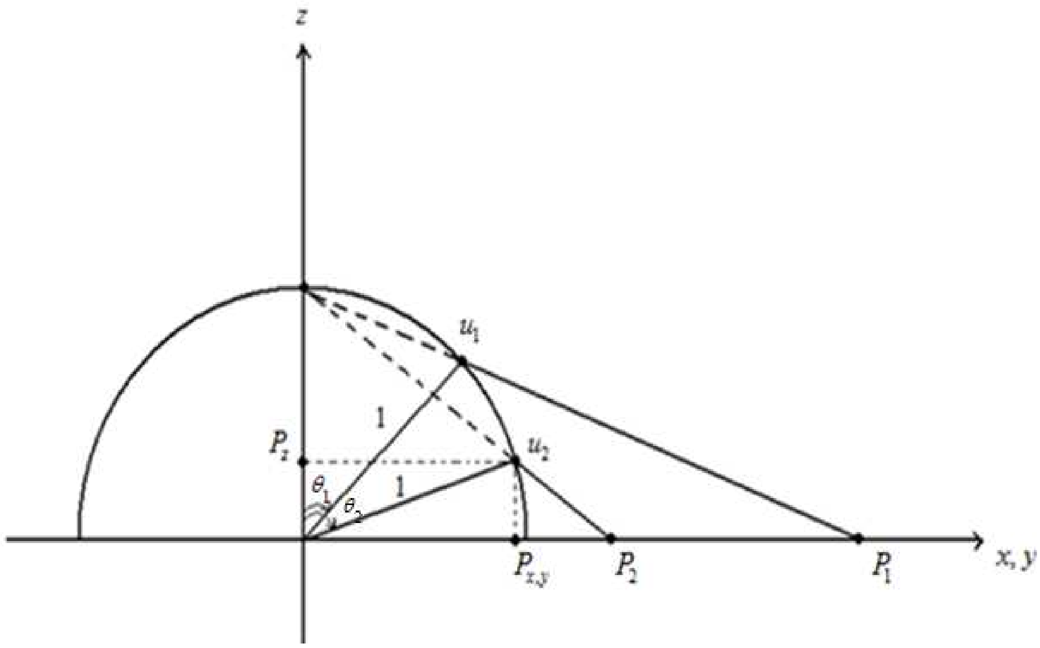
Şekil 2.5

$$\sin\phi = \frac{P_y}{P}$$

$$\cos\phi = \frac{P_x}{P}$$

$$\sin\theta = P_{x,y} \text{ ve } \cos\theta = P_z$$

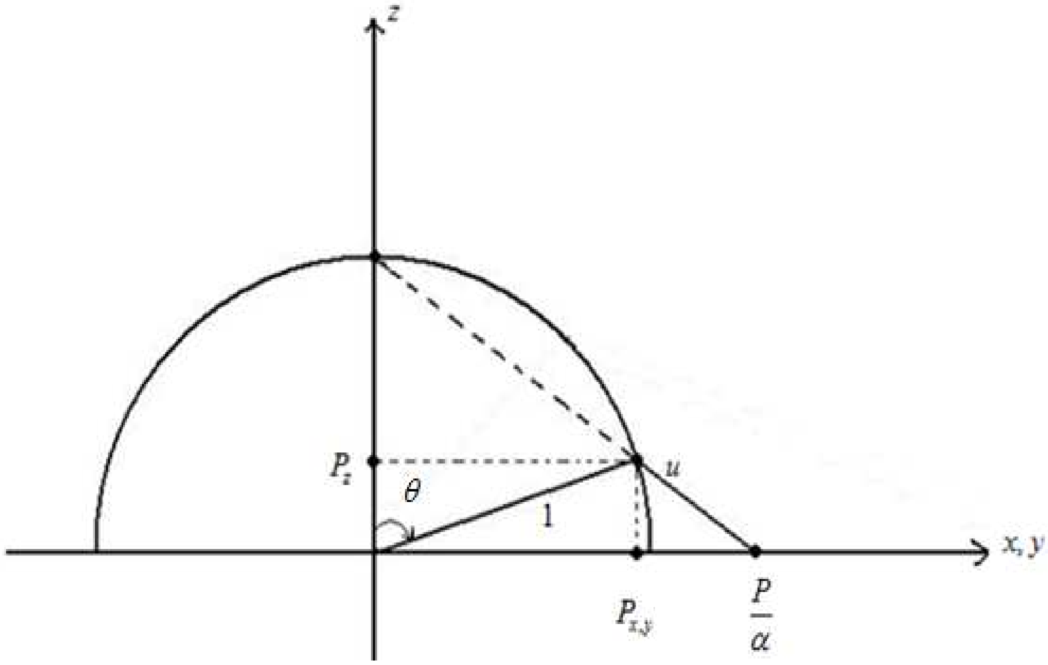
şeklindedir. Burada $P_{x,y}$ ve P_z terimlerini ne olduğunu hesaplamalıyız. Bunun için sistemi Şekil 2.6 ve Şekil 2.7' deki gibi görelim.



Şekil 2.6

Burada da görülebileceği gibi her P noktasına küre yüzeyi üzerinde farklı bir u noktası karşı gelmektedir (Kutup noktası hariç). Bunun nedeni ise P noktası değiştikçe değişen θ açısıdır. Tüm u noktaları birim küre yüzeyi üzerinde olduğundan,

$\left|\overrightarrow{u_1}\right| = \left|\overrightarrow{u_2}\right| = \cdots = \left|\overrightarrow{u_n}\right| = \cdots$ ilişkisi vardır. Burada $p_1 = p$ ve $p_2 = \dfrac{p}{\alpha}$ diyelim. $\theta = 0$ ‘da u noktasına karşı gelen bir p noktası yoktur. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ise u noktası p noktasına düşer. O halde α terimi, $1 \le \alpha < \infty$ aralığında olmalıdır.



Şekil 2.7

$$\frac{\frac{p}{\alpha} - p_{x,y}}{\frac{p}{\alpha}} = p_z \qquad \text{ve} \qquad \left(p_{x,y}\right)^2 + \left(p_z\right)^2 = 1$$

$$p_{x,y} = \frac{2\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + 1\right)} \qquad \left(p_{x,y} \neq 0\right)$$

$\alpha = p_0$ dersek,

$p_{x,y} = \dfrac{2p_0 p}{p^2 + p_0{}^2}$ bulunur. Benzer şekilde

$p_z = \dfrac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$ olarak bulunur. Böylece

$\sin\theta = \dfrac{2p_0 p}{p^2 + p_0{}^2}$ ve $\cos\theta = \dfrac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$ olduğu görülür.

Bu durumda $\vec{u}$ 'nün bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$u_x = \sin\theta\cos\phi = \frac{2p_0 p_x}{p^2 + p_0^2}$$

$$u_y = \sin\theta\sin\phi = \frac{2p_0 p_y}{p^2 + p_0^2}$$

$$u_z = \cos\theta = \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2} \quad , \tag{2.3.6}$$

Birim kürenin yüzey elemanı;

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{2p_0 p_x}{p^2 + p_0^2}$$

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{2p_0 p_x}{p_x^2 + p_y^2 + p_0^2} \quad , \tag{2.3.7}$$

$$\sin\theta\sin\phi = \frac{2p_0 p_y}{p_x^2 + p_y^2 + p_0^2} \quad , \tag{2.3.8}$$

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{p_y}{p_x} \quad , \tag{2.3.9}$$

(2.3.9)'dan yararlanıp p_x ve p_y 'yi birbiri cinsinden yazarak (2.3.7) ve (2.3.8) eşitliklerinden p_x ve p_y 'yi hesaplayabiliriz. (2.3.7)' yi inceleyelim.

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{2p_0 p_x}{p_x^2 + \dfrac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} p_x^2 + p_0^2}$$

$$\sin\theta\cos\phi = \frac{2p_0 p_x \cos^2\phi}{p_x^2 + \cos^2\phi\, p_0^2}$$

$$p_x = p_0 \cos\phi \frac{\left(1 \pm \cos\theta\right)}{2\sin\theta}$$

p_x $\theta = 0$'daki durumu sağlamalıdır.

$$\therefore \quad p_x = p_0 \cos\phi \frac{(1+\cos\theta)}{2\sin\theta} \quad , \tag{2.3.10}$$

(2.3.8)' i inceleyelim.

$$\sin\theta \sin\phi = \frac{2p_0 p_y}{p_y^2 \dfrac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + p_y^2 + p_0^2}$$

$$p_y = p_0 \sin\phi \frac{(1 \pm \cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$p_y = p_0 \sin\phi \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta} \quad , \tag{2.3.11}$$

$$d\vec{p} = dp_x dp_y = |J| \, d\theta d\phi$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial p_x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial p_x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial p_y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$J = -p_0^2 \cos^2\phi \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^3\theta} - p_0^2 \sin^2\phi \frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^3\theta}$$

$$J = -p_0^2 \frac{1}{\sin\theta} \frac{(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

Eşitliğin sağ tarafını $(1-\cos\theta)$ ile çarpıp bölelim.

$$J = -p_0^2 \frac{1}{\sin\theta} \frac{(1-\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$|J| = \left(\frac{p^2 + p_0^2}{2p_0} \right)^2 \sin\theta$$

$$d\vec{p} = \left(\frac{p^2 + p_0^2}{2p_0}\right)^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\therefore \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = \left(\frac{p^2 + p_0^2}{2p_0}\right)^2 d\vec{p} \ , \qquad (2.3.12)$$

olur.

İki nokta arasındaki uzaklık;

$$|\vec{u} - \vec{u}\,'| = \left\{ \left(u_x - u_x^{'}\right)^2 + \left(u_y - u_y^{'}\right)^2 + \left(u_z - u_z^{'}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$u_x - u_x' = \frac{2p_0 p_x}{p^2 + p_0^2} - \frac{2p_0 p_x'}{p'^2 + p_0^2}$$

$$u_x - u_x' = \frac{2p_0}{\left(p^2 + p_0^2\right)\left(p'^2 + p_0^2\right)} \left[p_x \left(p'^2 + p_0^2\right) - p_x' \left(p^2 + p_0^2\right) \right]$$

$$u_y - u_y' = \frac{2p_0 p_y}{p^2 + p_0^2} - \frac{2p_0 p_y'}{p'^2 + p_0^2}$$

$$u_y - u_y' = \frac{2p_0}{\left(p^2 + p_0^2\right)\left(p'^2 + p_0^2\right)} \left[p_y \left(p'^2 + p_0^2\right) - p_y' \left(p^2 + p_0^2\right) \right]$$

$$u_z - u_z' = \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2} - \frac{p'^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$$

$$u_z - u_z' = \frac{2p_0}{\left(p^2 + p_0^2\right)\left(p'^2 + p_0^2\right)} \left[p_0 \left(p^2 - p'^2\right) \right]$$

Bu eşitlikler ile

$$|\vec{u} - \vec{u}\,'| = \frac{2p_0}{\left(p^2 + p_0^2\right)^{1/2} \left(p'^2 + p_0^2\right)^{1/2}} |\vec{p} - \vec{p}\,'| \ , \qquad (2.3.13)$$

olur.

ve küre üzerindeki dalga fonksiyonu;

$$\chi\left(\vec{u}\right)=\frac{1}{\sqrt{p_0}}\left(\frac{p^2+p_0^2}{2p_0}\right)^{\frac{3}{2}}\Phi\left(\vec{p}\right) \quad , \tag{2.3.14}$$

şeklindedir. (2.3.14) eşitliğini (2.3.5) denkleminde yerine yazarak düzenlersek

$$\chi\left(\vec{u}\right)=\frac{1}{2p_0\pi}\int\frac{\chi\left(\vec{u}^{'}\right)}{\left|\vec{u}-\vec{u}^{'}\right|}d\Omega^{'} \quad , \tag{2.3.15}$$

denklemini elde ederiz.

Küre üzerindeki herhangi bir fonksiyon Küresel Harmonikler ile ifade edilebilir.

$$\chi\left(\vec{u}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_l^m\left(\theta,\phi\right) \quad , \tag{2.3.16}$$

Küresel Harmonikler Associated Legendre polinomları ile aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$Y_l^m\left(\theta,\phi\right)=A_{lm}P_l^m\left(\cos\theta\right)e^{im\phi} \quad , \tag{2.3.17}$$

Küresel Harmonikleri

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta Y_{lm}^{*}\left(\theta,\phi\right)Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=1$$

boylandırma işlemi ile A_l katsayısı

$$A_l=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}}$$

olarak hesaplanır. Böylece

$$Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{\left(l-m\right)!}{\left(l+m\right)!}}P_l^m\left(\cos\theta\right)e^{im\phi} \quad , \qquad (2.3.18)$$

olduğu görülür.

Ayrıca $\dfrac{1}{\left|\vec{u}-\vec{u}'\right|}$ terimi de küresel harmonikler cinsinden yazılabilir.

$$\frac{1}{\left|\vec{u}-\vec{u}'\right|}=\frac{1}{(u^2+u'^2-2uu'\cos\theta)^{1/2}}=\frac{1}{u}\left(1+\frac{u'^2}{u^2}-2\frac{u'}{u}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

u' ’ nün 3. kuvvetine kadar olan kısmı düzenlersek,

$$\frac{1}{\left|\vec{u}-\vec{u}'\right|}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{u'^{\lambda}}{u^{\lambda+1}}P_\lambda(\cos\theta) \quad , \qquad (2.3.19)$$

buluruz. $\dfrac{u'^{\lambda}}{u^{\lambda+1}}\cong 1$ alınırsa,

$$\frac{1}{\left|\vec{u}-\vec{u}'\right|}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}P_\lambda(\cos\theta) \quad , \qquad (2.3.20)$$

eşitliği bulunur.

$P_\lambda(\cos\theta)=\dfrac{4\pi}{2\lambda+1}\sum_{m=-\lambda}^{\lambda}Y_\lambda^m(\theta,\phi)Y_\lambda^{m*}(\theta',\phi')$ olduğunu biliyoruz. Böylece (2.3.20)

$$\frac{1}{\left|\vec{u}-\vec{u}'\right|}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{m=-\lambda}^{\lambda}\frac{4\pi}{2\lambda+1}Y_\lambda^m(\theta,\phi)Y_\lambda^{m*}(\theta',\phi') \quad , \qquad (2.3.21)$$

olarak yazılır. (2.3.18) ve (2.3.21) eşitlikleri (2.3.15) integralinde yerine yazılırsa

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_l^m(\theta,\phi)=\frac{1}{2\pi q_0}\int\sum_{l_2=0}^{\infty}\sum_{m=-l_2}^{l_2}\frac{4\pi}{2l_2+1}Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi)Y_{l_2}^{m_2*}(\theta',\phi')\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}A_{l_1m_1}Y_{l_1}^{m_1}(\theta',\phi')d\Omega' \quad , \qquad (2.3.22)$$

bulunur. Küresel harmoniklerin

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y_{l'}^{m'*}(\theta,\phi) Y_l^m(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \ , \tag{2.3.23}$$

şeklindeki diklik bağıntısını kullanarak (2.3.12) eşitliği

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{2}{p_0}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \frac{1}{2l_1+1} A_{l_1 m_1} Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi) \ , \tag{2.3.24}$$

haline indirgenir.

(2.3.24)'te eşitliğin her iki tarafını $Y_n^{m'*}(\theta,\phi)$ ile çarpıp $d\Omega$ üzerinden integral alalım.

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_l^m(\theta,\phi) Y_n^{m'*}(\theta,\phi) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \frac{2}{p_0}\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \frac{A_{l_1 m_1}}{2l_1+1} Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi) Y_n^{m'*}(\theta,\phi)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\delta_{\ln}\delta_{mm'} = \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \frac{2}{p_0(2l_1+1)} A_{l_1 m_1}\delta_{l_1 n}\delta_{m_1 m'}$$

$$\Rightarrow A_{nm'} = \frac{2}{p_0(2n+1)} A_{nm'}$$

$$\therefore \quad E = -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \ ; \ n = 0,1,2,3,\ldots \ , \tag{2.3.25}$$

olur. n'nin kesikli değerleri için (2.3.15) denkleminin genel çözümü,

$$\chi_n(u) = \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} Y_n^m(\theta,\phi) \ , \tag{2.3.26}$$

olur.

(2.3.26) denklemindeki toplamda girilen fonksiyonların her biri denklem (2.3.15)' i ayrı ayrı sağlar. Bu yüzden n' nin her bir değeri için $2n+1$ tane lineer bağımsız çözüm elde edilir. Bu $2n+1$ tane dejenerelik gözlemlendiğini açıklar.

Öz fonksiyonlarımız için küresel harmoniklerin her doğrusal kombinasyonu-nu seçmekte özgürüz, fakat kolaylık için

$$\chi_{nm}(u) = A_{nm} Y_n^m(\theta,\phi) \quad , \tag{2.3.27}$$

eşitliğini seçelim. Eğer öz fonksiyonlarımızı normalize edersek,

$$\int |\chi(u)|^2 \, d\Omega = \int \frac{1}{p_0}\left(\frac{\rho^2+\rho_0^2}{2p_0^2}\right)^3 |\Phi(\vec{p})|^2 \left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)^2 d\vec{p}$$

$$= \int \left(\frac{p^2+p_0^2}{2p_0^2}\right) |\Phi(\vec{p})|^2 \, d\vec{p}$$

ve

$$\int |\chi(u)|^2 \, d\Omega = \int |A_{nm}|^2 \, Y_n^{m*}(\theta,\phi) Y_n^m(\theta,\phi) d\Omega$$
$$= |A_{nm}|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|A_{nm}|^2}\int |\chi(u)|^2 \, d\Omega = \frac{1}{|A_{nm}|^2}\int \left(\frac{p^2+p_0^2}{2p_0^2}\right) |\Phi(\vec{p})|^2 \, d\vec{p}$$
$$= \frac{(2\pi)^2}{|A_{nm}|^2}\int |\psi(\vec{r})| d\vec{r} = 1$$

$$\Rightarrow A_{nm} = 2\pi$$

$$\therefore \quad \chi(u) = 2\pi Y_n^m(\theta,\phi) \quad , \tag{2.3.28}$$

bulunur. (2.3.28) eşitliğini kullanarak,

$$\chi(u) = 2\pi \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

$2n+1 = \dfrac{2}{q_0}$ olmak üzere,

$$\chi(u)=\sqrt{\frac{\pi}{p_0}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \quad , \tag{2.3.29}$$

bulunur. (2.3.29) eşitliğini (2.3.14)' de yerine yazarsak,

$$\sqrt{\frac{\pi}{p_0}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}=\frac{1}{\sqrt{p_0}}\left(\frac{p^2+p_0^2}{2p_0}\right)^{3/2}\Phi(\vec{p})$$

$$\Phi(\vec{p})=\sqrt{2\pi\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)^{3/2}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi} \quad , \tag{2.3.30}$$

eşitliği bulunur. $\psi(\vec{r})$ reel uzay fonksiyonlarını elde etmek için denklem (2.3.2)' yi inceleyelim.

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\Phi(\vec{p})e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}d\vec{p}$$

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\vec{p})e^{-ipr\cos\phi'}pdpd\phi' \quad , \tag{2.3.31}$$

bulunur.Burada ϕ' , $\vec{p}$ ile $\vec{r}$ arasındaki azimuthal açıdır. (2.3.30)' u (2.3.31)' de yerine yazalım.

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sqrt{2\pi\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)^{3/2}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{i(m\phi-pr\cos\phi')}pdpd\phi$$

$$\phi=\phi'+\phi_r$$

ϕ_r, r ' nin azimuthal açısıdır ve integralimiz için sabit gibi düşünülebir.

$$\psi(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{im\phi_r}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)^{3/2}P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{i(m\phi'-pr\cos\phi')}pdpd\phi'$$

$$P_n^{|m|}(\cos\theta) = P_n^{|m|}\left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)$$

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}e^{im\phi_r}\int_0^\infty \left(\frac{2p_0}{p^2+p_0^2}\right)^{3/2} P_n^{|m|}\left(\frac{p^2-p_0^2}{p^2+p_0^2}\right)\left[\int_0^{2\pi} e^{i\left(m\phi'-pr\cos\phi'\right)}d\phi'\right]pdp \quad , (2.3.32)$$

$$\int_0^\infty e^{i\left(m\phi'-pr\cos\phi'\right)}d\phi' = (-i)^m\, 2\pi J_m(pr) \quad , \qquad (2.3.33)$$

(2.3.33)' ü (2.3.32)' de yerine yazalım.

$$\psi(r) = \frac{C_{nm}(-i)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}e^{im\phi_r}\int P_n^{|m|}\left(\frac{p^2-p_0^2}{p^2+p_0^2}\right)J_m(pr)\,dp \quad , \qquad (2.3.34)$$

$x = p_0 r$ ve $y = \frac{p^2}{p_0^2}$ dersek,

$dp = \frac{p_0^2}{2}dy$ olur.

$$\Rightarrow\ \psi(\vec{r}) = \frac{C_{nm}(-i)^m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}e^{im\phi_r}\int_0^\infty P_n^{|m|}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)J_m\left(x\sqrt{y}\right)\frac{1}{(1+y)^{3/2}}dy$$

$$P_n^{|m|}\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = (-1)^{n+m}P_n^{|m|}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$$\Rightarrow\ \psi(\vec{r}) = C_{nm}(-1)^{n+m}(-i)^m\sqrt{\frac{p_0(n-|m|)!}{\pi(n+|m|)!}}e^{im\phi_r}\int_0^\infty P_n^{|m|}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\frac{J_m\left(x\sqrt{y}\right)}{(1+y)^{3/2}}dy \quad , \qquad (2.3.35)$$

Burada,

$$C_{nm}(-1)^{n+m}(-i)^m\int_0^\infty P_n^{|m|}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\frac{J_m\left(x\sqrt{y}\right)}{(1+y)^{3/2}}dy = \frac{(2x)^{|m|}}{n+\frac{1}{2}}e^{-x}L_{n-|m|}^{2|m|}(2x) \quad , \qquad (2.3.36)$$

olur. Burada C_{nm} denklem (2.3.36)' nın her iki tarafını nümerik olarak sağlar. $m \geq 0$ alırsak,

$$\int_0^{\infty} P_n^{|m|}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\frac{J_m\left(x\sqrt{y}\right)}{\left(1+y\right)^{3/2}}dy = \frac{\left(-1\right)^n\left(2x\right)^m e^{-x}}{n+\frac{1}{2}}L_{n-m}^{2m}\left(2x\right) \quad , \qquad (2.3.37)$$

$n = m = 0$ için; $\int_0^{\infty}\frac{J_0\left(x\sqrt{y}\right)}{\left(1+y\right)^{3/2}}dy = 2e^{-x}$

dir. Bu durumda $\psi\left(\vec{r}\right)$ çözümü

$$\psi\left(\vec{r}\right) = \sqrt{\frac{p_0\left(n-|m|\right)!}{\pi\left(n+|m|\right)!}}e^{im\phi_r}\frac{\left(2p_0 r\right)^{|m|}}{n+\frac{1}{2}}e^{-p_0 r}L_{n-|m|}^{2|m|}\left(2p_0 r\right) \; , \qquad (2.3.38)$$

olarak bulunur. Burada bulduğumuz çözüm daha önceki tartışmalarımızla tutarlıdır [*D. G. W. Parfitt and M. E. Portnoi*, 2002].

BÖLÜM 3. İKİ BOYUTLU EĞRİSEL YÜZEYDE HİDROJEN BENZERİ ATOM

İki boyutlu düzlemde dinamik yapının nasıl çalıştığını detaylı olarak inceledik. Burada ise eğrisellik katsayısı 1 ve -1 olan yüzeyler üzerinde öngördüğümüz dinamik sistemi (iki parçacıklı kuantum sisteminin üreteceği özdeğer ve özfonksiyonları) inceleyeceğiz.

3.1. İki Boyutlu Küresel Yüzey Üzerinde Çözüm

Bu bölümde, iki doyutlu hidrojen benzeri atomu R yarıçaplı küre yüzeyi üzerine yerleştireceğiz. Bunun için, çekirdek ile yörüngesindeki elektron arasındaki radyal uzaklık $r = R\tan\theta$ olmak üzere küre yüzeyi üzerinde $\vec{\nabla}^2$ operatörünü yazacağız. Daha sonra $\vec{\nabla}^2$ operatörünü kullanarak (2.6) bağıl özdeğer denklemini küresel yüzey üzerinde inceleyeceğiz. R yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde $\vec{\nabla}^2$ operatörü

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ , \tag{3.1.1}$$

Şeklindedir. ((EK- B)’ de gösterilmiştir). (3.1.1)’ i (2.6) denkleminde yerine yazar ve

$$\upsilon(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \ , \tag{3.1.2}$$

değişken ayrıştırma işlemini yaparak

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta(\theta)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + 2\alpha'\cot\theta + \lambda\right]\Theta(\theta) = m^2 \ , \tag{3.1.3}$$

ve

$$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi(\phi)=-m^2 \ , \tag{3.1.4}$$

denklemlerini elde ederiz (Burada $\kappa=\frac{1}{R^2}$, $\frac{\mu Ze^2}{\hbar^2}\frac{1}{\sqrt{\kappa}}=\alpha'$ ve $\frac{2\mu R^2}{\hbar^2}\mathrm{E}=\lambda$ şeklindedir). (3.1.4) denkleminin çözümleri

$$\Phi(\phi)=\mathrm{A}e^{\pm im\phi} \ ; \ \ m=0,\pm1,\pm2,.... \tag{3.1.5}$$

dir. (3.1.3) denklemini çözelim.

$$y(\theta)=\Theta(\theta)\sin^{\frac{1}{2}}\theta \ , \tag{3.1.6}$$

dönüşümü yaparsak

$$\frac{d^2}{d\theta^2}y(\theta)+\left[\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)+2\alpha'\cot\theta-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin^2}\right]y(\theta)=0 \ , \tag{3.1.7}$$

denklemini elde ederiz. Bu diferansiyel denklem için $a=1, p=0, q=-\alpha'$ dersek (EK-A),

$$r(\theta,m)=-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin^2\theta}+2\alpha'\cot\theta \ , \tag{3.1.8}$$

$$k(\theta,m)=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cot\theta-\frac{\alpha'}{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \ , \tag{3.1.9}$$

$$\mu(m)=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\alpha'^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2} \ , \tag{3.1.10}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$m>0$ için; $\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)=\mu\left(m_{\max}+1\right)$ ve $m<0$ için; $\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)=\mu\left(\left|m_{\min}\right|+1\right)$ eşitlikleri vardır (Burada $m_{\max}=\left|m_{\min}\right|=n$; $m=0,\pm1,\pm2,....,\pm n$). Bu bilgiyi kullanır ve $\frac{\hbar^2}{\mu}\kappa=\lambda^{'}$ şeklinde tanımlarsak ve $\alpha=\frac{e^2}{\hbar c}$: İnce yapı sabiti olmak üzere

$$\mathrm{E}_n=-\frac{1}{2}\frac{\mu Z^2\alpha^2c^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\lambda^{'}}{2}n\left(n+1\right) \ , \tag{3.1.11}$$

şekilindeki özdeğer denklemi elde ederiz. Ayrıca Basamak işlemcileri de

$$O_{\pm}\left(\theta,m\right)=\pm\frac{d}{d\theta}-\left(m-\frac{1}{2}\right)\cot\theta+\frac{\alpha'}{\left(m-\frac{1}{2}\right)} \ , \tag{3.1.12}$$

şeklindedir. $m>n$ iken özdeğerler olmadığından

$$O_{+}\left(\theta,n+1\right)y_n^n\left(\theta\right)=0 \ , \tag{3.1.13}$$

eşitliği vardır. Buradan

$$y_n^n\left(\theta\right)=\mathrm{N}_n\left(\sin\theta\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{\beta}{2}\theta} \quad ; \quad \frac{\alpha'}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\beta}{2} \ , \tag{3.1.14}$$

ve

$$\Theta_n^n\left(\theta\right)=\mathrm{N}_n\sin^n\theta e^{-\frac{\beta}{2}\theta} \ , \tag{3.1.15}$$

olarak buluruz. $m=n$ de bulduğumuz bu çözümü ve Ladder operatörleri kullanarak $\Theta_n^m\left(\theta\right)$ genel çözümlerini bulalım.

$$y_n^{m-1}\left(\theta\right)=\left[\mu\left(n+1\right)-\mu\left(m\right)\right]^{-\frac{1}{2}}O_{-}\left(\theta,m\right)y_n^m\left(\theta\right) \ , \tag{3.1.16}$$

$$\left[\mu(n+1)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{\beta^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(2m-1)\left[\frac{1}{(n+m)(n-m+1)\left[(2m-1)^2+\beta^2\right]}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y_n^{m-1}(\theta)=(2m-1)\left\{\frac{1}{(n+m)(n-m+1)\left[(2m-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}O_-(\theta,m)\,y_n^m(\theta)\ , \qquad (3.1.17)$$

$m=n$ için

$$y_n^{n-1}(\theta)=(2n-1)\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{d}{d\theta}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\cot\theta+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\frac{\beta}{2}\right\}\sin^{n+\frac{1}{2}}\theta e^{-\frac{\beta}{2}\theta}$$

$$y_n^{n-1}(\theta)=(-1)\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}2n\sin^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]\sin^{2n-1}e^{-\beta\theta}$$

$m=n-1$ için

$$y_n^{n-2}(\theta)=(2n-3)\left\{\frac{1}{(2n-1)(2)\left[(2n-3)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{d}{d\theta}-\left(n-\frac{3}{2}\right)\cot\theta+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n-\frac{3}{2}\right)}\frac{\beta}{2}\right\}y_n^{n-1}(\theta)$$

$$y_n^{n-2}(\theta)=(-1)^2\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2)\left[(2n-2)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times 2n(2n-1)(\sin\theta)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]\left\{(2n-3)\sin^{2n-2}\theta e^{-\beta\theta}\beta\sin^{2n-1}\theta e^{-\beta\theta}\right\}$$

$$y_n^{n-2}(\theta)=(-1)^2\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2)\left[(2n-2)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times 2n(2n-1)(\sin\theta)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]^2\sin^{2n-3}\theta e^{-\beta\theta}$$

$n-m$ kere tekrarlarsak

$$y_n^{m}(\theta)=(-1)^{n-m}\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdots\left\{\frac{1}{(n-m)(n+m-1)\left[(2m+1)^2+\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times 2n(2n-1)\ldots(n+m+1)(\sin\theta)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sin^{2m+1}\theta e^{-\beta\theta}$$

$$y_n^{m}(\theta)=C_{n,m}\frac{(2n)!}{(n+m)!}(\sin\theta)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sin^{2m+1}\theta e^{-\beta\theta}\ , \qquad (3.1.26)$$

ve

$$\Theta_n^{m}(\theta)=C_{n,m}\frac{(2n)!}{(n+m)!}(\sin\theta)^{-(n+1)}e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sin^{2m+1}\theta e^{-\beta\theta}\ , \qquad (3.1.27)$$

çözümlerini elde ederiz. Genelleştirdiğimiz bu çözümlerde m'nin tüm değerleri ($m=-n,-n+1,\ldots,0,\ldots,n-1,n$) için $2n+1$ tane farklı dalga fonksiyonu vardır. Yani, 2n+1 dejenerelik vardır.

3.2. İki Boyutlu Hiperbolik Yüzey Üzerinde Çözüm

Bu bölümde, küresel yüzey üzerinde incelediğimiz iki boyutlu hidrojen benzeri atomu hiperbol yüzeyi üzerine taşıyarak dinamik yapısındaki değişiklikleri tartışacağız. Bunun için bölüm 3.1' de θ yerine $i\theta$ ve R yerine iR yazarak problemi hiperbol yüzeyine taşırız.

$$r_H = R\tanh\theta \ , \tag{3.2.1}$$

ve

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2\sinh\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R^2\sinh\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2\sinh^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ , \tag{3.2.2}$$

olur. Bu dumda (2.6) özdeğer denklemini

$$\mathcal{V}(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \ , \tag{3.2.3}$$

değişken ayırma işlemi ile

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sinh\theta\frac{d}{d\theta}\right)\Theta(\theta) + \left\{\lambda - \frac{m^2}{\sinh^2\theta} + 2\alpha'\coth\theta\right\}\sinh\theta\,\Theta(\theta) = 0 \ , \tag{3.2.4}$$

olarak yazarız (Burada $\kappa = \frac{1}{R^2}$, $\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{\kappa}E = \lambda$ ve $\frac{\mu z e^2}{\hbar^2}\frac{1}{\sqrt{\kappa}} = \alpha'$ dır)

$$y(\theta) = \Theta(\theta)\sinh^{1/2}\theta \ , \tag{3.2.5}$$

dersek (3.2.4) denklemi

$$\frac{d^2}{d\theta^2}y(\theta) + \left\{\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) - \frac{\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}{\sinh^2\theta} + 2\alpha'\coth\theta\right\}y(\theta) = 0 \ , \tag{3.2.6}$$

denklemine dönüşür. $a = i$, $p = 0$, $z = \theta$, $q = -\alpha'$ için

$$r(\theta,m)=-\frac{\left(m^2-\frac{1}{4}\right)}{\sinh^2\theta}+2\alpha\coth\theta\ , \tag{3.2.7}$$

$$k(\theta,m)=-\left(m-\frac{1}{2}\right)\coth\theta-\frac{\alpha'}{\left(m-\frac{1}{2}\right)}\ , \tag{3.2.8}$$

$$\mu(m)=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\alpha'^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}\ , \tag{3.2.9}$$

olur. $m>0$ için

$$\lambda_n=\mu(m_{\max}+1)\ , \tag{3.2.12}$$

ve $m<0$ için

$$\lambda_n=\mu(|m_{\min}|+1)\ , \tag{3.2.13}$$

$$\Rightarrow m_{\max}=|m_{\min}|=n$$

$$m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n$$

Bu bilgiler doğrultusunda

$$\frac{\hbar^2}{\mu}\kappa=\lambda'\ , \tag{3.2.13}$$

olarak yazarsak enerji özdeğerini α ince yapı sabiti olmak üzere

$$E_n=-\frac{1}{2}\frac{\mu Z^2\alpha^2c^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{\lambda'}{2}n(n+1)\ , \tag{3.2.14}$$

şeklinde buluruz. Basamak işlemcileri ise

$$O_{\pm}(\theta,m)=\pm\frac{d}{d\theta}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\coth\theta-\frac{\alpha'}{\left(m-\frac{1}{2}\right)}\ , \tag{3.2.15}$$

şeklindedir. $m>n$ iken özdeğerler olmadığından,

$$O_{+}(\theta,n+1)y_n^n(\theta)=0\ , \tag{3.2.16}$$

eşitliğini kullanarak

$$y_n^n(\theta)=N\sinh^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta\ e^{-\frac{\beta}{2}\theta}\ , \tag{3.2.17}$$

ve

$$\Theta_n^n(\theta)=N\sinh^{-n}\theta e^{-\frac{\beta}{2}\theta}\ , \tag{3.2.18}$$

olarak buluruz (Burada $\frac{\alpha'}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\beta}{2}$ dır). Burada bulduğumuz çözümler sadece $m=n$ durumuna karşı gelen çözümdür. Çözümleri genelleştirebilmek için

$$y_n^{m-1}(\theta)=\left[\mu(n+1)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}}O_{-}(\theta,m)\,y_n^m(\theta)\ , \tag{3.2.19}$$

eşitliğini kullanırız.

$$\left[\mu(n+1)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{\beta^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=(2m-1)\left[\frac{1}{(n+m)(n-m+1)\left[(2m-1)^2-\beta^2\right]}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y_n^{m-1}(\theta)=i(2m-1)\left\{\frac{1}{(n+m)(n-m+1)\left[(2m-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}} O_{-}(\theta,m)\,y_n^m(\theta)\ , \quad (3.2.20)$$

Artık m ’ nin tüm değerleri için normalize özfonksiyonları genelleştirebiliriz. Bunun içi (3.2.20)’ de (3.2.17)’ yi yerine yazalım.

$m=n$ için

$$y_n^{n-1}(\theta)=i(2n-1)\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times(-1)\left[\frac{d}{d\theta}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\coth\theta-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\frac{\beta}{2}\right]\mathrm{N}_n\sinh^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos^{-1}\theta e^{-\frac{\beta}{2}\theta}$$

$$y_n^{n-1}(\theta)=(-1)\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}} i(2n)\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}$$

$$\times\left[-(2n-1)\sinh^{-(2n-1)}\theta e^{-\beta\theta}-\beta\sinh^{-(2n+1)}\theta e^{-\beta\theta}\right]$$

$$y_n^{n-1}(\theta)=(-1)\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}} i2n\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\right]\sinh^{-(2n-1)}\theta e^{-\beta\theta}$$

$m=n-1$ için

$$y_n^{n-1}(\theta)=(-1)^2(i)^2\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2)\left[(2n-3)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}2n(2n-1)$$

$$\times\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left\{\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\left[-(2n-3)\sinh^{-2n}\theta\cosh\theta e^{-\beta\theta}-\beta\sinh^{-(2n-1)}\theta e^{-\beta\theta}\right]\right\}$$

$$y_n^{n-1}(\theta)=(-1)^2(i)^2\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{(2n-1)(2)\left[(2n-3)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}2n(2n-1)$$

$$\times\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\right]^2\sinh^{-(2n-3)}\theta e^{-\beta\theta}$$

Bu işlem $n-m$ kere tekrarlanırsa

$$y_n^{m}(\theta)=(-i)^{n-m}\,\mathrm{N}_n\left\{\frac{1}{(2n)(1)\left[(2n-1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdots\left\{\frac{1}{(n-m)(n+m-1)\left[(2m+1)^2-\beta^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}2n\ldots(n+m+1)$$

$$\times\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sinh^{-(2m+1)}\theta e^{-\beta\theta}$$

$$y_n^{m}(\theta)=(-i)^{n-m}\,\mathrm{A}_{n,m}\frac{(2n)!}{(n+m)!}\sinh^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sinh^{-(2m+1)}\theta e^{-\beta\theta}\;,\quad(3.2.21)$$

ve

$$\Theta_n^{m}(\theta)=(-i)^{n-m}\,\mathrm{A}_{n,m}\frac{(2n)!}{(n+m)!}\sinh^{(n+1)}\theta e^{\frac{\beta}{2}\theta}\left[\sinh^{-2}\theta\frac{d}{d\theta}\right]^{n-m}\sinh^{-(2n+1)}\theta e^{-\beta\theta}\;,\quad(3.2.22)$$

şeklindeki genel çözüm elde edilir. Ayrıca (3.1.11) ve (3.2.14) enerji özdeğerlerine bakılacak olursa $\kappa=0$ da (2.1.9) enerji özdeğerine dönüşürler. O halde $\kappa=0$, $\kappa=+1$ ve $\kappa=-1$ için enerji özdeğerini

$$\mathrm{E}_n=-\frac{1}{2}\frac{\mu Z^2\alpha^2c^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\hbar^2}{\mu}\kappa n(n+1)\;,\qquad(3.2.23)$$

şeklinde genelleştirebiliriz.

BÖLÜM 4. MAGNETİK ALAN İÇİNDE HİDROJEN BENZERİ ATOM

Bu bölümde elektromagnetik alan içindeki yüklü parçacıkları ik boyutlu düzlem geometriyi göz önüne alarak inceleyeceğiz. Elektromagnetik alan söz konusu olduğunda ayar seçimini kullanmalıyız. Çünkü ayar seçimi elektromagnetik alanın doğasında ortaya çıkan bir olgudur. Biz de düzleme dik ve sabit bir $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\hat{k}$ magnetik alanı içinde iki parçacık problemini yani hidrojen benzeri atom modelini tartışacağız. Bunun için ilk olarak simetrik ayara göre tanımlanmış

$$\vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(-y\hat{i} + x\hat{j}\right) , \tag{4.1}$$

vektör potansiyelini göz önüne alarak sistemin iki boyutlu özdeğer denklemini yazalım.

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{1}{2m}\left[\vec{\mathrm{P}} + \frac{q}{c}\vec{\mathrm{A}}\right]^2 + q\phi , \tag{4.2}$$

$m = \hbar = e = 1$, $q = -1$ ve $\phi = \dfrac{z}{r}$ olacak şekilde

$$\hat{\mathrm{H}} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 + \frac{\mathrm{B}}{2c}\hat{L}_z + \frac{1}{8}\mathrm{B}^2\left(x^2 + y^2\right) - \frac{z}{r} , \tag{4.3}$$

elde ederiz. Özdeğer denklemi polar koordinatlarda yeniden yazarsak

$$\left(-\frac{1}{2}\vec{\nabla}_r^{\,2} + \frac{\mathrm{B}}{2c}\hat{L}_z + \frac{1}{8c^2}\mathrm{B}^2 r^2 - \frac{z}{r}\right)\Psi\left(r,\phi\right) = \mathrm{E}\Psi\left(r,\phi\right) , \tag{4.4}$$

şeklinde gelir. Burada

$$\hat{L}_z\Psi\left(r,\phi\right) = m\Psi\left(r,\phi\right) ;\ m = 0, \pm 1, \pm 2 \pm 3, \ldots.$$

şeklindedir çünkü sıra değiştirme bağıntısına uyar. (4.4) deki laplasyeni polar koordinatlarda yeniden yazar ve

$$\Psi(r,\phi)=\frac{R(r)}{\sqrt{r}}\frac{\Phi(\phi)}{\sqrt{2\pi}} \;, \tag{4.5}$$

değişken ayrıştırma işlemini ile düzenleyerek radyal denklemi

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{2}\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}+\frac{\mathrm{B}^2r^2}{8c^2}-\frac{z}{r}\right)R(r)=\left(\mathrm{E}-\frac{\mathrm{B}m}{2c}\right)R(r) \;, \tag{4.6}$$

olarak elde ederiz. Burada $\omega_c=\frac{\mathrm{B}}{c}$ ve $\omega_L=\frac{1}{2}\omega_c$ olarak yazar ve $\rho=\sqrt{\omega_L}\,r$ şeklinde boyutsuz değişken tanımlayarak

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\rho^2}-\rho^2+\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}\,\rho}\right]R(\rho)=\left(2m-\frac{2\mathrm{E}}{\omega_L}\right)R(\rho) \;, \tag{4.7}$$

denklemini elde ederiz. Şimdi (4.18) denkleminin $\rho\to\infty$ ve $\rho\to 0$ asimptotik çözümlerini inceleyelim.

$\rho\to\infty$ limitinde (4.7) denkleminin çözümü

$$R(\rho)\sim e^{-\rho^2/2} \;, \tag{4.8}$$

ve

$\rho\to 0$ limitinde

$$R(\rho)\sim \rho^{\pm(m\pm 1/2)} \;, \tag{4.9}$$

şeklindedir. $\rho\to 0$ limitinde $R(\rho)$' nun sonlu olması m' nin pozitif olmasıyla mümkündür. Bu durumda çözüm

$$R(\rho)=\rho^{\left(|m|+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\sum_{v}a_v\rho^{v+s} \;, \tag{4.10}$$

olur. Artık $R(\rho)$' nun kendisini ve türevlerini (4.7) denkleminde yerine yazarak ara bölge çözümlerini inceleyebiliriz.

$$\frac{2\mathrm{E}}{\omega_L} - 2m = \varepsilon \ , \qquad (4.11)$$

olarak tanımlar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$2s|m|a_0\rho^{s-2} + (s+1)(2|m|+1)a_1\rho^{s-1} + \frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_0\rho^{s-1}$$
$$+\sum_{v=1}^{\infty}\left\{(v+s+1)(2|m|+v+s+1)a_{v+1} + \left[2(v+|m|+s)-\varepsilon\right]a_{v-1} + \frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_v\right\}\rho^{v+s-1} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$2s|m|a_0 = 0 \ \Rightarrow \ s = 0 \ , \qquad (4.12)$$

olur. Böylece

$$a_1 = \frac{-1}{(2|m|+1)}\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_0 \ , \qquad (4.13)$$

ve

$$a_{v+1} = \frac{1}{(v+1)(2|m|+v+1)}\left\{-\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_v + \left[2(|m|+v)-\varepsilon\right]a_{v-1}\right\} ; \ v \geq 1 \ , \qquad (4.14)$$

şeklindeki katsayılar arasındaki ilişkiyi veren bağıntılar elde edilir.

a_v ve a_{v+1} ' ler sıfır seçilirse,

$$\varepsilon = 2(|m|+v)$$
$$\varepsilon = \frac{2\mathrm{E}}{\omega_L} - 2m$$

$$\mathrm{E} = \omega_L\left(m+|m|+v\right) \ , \qquad (4.15)$$

elde edilir. Şimdi tekrarlama bağıntısında $v \to v-1$ yazarsak,

$$a_v = \frac{1}{v\left(2|m|+v\right)}\left\{-\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_{v-1} + \left[2\left(|m|+v-1\right)-\varepsilon\right]a_{v-2}\right\}\ ;\ v \geq 2\ , \tag{4.16}$$

olur.

$$a_v = 0 \text{ ve } \varepsilon = 2\left(|m|+v\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_{v-1} = \left[2\left(|m|+v-1\right)-2\left(|m|+v\right)\right]a_{v-2}$$

$$a_{v-1} = -\frac{\sqrt{\omega_L}}{z}a_{v-2}\ ;\ v \geq 2\ , \tag{4.17}$$

$v = 2$ için;

$$a_1 = -\frac{\sqrt{\omega_L}}{z}a_0$$

$a_1 = \dfrac{1}{\left(2|m|+1\right)}\dfrac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_0$ olduğunu görmüştük. Bu durumda

$$\omega_{L_1} = \frac{z^2}{|m|+\frac{1}{2}}\ , \tag{4.18}$$

olur. Enerji özfonksiyon ve enerji özdeğerleri ise

$$R(\rho) = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\left(a_0\rho^0 + a_1\rho^1\right)\ ;\ a_0 = 1$$

$$R(\rho) = \rho^{|m|+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\left(1-\frac{\sqrt{\omega_L}}{z}\rho\right)$$

$$\rho = \sqrt{\omega_{L_1}}\,r$$

$$R(r)=\left(\sqrt{\omega_{L_1}}\,r\right)^{|m|+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{z^2}{\left(2|m|+1\right)}r^2\right)\left(1-\frac{z}{|m|+\frac{1}{2}}r\right)$$

$$R(r)=\left(\sqrt{\omega_{L_1}}\right)^{|m|+\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{z^2}{\left(2|m|+1\right)}r^2\right)r^{|m|}\left(1-\frac{z}{|m|+\frac{1}{2}}r\right)$$

$$\Rightarrow\Psi(r,\phi)\sim\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{\left(2|m|+1\right)}r^2\right)r^{|m|}\left(1-\frac{z}{|m|+\frac{1}{2}}r\right)\ , \tag{4.19}$$

ve

$$\mathrm{E}=\frac{2z^2}{\left(2|m|+1\right)}\left(|m|+m+2\right)\ , \tag{4.20}$$

0lur.

$v=3$ için;

Tekrarlama bağıntısında $v\to v-2$ yazalım.

$$a_{v-1}=\frac{1}{(v-1)\left(2|m|+v-1\right)}\left\{-\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_{v-2}+\left[2\left(|m|+v-2\right)-\varepsilon\right]a_{v-3}\right\}\ ;\ v\geq 3\ , \tag{4.21}$$

$$\varepsilon=2\left(|m|+v\right)$$

$$a_2=\frac{1}{(2)\left(2|m|+2\right)}\left\{-\frac{2z}{\sqrt{\omega_L}}a_1-4a_0\right\}\ , \tag{4.22}$$

$$a_2=\frac{\sqrt{\omega_L}}{z}a_1$$

ve

$$a_0 = -\frac{\left(2|m|+1\right)}{2}\frac{\sqrt{\omega_L}}{z}a_1$$

ise

$$\omega_{L_2} = \frac{z^2}{4|m|+3} \ , \qquad (4.23)$$

olur. Enerji özdeğeri ve enerji özfonksiyonu ise

$$\mathrm{E} = \frac{z^2}{\left(4|m|+3\right)}\left(|m|+m+3\right) \ , \qquad (4.24)$$

ve

$$\Psi\left(r,\phi\right) \sim \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} r^{|m|} \exp\left(-\frac{\omega_{L_2}}{2}r^2\right)\left[a_0 + a_1\sqrt{\omega_{L_1}}r + a_2\omega_{L_2}r^2\right]$$

$$a_0 = 1$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{\sqrt{\omega_{L_1}}}{z} \text{ ve } a_2 = \frac{\omega_{L_1}}{z^2}$$

$$\Psi\left(r,\phi\right) \sim \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} r^{|m|} \exp\left(-\frac{z^2}{2\left(4|m|+3\right)}r^2\right)\left[1 - \frac{\omega_{L_1}}{z}r + \frac{\omega_{L_1}\omega_{L_2}}{z^2}r^2\right]$$

$$\Psi\left(r,\phi\right) \sim \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} r^{|m|} \exp\left(-\frac{z^2}{2\left(4|m|+3\right)}r^2\right)\left[1 - \frac{2z}{2|m|+1}r + \frac{2z^2}{\left(2|m|+1\right)\left(4|m|+3\right)}r^2\right], \qquad (4.25)$$

olur. Bu metotla enerji özdeğerleri pozitif çıkmaktadır. $\vec{\mathrm{B}} = 0$ yani magnetik alanı kaldırırsak enerji özdeğerimiz

$$\mathrm{E}_{nm}(\mathrm{B}=0) = -\frac{Z^2}{2\left(n+|m|-\frac{1}{2}\right)^2}$$

olur. Çok küçük B söz konusu olduğunda bütün enerji özdeğerleri negatif olur.

SONUÇ

Bu çalışmada analitik olarak çözümü çok iyi bilinen hidrojen benzeri atom modeli, kuantum mekaniksel dinamik sistem olarak düz, kapalı eğriliğe ve açık eğriliğe sahip iki boyutlu yüzeylerde incelendi.

Günümüz kozmolojisinde, yüksek enerji fiziğinde ve nano malzeme yapımında oldukça önemli bir yere sahip olan iki boyutlu kuantum temel dinamiğini oluşturan hidrojen benzeri atom modeli, hem matematiksel olarak hem de fiziksel olarak orijinal bir yapıya sahiptir. Matematiksel olarak analiz bize karmaşık yapıda olan benzer sistemleri anlamamıza olanak sağlayacaktır. Bu çalışmada özellikle, farklı yöntemler kullanılarak çözümlerin yegane olduğu bir daha gösterilmiştir. Öncelikle düz uzayda iki boyutlu hidrojen benzeri atomun dinamiği göz önüne alınmıştır. Hamilton işlemcisinin ürettiği özdeğer denklemi, polar koordinatlar kullanılarak çarpanlarına ayırma tekniği ile analitik olarak çözülmüştür. Sonra sadece polar koordinatlarda değil, tıpkı üç boyutlu hidrojen benzeri atom da olduğu gibi parabolik koordinatlar kullanılarak ta Hamilton işlemcisinden elde edilen özdeğer denklemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümlere olanak sağlamıştır. Her iki koordinat sisteminde özdeğer denklemimizi çözdüğümüzde aynı enerji özdeğerlerini elde ederiz. Her iki çözüm birbirleri ile tutarlıdır. Fakat düz uzaydaki hidrojen benzeri atomun enerji özfonksiyonları polar koordinatlarda elde ettiğimiz enerji özfonksiyonlarından farklıdır. Polar koordinatlarda enerji özdeğerlerini veren özfonksiyonumuz associated Laguerre polinomları ile ifade edilirken parabolik koordinatlarda elde ettiğimiz enerji özfonksiyonumuz Hermite polinomlarından oluşmaktadır. Grup temsilleri ve işlemcileri çarpanlarına ayırma yöntemi kullanılarak her iki çözümün özfonksiyonlarının özdeş olduğunu gösterebiliriz [*Duru I. H. ,1982*]. Yine düz yüzeyde kuantum dinamiğimizin Hamilton işlemcisini çarpanlarına ayırarak elde ettiğimiz özdeğer denkleminin çözümleri yukarda bahsettiğimiz iki ayrı koordinat sistemi ile elde ettiğimiz çözümlerle büyük bir uyum içerisindedir. Düzlemdeki iki boyutlu hidrojen benzeri atom kuantum sistemimiz parçacıklar arasında bir bağlılık içerdiği için enerjimiz her zaman negatiftir. Fakat iki boyutlu hidrojen benzeri atomumuzun bulunduğu düzleme dik doğrultuda sabit bir magnetik alan ($\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\hat{k}$, $\mathrm{B} = \text{sabit}$) ile birlikte göz önüne aldığımızda enerji özdeğerleri pozitif olarak bulunmuştur. Bulduğumuz çözümlerde $\mathrm{B} = 0$ ve B yeterince küçük olduğu durumlarda enerji özdeğerimiz negatiftir [*Taut M. , 1995*]. Alan etkileşimi ile ilgili matematiksel olarak geliştirdiğimiz yöntemler fiziksel yapının detayları ile ilgili yeteri kadar bilgi vermemektedir. Gelecekte bu problem için daha fazla bilgi içeren bir analitik çözüme ihtiyaç vardır.

Aralarında merkezcil etkiye sahip olan sistemin ürettiği negatif enerji kuantum sisteminin geometrisine eğrisellik kattığımızda nasıl değişimler göstereceği küçükler dünyasında üreteceğimiz teknolojide önemli bir yer oluşturur. 3. bölümde hidrojen benzeri atomu düz olmayan iki boyutlu kapalı ve açık eğriselliğe sahip yüzey üzerinde kuantum mekaniksel olarak inceledik. Bağımlı bir sistem oluşturan iki cisimli hidrojen benzeri atom modelimizin enerji özdeğeri

$$\mathrm{E}_n = -\frac{1}{2}\frac{\mu Z^2\alpha^2 c^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\hbar^2}{\mu}\kappa n\left(n+1\right)$$

olarak elde edilmiştir. Bu sonuçtan anlaşılacağı gibi ilk terim eğriselliğin olmadığı yani düz yüzeydeki enerji özdeğerini vermektedir. Eğrisellik katsayısı $+1$ olduğu zaman enerji özdeğerimize pozitif bir terim gelmektedir. Eğrisellik katsayısı -1 olduğunda ise geometrinin getirdiği terim negatif olmaktadır. İki boyutlu hidrojen benzeri atomunun üç durumda da taban durum enerjisi aynıdır.

Matematiksel olarak önemli bir yapıya sahip olan projection yöntemini alt başlık 2.3 te detaylı olarak inceledik. Özdeğer denklemimizi momentum uzayına taşıyarak özdeğerin diferansiyel denklemini integral denklemine dönüştürmüş olduk. Sonra bu denklemin özdeğer ve özfonksiyonlarını *stereographic projection* ile hesapladık. Daha sonra diğer bulduğumuz sonuçlarla büyük bir uyum içinde olduğunu gördük.

KAYNAKLAR

Schiff Leonard I. , Quantum Mechanics, 1949

Gottfried Kurt and **Yan** Tung-Mow, Quantum Mechanics Fundamentals, Springer, 2004

Brannan Davıd A. and **Esplen** Matthew J. , and **Gray** Jeremy J. ,Gambridge, 2000

Bayın S. , Mathematical Methods In Science and Engineering A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2006

Arfken , G.B. , and H. J. **Weber**, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2005

Bell W. W. , Special Function for Sciencist and Engineers, Dover Publications, 2004

Parfitt D. G. , and M. E. **Portnoi**, The two-dimensional hydrogen atom revisited, Journel of Mathematical Physics, 30, 4681-4691, 2002

Duru, I. H. , and H. **Kleinert**, Quantum Mechanics of H-Atom from Path Integrals, Fortschritte der Physic, 30, 401-435, 1982

Bander, M. , and C. **Itzykson**, Group Theory and the Hydrogen Atom (I), 38, 330-345, 1966

Higgs, P. W. , Dynamical symmetries in a spherical geometry I, J. Pyhs. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 3, 1979

Leemon, H. I. , Dynamical symmetries in a spherical geometry II, J. Pyhs. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 4, 1979

Infeld, L. , On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems, Physical Review, Vol. 59, 737-747, 1941

Taut, M. , Two-dimensional hydrogen in a magnetic field:analytical solutions, J. Pyhs. A: Math. Gen., 28, 2081-2085, 1995

EK-A. FAKTORİZASYON YÖNTEMİ

$$\frac{d^2}{dz^2} y_{\lambda_l}^m(z) + \left\{\lambda + r(z,m)\right\} y_{\lambda_l}^m(z) = 0 \ , \qquad \text{(Ek.A.1)}$$

(Ek.A.1) denklemini operatör biçiminde yazabiliriz.

$$£(z,m) y_{\lambda_l}^m(z) = -\lambda_l y_{\lambda_l}^m(z) \ , \qquad \text{(Ek.A.2)}$$

Burada

$$£(z,m) = \pm\frac{d^2}{dz^2} + r(z,m) \ , \qquad \text{(Ek.A.3)}$$

dir.Şimdi

$$£(z,m) = O_+(z,m) O_-(z,m) \ , \qquad \text{(Ek.B.4)}$$

olacak şekilde

$$O_\pm(z,m) = \pm\frac{d}{dz} - k(z,m) \ , \qquad \text{(Ek.A.5)}$$

gibi iki operatör tanımlayalım. Eğer,

$$O_+(z,m) O_-(z,m) y_{\lambda_l}^m(z) = \left[\lambda - \mu(m)\right] y_{\lambda_l}^m(z) \ , \qquad \text{(Ek.A.6)}$$

ya da

$$O_-(z,m+1) O_+(z,m+1) y_{\lambda_l}^m(z) = \left[\lambda - \mu(m+1)\right] y_{\lambda_l}^m(z) \ , \qquad \text{(Ek.A.7)}$$

denklemlerinden biri (Ek.A.1) denkleminin yerine geçerse, (Ek.A.1) denklemini foktorize ettiğimizi söyleyebiliriz.

Denklem (Ek.A.6) ve denklem (Ek.A.7)’ de $O_+(z,m)$ ve $O_-(z,m)$ tanımlamalarını yerine yazarak, $k(z,m)$ ve $\mu(m)$’ i aynı anda sağlayan iki denklem elde edriz.

$$\left(\frac{d}{dz}-k(z,m)\right)\left(-\frac{d}{dz}-k(z,m)\right)y_{\lambda_l}^{m}(z)=\left[\lambda-\mu(m)\right]y_{\lambda_l}^{m}(z)$$

$$\left(\frac{d}{dz}-k(z,m)\right)\left(-\frac{dy_{\lambda_l}^{m}(z)}{dz}-k(z,m)\,y_{\lambda_l}^{m}(z)\right)=\left[\lambda-\mu(m)\right]y_{\lambda_l}^{m}(z)$$

$$-\frac{d^2}{dz^2}y_{\lambda_l}^{m}(z)-\left(\frac{d}{dz}k(z,m)\right)y_{\lambda_l}^{m}(z)+k^2(z,m)\,y_{\lambda_l}^{m}(z)=\left[\lambda-\mu(m)\right]y_{\lambda_l}^{m}(z)$$

(Ek.A.1)’ den,

$$\frac{d^2}{dz^2}y_{\lambda_l}^{m}(z)=-\left\{\lambda-r(z,m)\right\}y_{\lambda_l}^{m}(z)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\therefore\ \ -\frac{d}{dz}k(z,m)+k^2(z,m)=-r(z,m)-\mu(m)\ , \qquad \text{(Ek.A.8)}$$

Benzer şekilde

$$-\frac{d}{dz}k(z,m+1)+k^2(z,m+1)=-r(z,m+1)-\mu(m+1)\ , \qquad \text{(Ek.A.9)}$$

Ladder Operatörler ve Faktorizasyon Teorisi

Şimdi faktorizasyon yönteminin temel düşüncesini beş ana teoremle özetleyeceğiz. İlk

Teorem, verilen $y_{\lambda_l}^{m}(z)$' nin farklı m' ler ile nasıl çözümler ürettiğini söyler.

Teorem I : Eğer $y_{\lambda_l}^{m}(z)$ denklem (Ek.A.2)' nin λ ve m özdeğerlerine karşı gelen bir çözümü ise,

$$O_{+}(z,m+1)\,y_{\lambda_l}^{m}(z)=y_{\lambda_l}^{m+1}(z)\ , \qquad \text{(Ek.A.10)}$$

ve

$$O_{-}(z,m)\,y_{\lambda_l}^{m}(z)=y_{\lambda_l}^{m-1}(z)\ , \qquad \text{(Ek.A.11)}$$

aynı λ' lar fakat farklı m' lere karşı gelen çözümleri gösterir.

Teorm II : Eğer $y_1(z)$ ve $y_2(z)$

$$y_1^{*}(z)\,y_2(z)\Big|_b=y_1^{*}(z)\,y_2(z)\Big|_a\ , \qquad \text{(Ek.A.12)}$$

sınır koşulunu sağlayan iki çözüm ise

$$\int_a^b dz y_1^{*}(z)\big[O_{-}(z,m)\,y_2(z)\big]=\int_a^b dz y_2(z)\big[O_{+}(z,m)\,y_1^{*}(z)\big]^{*}\ , \qquad \text{(Ek.A.13)}$$

O_{+} ve O_{-} Hermitseldir deriz, ki $y_1(z)$ ve $y_2(z)$' ye göre $O_{-}=O_{+}$ dır.Not etmek gerekir ki, faktorizasyon yöntemi için gereken (Ek.A.12) sınır koşulu,uç noktalarda çözümlerin kayıp olduğu durum gibi periyodik sınır koşulları içerir.

Teorem III : Eğer

$$\int_a^b dz\big[y_{\lambda_l}^{m}(z)\big]^2\ , \qquad \text{(Ek.A.14)}$$

varsa ve $\mu(m)$ m ' nin artan bir fonksiyonu ise, $(m>0)$

$$\int_a^b dz\left[O_+(z,m+1)\,y_{\lambda_l}^m(z)\right]^2 \ , \tag{Ek.A.15}$$

vardır. Eğer $\mu(m)$ m ' lerin azalan bir fonksiyonu ise, $(m>0)$

$$\int_a^b dz\left[O_-(z,m-1)\,y_{\lambda_l}^m(z)\right]^2 \ , \tag{Ek.A.16}$$

vardır. $O_+(z,m+1)\,y_{\lambda_l}^m(z)$ ve $O_-(z,m-1)\,y_{\lambda_l}^m(z)$, $y_{\lambda_l}^m(z)$ ile aynı sınır koşulunu sağlar.

Teorem IV : Eğer $m>0$ ve $\mu(m)$ artan bir fonksiyon ise λ, $\lambda=\mu(l+1)$ olarak verilir ve m için $m_{\max}=l$ maksimum değeri vardır. Eğer $m>0$ ve $\mu(m)$ azalan bir fonksiyon ise $\lambda=\mu(l')$ ve m için $m_{\min}=l'$ minimum değeri vardır.

Teorem V : Teorem III geçerli iken,sadece kare integrallenebilirlik değil aynı zamanda özfonksiyonların normallenebilirliğini de garantilemek için Ladder operatörleri düzenleyebiliriz. $\mu(m)$ m ' nin artan bir fonksiyonu iken, normallenmiş Ladder operatörleri yeniden tanımlayabiliriz.

$$£_\pm(z,l,m)=\left[\mu(l+1)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}} O_\pm(z,m) \ , \tag{Ek.A.17}$$

$\mu(m)$ azalan bir fonksiyon ise,

$$£_\pm(z,l,m)=\left[\mu(l)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}} O_\pm(z,m) \ , \tag{Ek.A.19}$$

Faktorizasyon Yöntemi ile Çözümler

Şimdi bir denklemin özdeğer ve özfonksiyonlarını, onu bir kez faktorize ederek elde edebiliriz, ki verilen bir $r(z,m)$ ' ye karşı gelen $k(z,m)$ ve $\mu(m)$

fonksiyonlarını daha önceden biliyoruz. $m>0$ için, $\mu(m)$'nin artan ya da azalan bir fonksiyon olup olmamasına bağlı iki durum vardır.

Durum I($m>0$ ve $\mu(m)$ artan bir fonksiyondur.) **:**

Bu durumda, Teorem IV gereği m için bir maksimum vardır.

$$m=0,1,2,....,l \quad , \qquad \text{(Ek.A.20)}$$

ve λ_l özdeğerleri

$$\lambda=\lambda_l=\mu(l+1) \quad , \qquad \text{(Ek.A.21)}$$

gibi verilir.

$m>l$ iken özdeğerler olmadığından,

$$O_+(z,l+1)\,y_l^l(z)\equiv 0 \quad , \qquad \text{(Ek.A.22)}$$

yazabiliriz. Böylece

$$\left\{\frac{d}{dz}-k(z,l+1)\right\}y_l^l(z)=0 \quad , \qquad \text{(Ek.A.23)}$$

denklemini elde ederiz.

$y_{\lambda_l}^l(z)=y_l^l(z)$ yazdığımızı belirtelim.

$$\frac{dy_l^l(z)}{y_l^l(z)}=\int^z k(z,l+1)\,dz \quad , \qquad \text{(Ek.A.24)}$$

denklem (E.A.24)' ün integralini alalım.

$$\ln y_l^l(z)=\int^z k(z,l+1)\,dz \quad , \qquad \text{(Ek.A.25)}$$

ya da

$$y_l^l(z) = C\exp\left\{\int^z k(z,l+1)\,dz\right\} , \qquad \text{(Ek.A.26)}$$

C normalizasyon koşulundan elde edeceğimiz bir sabit.

$$\int_a^b dz\left[y_l^l(z)\right]^2 = 1 , \qquad \text{(Ek.A.27)}$$

Verilen bir l için, $y_l^{m=l}(z)$ daha önce bulundu, $m=-l,-l+1,....,-2,-1,0$ ile diğer tüm normalize olmuş özfonksiyonlar

$$y_l^{m-1}(z) = \left[\mu(l+1)-\mu(m)\right]^{-\frac{1}{2}} O_-(z,m)\,y_l^m(z)$$

$$= \pounds_-(z,l,m)\,y_l^m(z) , \qquad \text{(Ek.A.28)}$$

gibi $\pounds_-(z,l,m)$ operatörünün tekrar eden uygulaması tarafından inşa edilir.

Durum II ($m > o$ ve $\mu(m)$ azalan bir fonksiyon) **:**

Bu durumda, Teorem IV gereği m ’ nin minimum değeri vardır.

$$m == l, l+1, l+2, ... , \qquad \text{(Ek.A.29)}$$

Bu durum için

$$O_-(z,m)\,y_l^m(z) = 0$$

$$\left\{-\frac{d}{dz} - k(z,l)\right\} y_l^l(z) = 0 , \qquad \text{(Ek.A.30)}$$

yazabiliriz. Böylece

$$y_l^{m=l}(z) = C\exp\left\{-\int^z k(z,l)\,dz\right\} , \qquad \text{(Ek.A.31)}$$

olur. C yine normalizasyon koşulundan elde edilir.

$$\int_a^b dz\left[y_l^l(z)\right]^2 = 1.$$

şimdi $m = l, l+1, l+2, ...$ için diğer tüm normalize özfonksiyonlar

$$y_l^{m+1}(z) = \left[\mu(l) - \mu(m+1)\right]^{-\frac{1}{2}} O_+(z, m+1)\, y_l^m(z)$$

$$= £_+(z, l, m)\, y_l^m(z)$$

formülünü tekrar uygulayarak $y_l^l(z)$' den elde edilir. $m < 0$ için durumlar benzer şekilde ele alınır.

Faktorizasyon Yöntemi ve Kategorileri

İlk kısımda gördüğümüz gibi faktorizasyonu tanımlamak için

$$\frac{d}{dz}k(z, m+1) + k^2(z, m+1) = -r(z, m) - \mu(m+1)\ , \qquad \text{(Ek.A.32)}$$

$$-\frac{d}{dz}k(z, m) + k^2(z, m) = -r(z, m) - \mu(m)\ , \qquad \text{(Ek.A.33)}$$

Denklemini sağlayan $k(z,m)$ ve fonksiyonlarını belirlemeye ihtiyacımız var. Denklem (Ek.A.33)' den (Ek.A.32)'yi çıkartırsak

$$-k^2(z, m) + k^2(z, m+1) + \frac{d}{dz}k(z, m) + \frac{d}{dz}k(z, m+1) = \mu(m) - \mu(m+1)\ , \qquad \text{(Ek.A.34)}$$

elde edilir. Bu $k(z,m)$ ve $\mu(m)$' nin sağlaması gereken denklemdir. Bu yeterli koşuldur çünkü, $k(z,m)$ ve $\mu(m)$ (Ek.A.32) ya da (Ek.A.33)' te bir tek $r(z,m)$ verir, bu denklemi sağlar. Şimdi (Ek.A.34) denklemini sağlayan $k(z,m)$ ve $\mu(m)$' nin tüm olası formlarını katekorize edeceğiz.

$k(z,m)$ **İçin Olası Formlar :**

i) m **' nin pozitif kuvvetleri :**

ilk olarak

$$k(z,m)=k_0(z)+mk_1(z)\ , \tag{Ek.A.35}$$

şeklinde verilen m ' ye bağlı $k(z,m)$ ' yi göz önüne alalım.

$\mu(m)$ ' yi bulmak için aşağıdaki şekilde m ' nin peşpeşe gelen değerleri için (Ek.A.35) denklemini yazalım.($k(z,m)$ ' nin z ' ye bağlılığını göz önüne almıyoruz.)

$$k^2(m)-k^2(m-1)+k^{'}(m)+k^{'}(m-1)=\mu(m-1)-\mu(m)$$

$$k^2(m-1)-k^2(m-2)+k^{'}(m-1)+k^{'}(m-2)=\mu(m-2)-\mu(m-1)$$

$$k^2(m-2)-k^2(m-3)+k^{'}(m-2)+k^{'}(m-3)=\mu(m-3)-\mu(m-2)$$
$$\vdots$$

$$k^2(1)-k^2(2)+k^{'}(1)+k^{'}(2)=\mu(2)-\mu(1)\ , \tag{Ek.A.36}$$

bu denklemlerin toplamı bize

$$k^2(m)-k^2(0)+2mk_0^{'}+k_1^{'}\left[\sum_{m^{'}=1}^{m}m^{'}+\sum_{m^{'}==0}^{m-1}m^{'}\right]=\mu(0)-\mu(m)\ , \tag{Ek.A.37}$$

denklemini verir.

$$k^{'}(z,m)=k_0^{'}(z)+mk_1^{'}(z)$$

eşitliğini kullanmıştık. Ayrıca

$$\sum_{m^{'}=1}^{m}m^{'}+\sum_{m^{'}=0}^{m-1}m^{'}=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=m^2\ , \tag{Ek.A.37}$$

eşitliğini kullanarak ve denklem (Ek.A.35)' den

$$k^2(m) - k^2(0) = [k_0 + mk_1]^2 - k_0^2 \ , \qquad \text{(Ek.A.38)}$$

yazabiliriz. Son olarak

$$\mu(m) - \mu(0) = -m^2\left[k_1^2 + k_1^{'}\right] - 2m\left(k_0 k_1 + k_0^{'}\right) \ , \qquad \text{(Ek.A.39)}$$

elde ederiz.

$\mu(m)$ sadece m' nin bir fonksiyonu olduğundan bu sadece m' nin katsayıları sabitken sağlanabilir.

$$k_1^2 + k_1^{'} = sbt = -a^2 \ , \qquad \text{(Ek.A.40)}$$

ve

$$k_0 k_1 + k_0^{'} = sbt = -a^2 c \ , \ a \neq 0 \ \text{ ise} \ , \qquad \text{(Ek.A.41)}$$

$$k_0 k_1 + k_0^{'} = sbt = b \ , \ a = 0 \ \text{ ise} \ , \qquad \text{(Ek.A.42)}$$

Bu $\mu(m)$' yi aşağıdaki gibi belirler ;

$$a \neq 0 \ \text{ için, } \ \mu(m) = \mu(0) + a^2\left(m^2 + 2mc\right) \ , \qquad \text{(Ek.A.43)}$$

ve

$$a = 0 \ \text{ için, } \ \mu(m) = \mu(0) - 2mb \ , \qquad \text{(Ek.A.44)}$$

Bu denklemlerde genelliği bozmaksızın $\mu(0) = 0$ alabiliriz. Bu sonuçları kullanarak şimdi aşağıdaki kategorileri elde edeceğiz.

A) $a \neq 0$ için ;

$$k(z,m) = a(c+m)\cot a(z+p) + \frac{d}{\sin a(z+p)} \ , \qquad \text{(Ek.A.45)}$$

$$\mu(0) = a^2 c^2 \ \Rightarrow \ \mu(m) = a^2 (c+m)^2 \ , \qquad \text{(Ek.A.46)}$$

ve

$$r(z,m)=\frac{-a^2(c+m)(c+m+1)-d^2-2ad\left(c+m+\frac{1}{2}\right)\cos a(z+p)}{\sin^2 a(z+p)} \quad , \qquad \text{(Ek.A.48)}$$

B) $a\neq 0$ ve $k_1^{'}=0$ ise;

$$k(z,m)=-a^{'}(m+c)+de^{a^{'}z} \quad , \qquad \text{(Ek.A.49)}$$

$$\mu(0)=-\left(a^{'}\right)^2 c^2 \;\Rightarrow\; \mu(m)=-\left(a^{'}\right)^2(m+c)^2 \quad , \qquad \text{(Ek.A.50)}$$

$$r(z,m)=-d^2e^{2a^{'}z}+2a^{'}\left(m+c+\frac{1}{2}\right)e^{a^{'}z} \quad , \qquad \text{(Ek.A.51)}$$

C) $a=0$ ise ;

$$k(z,m)=\frac{b}{2}z+\frac{c}{z}+\frac{m}{z} \quad , \qquad \text{(Ek.A.52)}$$

$$\mu(0)=\frac{b}{2} \;\Rightarrow\; \mu(m)=\frac{b}{2}-2mb \quad , \qquad \text{(Ek.A.53)}$$

$$r(z,m)=-\frac{(c+m)(c+m+1)}{z^2}-\frac{b^2z^2}{4}+b(m-c) \quad , \qquad \text{(Ek.A.54)}$$

D) $k_1=0$ ise ;

$$k(z,m)=bz+d \quad , \qquad \text{(Ek.A.56)}$$

Bu durumda $O_{\pm}$ operatörleri m ’den bağımsızdır.

$$\mu(m)=\mu(0)-2mb \;;\; \mu(0)=0 \;\Rightarrow\; \mu(m)=-2mb \quad , \qquad \text{(Ek.A.57)}$$

$$r(z,m)=-(bz+d)^2+b(1+2m) \quad , \qquad \text{(Ek.A.58)}$$

m ' nin negatif kuvvetleri

$$k(z,m)=\frac{k_{-1}(z)}{m}+k_0(z)+mk_1(z)$$

$$k^2(m)-k^2(m-1)+k^{'}(m)+k^{'}(m-1)=\mu(m-1)-\mu(m)$$

$$k^2(m-1)-k^2(m-2)+k^{'}(m-1)+k^{'}(m-2)=\mu(m-2)-\mu(m-1)$$

$$k^2(m-2)-k^2(m-3)+k^{'}(m-2)+k^{'}(m-3)=\mu(m-3)-\mu(m-2)$$

$$\vdots$$

$$k^2(2)-k^2(1)+k^{'}(2)+k^{'}(1)=\mu(1)-\mu(2)$$

taraf tarafa toplarsak ve

$$k(z,m)=\frac{k_{-1}(z)}{m}+k_0(z)+mk_1(z)$$

eşitliğini kullanarak

$$k^2(m)-k^2(1)+k^{'}(m)+k^{'}(1)+2\left\{k^{'}(m-1)-k^{'}(m-2)+.....+k^{'}(2)\right\}=\mu(1)-\mu(m)$$

$$k^{'}(m)=\frac{k_{-1}^{'}}{m}+k_0^{'}+mk_1^{'}$$

$$k^{'}(1)=k_{-1}^{'}+k_0^{'}+k_1^{'}$$

$$k^{'}(m-1)=\frac{k_{-1}^{'}}{m-1}+k_0^{'}+(m-1)k_1^{'}$$

$$k^{'}(m-2)=\frac{k_{-1}^{'}}{m-2}+k_0^{'}+(m-2)k_1^{'}$$

$$\vdots$$

$$k^{'}(2)=\frac{k_{-1}^{'}}{2}+k_0^{'}+2k_1^{'}$$

$$k_{Toplam_1}^{'}=k_{-1}^{'}\sum_{m^{'}=2}^{m}\frac{1}{m}+(m-1)k_0^{'}+k_1^{'}\sum_{m^{'}=2}^{m}m^{'}$$

benzer şekilde

$$k_{Toplam_2}^{'}=k_{-1}^{'}\sum_{m^{'}=1}^{m-1}\frac{1}{m^{'}}+(m-1)k_0^{'}+k_1^{'}\sum_{m^{'}=1}^{m-1}m^{'}$$

$$\Rightarrow\ k_{Toplam}^{'}=(2m-2)k_0^{'}+k_{-1}^{'}\left[\sum_{m^{'}=1}^{m-1}\frac{1}{m^{'}}+\sum_{m^{'}=2}^{m}\frac{1}{m^{'}}\right]+k_1^{'}\left[\sum_{m^{'}=1}^{m-1}m^{'}+\sum_{m^{'}=2}^{m}m^{'}\right]$$

$$\sum_{m^2=1}^{m-1}m^{'}+\sum_{m^{'}=2}^{m}m^{'}=\frac{(m-1)m}{2}+\frac{(m+1)m}{2}-1=m^2-1$$

$k_{-1}=q\neq 0$ olacak şekilde bir sabit ise $k_1^{'}=0$ ' dır.

$$\therefore\ k_{Toplam}^{'}=(2m-2)k_0^{'}+\left(m^2-1\right)k_1^{'}$$

$$\Rightarrow\ k^2(m)-k^2(1)+(2m-2)k_0^{'}+\left(m^2-1\right)k_1^{'}=\mu(1)-\mu(m)$$

burada

$$k^2(m)-k^2(1)=\left[\frac{k_{-1}}{m}+k_0+mk_1\right]^2-\left[k_{-1}+k_0+k_1\right]^2$$

$$=\frac{k_{-1}^2}{m^2}+k_0^2+m^2k_1^2-k_{-1}^2-k_0^2-k_1^2+\frac{2}{m}k_{-1}k_0+2k_{-1}k_1+2mk_0k_1-2k_{-1}k_0-2k_{-1}k_1-2k_0k_1$$

$$=\frac{k_{-1}^2}{m^2}+m^2k_1^2+\frac{2}{m}k_1k_0+2mk_0k_1-k_{-1}^2-k_1^2-2k_{-1}k_0-2k_0k_1$$

$$\Rightarrow\frac{k_{-1}^2}{m^2}+m^2k_1^2+\frac{2}{m}k_{-1}k_0+2mk_0k_1-k_{-1}^2-k_1^2-2k_{-1}k_0-2k_0k_1+(2m-2)k_0^{'}+\left(m^2-1\right)k_1^{'}$$

$$=\mu(1)-\mu(m)$$

$$\Rightarrow \frac{k_{-1}^2}{m^2}+\frac{2}{m}k_{-1}k_0+m^2\left(k_1^2+k_1^{'}\right)+m\left(2k_0k_1+2k_0^{'}\right)-\left[k_{-1}^2+2k_{-1}k_0+\left(k_1^2+k_1^{'}\right)+\left(2k_0k_1+2k_0^{'}\right)\right]$$

$$=\mu(1)-\mu(m)$$

dikkat edilirse

$$k_{-1}^2+2k_{-1}k_0+\left(k_1^2+k_1^{'}\right)+\left(2k_0k_1+2k_0^{'}\right)$$

terimi $\mu(1)$' e karşı gelir. Yani

$$\mu(1)=-\left[k_{-1}^2+2k_{-1}k_0+\left(k_1^2+k_1^{'}\right)+\left(2k_0k_1+2k_0^{'}\right)\right]$$

$$\mu(m)=\frac{k_{-1}^2}{m^2}+\frac{2}{m}k_{-1}k_0+m^2\left(k_1^2+k_1^{'}\right)+m\left(2k_0k_1+2k_0^{'}\right)$$

$$k_{-1}=q$$
$$k_0=0$$
$$k_1^2+k_1^{'}=-a^2$$

Bu durumda $a\neq 0$ ve $a=0$' da iki kategori daha karşımıza çıkar,

E) $a\neq 0$ ise;

$$k_1=a\cot a\left(z+p\right),\ k_0=0,\ k_{-1}=q$$

$$\mu(m)=a^2m^2-\frac{q^2}{m^2}\ , \qquad \text{(Ek.A.59)}$$

$$k(z,m)=am\cot a\left(z+p\right)+\frac{q}{m}\ , \qquad \text{(Ek.A.60)}$$

$$r(z,m) = -\frac{m(m+1)a^2}{\sin^2 a(z+p)} - 2aq\cot a(z+p) \ , \tag{Ek.A.61}$$

F) $a = 0$ ise;

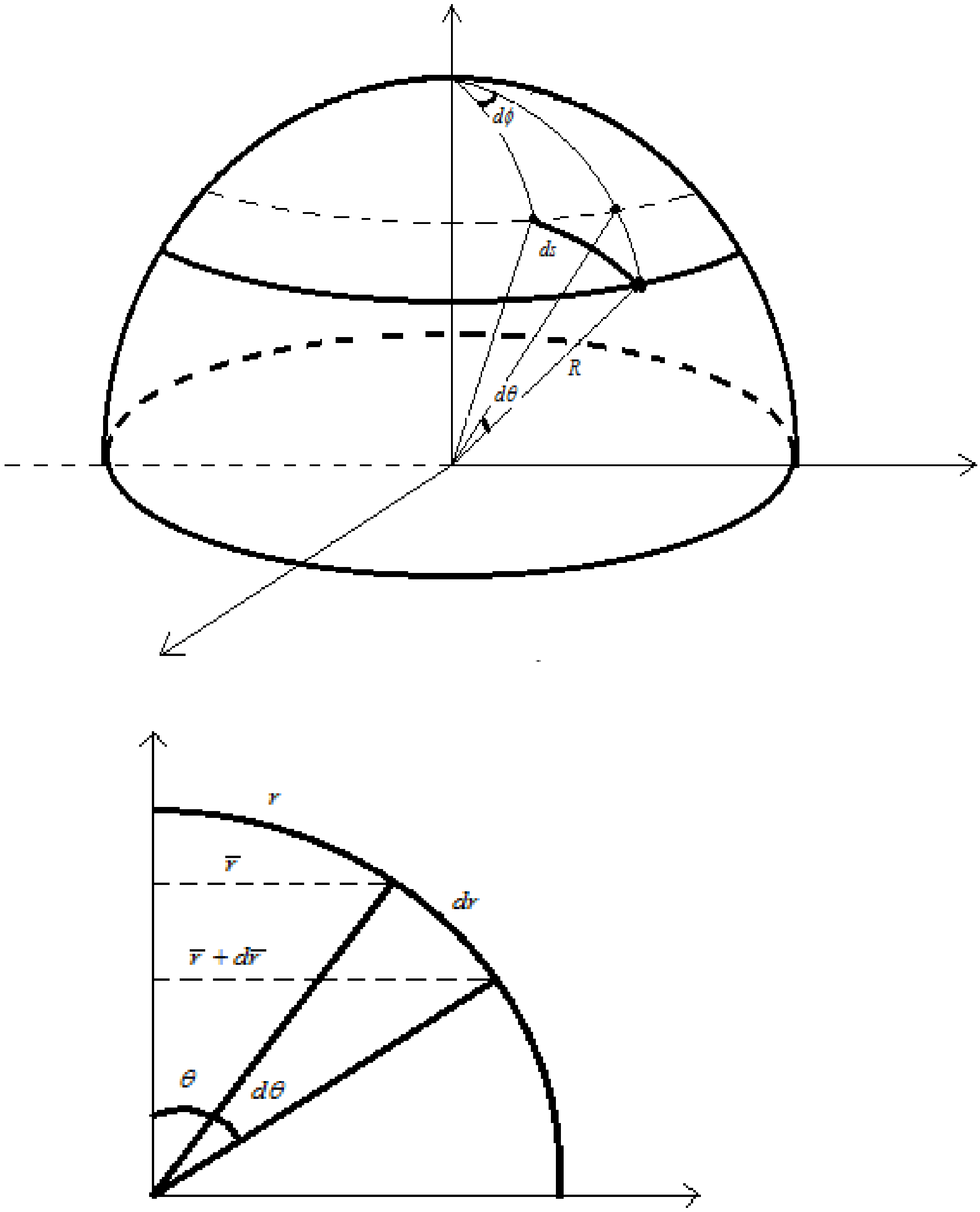
$$k_1 = \frac{1}{z},\ k_0 = 0,\ k_{-1} = q$$

$$\mu(m) = -\frac{q^2}{m^2} \ , \tag{Ek.A.62}$$

$$k(z,m) = \frac{q}{m} + \frac{m}{z} \ , \tag{Ek.A.63}$$

$$r(z,m) = -\frac{2q}{z} - \frac{m(m+1)}{z^2} \ , \tag{Ek.A.64}$$

Ek- B. Küre Yüzeyi Üzerinde Metrik ve Laplasyan



Şekil Ek.B.1

Şekil Ek.B.1’ den görüleceği gibi

$\bar{r} = R\sin\theta$ ve $\bar{r} + d\bar{r} = R\sin(\theta + d\theta)$

eşitlikleri vardır. Buradan

$$
\begin{aligned}
d\bar{r} &= R\{\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta\} \\
&= R\{\sin\theta\cos d\theta + \cos\theta\sin d\theta - \sin\theta\} \\
&= R\{-\sin(1 - \cos d\theta) + \cos\theta\sin d\theta\}
\end{aligned}
$$

$$
= R\left\{-\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{d\theta}{2}\right)^2 + \cos\theta(d\theta)\right\} \quad ; \quad d\theta = \frac{dr}{R}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow d\bar{r} &= R\left\{-\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{dr}{R}\right)^2 + \cos\theta\left(\frac{dr}{R}\right)\right\} \\
&= \frac{\left\{-\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{dr}{R}\right)^2 + \cos\theta\left(\frac{dr}{R}\right)\right\}}{\frac{dr}{R}} dr
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\frac{dr}{R} \to 0} \frac{\left\{-\frac{1}{2}\sin\theta\left(\frac{dr}{R}\right)^2 + \cos\theta\left(\frac{dr}{R}\right)\right\}}{\frac{dr}{R}} dr = \cos\theta
$$

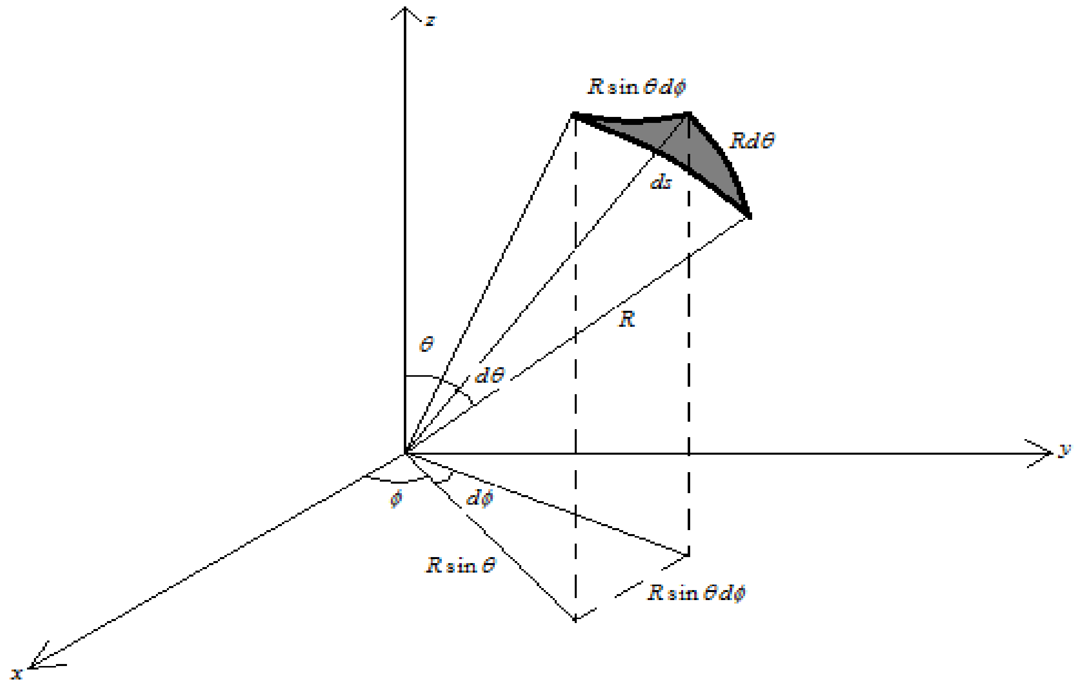
$$
\Rightarrow d\bar{r} = \cos\theta dr
$$

her iki tarafın integralini alırsak

$$
\begin{aligned}
\bar{r} &= r\cos\theta \\
R\sin\theta &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad r = R\tan\theta \, , \qquad \text{(Ek.B.1)}
$$

olarak bulunur.



Şekil Ek.B.2

Şekil Ek.B.1’ de görüleceği gibi

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \ , \tag{Ek.B.2}$$

şeklindedir.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dy^{\nu} \ , \tag{Ek.B.3}$$

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\theta\phi} d\theta d\phi + g_{\phi\theta} d\phi d\theta + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

$$g_{\theta\theta} = R^2 \quad , \ g_{\theta\phi} = 0$$
$$g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta \ , \ g_{\phi\theta} = 0$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} , \tag{Ek.B.4}$$

$$g^{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = \frac{1}{\det g_{\mu\nu}} Adj\left(g_{\mu\nu}\right)$$

$$\det g_{\mu\nu} = g = R^4 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu} = \frac{1}{R^4 \sin^2\theta}\begin{pmatrix} R^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) , \qquad \text{(Ek.B.5)}$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R^2 \sin\theta \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(R^2 \sin\theta \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ , \qquad \text{(Ek.B.6)}$$

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Malatya’ da doğdum. İlköğrenimimi İnönü İlköğretim Okulu’nda tamamladım. 2003 yılında Bağlar Lisesi’nden mezun oldum. 2005 yılında Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü’nü kazandım ve 2009 yılında mezun oldum. Aynı yıl Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nün Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği programında yüksek lisansa başlayarak 2011 yılında da bu programı tamamlamış oldum. Akademik hayatımı doktora programı ile devam ettirmek istiyorum.